

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

WALTER STREB

Über die Äquivalenz von Polynomidentitäten in Ringen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 56 (1976), p. 33-48

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__56__33_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__56__33_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Über die Äquivalenz von Polynomidentitäten in Ringen.

WALTER STREB (*)

Einleitung.

Der nachfolgenden Untersuchung liegen Polynomringe in *nicht vertauschbaren* Unbestimmten $x_1, x_2, x_3, \dots$ zugrunde: Sei Z_p für $p = 0$ der Ring der ganzen Zahlen, für $p = 1$ der Körper der rationalen Zahlen und für Primzahlen p der Primkörper der Charakteristik p . Mit der Menge Q der formalen *Unbestimmtenprodukte* $q = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$ beliebiger *Dimension* $d(q) = n$ bildet man die assoziative Algebra ${}_pF$ über Z_p mit der Basis Q . Die Elemente von ${}_pF$ heißen *Formen*.

${}_0F$ bzw. ${}_pF$ mit $p \neq 0$ ist in kanonischer Weise die Klasse der Ringe R der Charakteristik 0 (aus $mr = 0$, $m \in Z_0$, $r \in R$ folgt stets $m = 0$ oder $r = 0$) bzw. Algebren über Z_p zugeordnet. Zu ${}_pF$ und R bildet man die Menge ${}_pF_R$ aller Formen $f \in {}_pF$, für welche die Gleichung $f = 0$ in R identisch erfüllt ist.

Zwei nicht nur die Nullform enthaltende Teilmengen A und B von ${}_pF$ heißen *äquivalent* bzw. **-äquivalent*, wenn folgendes gilt: $A \subseteq {}_pF_R$ genau dann, wenn $B \subseteq {}_pF_R$ für alle ${}_pF$ zugeordneten Ringe R bzw. alle ${}_pF$ zugeordneten Ringe R mit Einselement.

In dieser Note werden *Algorithmen* für *Äquivalenzuntersuchungen* entwickelt, welche ich zunächst an einigen Anwendungen illustrieren möchte:

BIESPIEL 1. Bestimmung von Äquivalenzklassen. Für $1 < n \in Z_0$ sei ${}_pF_n$ bzw. ${}_pF_n^*$ die Menge aller Elemente von ${}_pF$ bzw. ${}_pF_{Z_p}$ deren

(*) Indirizzo dell'A.: Universität Essen, Universitäts - Str. 3 D-43 Essen, Rep. Fed. Tedesca.

aufbauende Unbestimmtenprodukte allesamt höchstens die Dimension n , wenigstens die Dimension 2 besitzen. Hierbei ist obige Einschränkung von ${}_pF$ auf ${}_pF_{Z_p}$ für die folgenden Anwendungen auf Ringe R mit Einselement unwesentlich, da für diese Ringe jeweils ${}_pF_R \subseteq {}_pF_{Z_p}$ gilt. Wir zeigen durch Angabe von Repräsentanten für $*$ -Äquivalenzklassen:

Mit $n_2 = 1$, $n_3 = 2$, $n_4 = 18$ zerfällt ${}_pF_i^*$ für $p \in (0, 1)$ und $p > i$ in n_i Klassen, $2 \leq i \leq 4$. Während für $p > 1$ die Mengen ${}_pF_i^*$ allesamt in endlich viele Klassen zerfallen, zerfällt für $p \in (0, 1)$ schon ${}_pF_5^*$ in unendlich viele Klassen.

BEISPIEL 2. Minimalidentitäten. Sei R ein Ring, R' das von den Kommutatoren $r \circ s := rs - sr$, $r, s \in R$ erzeugte Ideal von R , P_n die Menge aller Permutationen von $(1, 2, \dots, n)$ und $\text{sign}(\pi)$ das Vorzeichen von $\pi \in P_n$.

Die Abschwächung der Eigenschaften eines Ringes R , nilpotent zu sein, ein nilpotentes Kommutatorideal R' bzw. einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring zu besitzen, führt auf die Forderung der Identitäten $h_{1,n} := (x_1)^n = 0$, $h_{2,n} := \sum_{\pi \in P_n} \text{sign}(\pi) x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(n)} = 0$ (Standardidentität [2, P. 154]) bzw. $h_{3,n} := (((x_2 \circ x_1) \circ x_1) \dots) \circ x_1 = 0$, deren aufbauende Unbestimmtenprodukte allesamt die Dimension n besitzen, $1 < n \in Z_0$. Wir zeigen die Minimalität dieser Identitäten unter folgender Begriffsbildung:

Eine Form $0 \neq g \in {}_pF_n$ heißt *Folgeform* von $0 \neq f \in {}_pF_n$, wenn aus $f \in {}_pF_R$ stets $g \in {}_pF_R$ folgt für alle ${}_pF$ zugeordneten Ringe R . Für $p \in (0, 1)$ und $p > n$ gilt:

Jede Folgeform $g \in {}_pF_n$ von $h_{i,n}$ ist zu $h_{i,n}$ äquivalent $1 \leq i \leq 3$.

Zu jedem Element $f \in {}_pF_n$ bzw. $f \in {}_pF_n^*$ mit $p \in (0, 1)$ oder $p > n$ liefern die Algorithmen eine äquivalente bzw. $*$ -äquivalente Menge von im obigen Sinne minimalen Formen.

BEISPIEL 3. Kommutativitätskriterien. Die Frage nach der Kommutativität von Ringen R wurde mehrfach behandelt [2; p. 87-88, References]. Die Kriterien sind meist stark eingeschränkte Polynombedingungen der Art $f_r(r) = 0$ bzw. $f_r(r) \circ s = 0$ für $r, s \in R$ mit von r abhängigen Formen $f_r(x_1) \in {}_0F$.

Die Kommutativitätssätze dieser Note stützen sich auf folgende Begriffe: $Z_{p,2}$ sei der Ring der 2-zeiligen, 2-spaltigen Matrizen über Z_p , $Z_{p,n}$ für $n > 2$ der Ring der n -zeiligen, n -spaltigen Matrizen $(a_{i,j})$ über Z_p mit $a_{i,i} = a_{i,j}$, $a_{i,i} = 0$ für $1 \leq j < i \leq n$. Eine Form $f \in {}_pF$ heißt *Hauptform*, falls f in die Nullform übergeht, wenn man in den f

aufbauenden Unbestimmtenprodukten die Unbestimmten nach wachsenden Indizes ordnet. Ein ${}_pF$ zugeordneter Ring R mit Einselement heißt $Z_{p,n}$ -Ring bzw. starker $Z_{p,n}$ -Ring, wenn es eine Form bzw. Hauptform $f \in {}_pF$ gibt, so daß $f \in {}_pF_R$, $f \notin {}_pF_{Z_{p,n}}$.

Da die Klasse der Ringe der Charakteristik 0 die Klasse der Algebren über Z_1 umfaßt, sei in den folgenden Aussagen (I)-(IV) $p \neq 1$. Nach [9; Korollar 1, p. 136] ist jeder $Z_{0,3}$ -Ring kommutativ. Deshalb sei in den Aussagen (I).(2)-(IV) $0 \neq p \neq 1$. Wir zeigen:

(I) (1) Ist R ein $Z_{0,4}$ -Ring oder $h_{2,4} \notin {}_0F_R$ und R ein $Z_{0,5}$ -Ring, so ist R' nil.

(2) Ist R ein $Z_{p,2}$ - und $Z_{p,4}$ -Ring, so ist R' nil.

(II) Ist R starker $Z_{p,3}$ -Ring und R' nil, so ist R' kommutativ.

(III) Ist R ein $Z_{p,2}$ -Ring und starker $Z_{p,3}$ -Ring, so ist R' kommutativ.

(IV) Sei $f(x_1, x_2) \in {}_pF$ Hauptform. In jedem f aufbauenden Unbestimmtenprodukt komme x_2 genau 1-mal vor. Ist R ein ${}_pF$ zugeordneter Ring mit Einselement und $f \in {}_pF_R$, $f \notin {}_pF_{Z_{p,1}}$, so ist R kommutativ.

BEISPIEL 4. Die in [8; p. 137] angegebenen ${}_pF$ zugeordneten Ringe können in kanonischer Weise zu Ringen S_p mit Einselementen erweitert werden. Wir zeigen über Ringe R der Charakteristik 0 mit Einselement:

Es gibt $1 < n \in Z_0$, so daß $h_{2,n} \in {}_0F_R$ genau dann, wenn R ein S_0 Ring ist. Entsprechende Aussagen [9; Lemma 5, Korollar 2, pp. 134, 138] gelten für $h_{1,n}$ und $h_{3,n}$.

ANMERKUNG. Die in dieser Note entwickelten Methoden für Äquivalenzuntersuchungen übertragen sich bei passender Wahl der Formenringe ausnahmslos und unmittelbar auf alle möglichen Klassen von *nichtassoziativen* Ringen.

Nach dieser Auswahl von Beispielen sollen nun die grundlegenden Äquivalenzsätze bewiesen werden.

BEWEISTEIL. Überträgt man die für ${}_0F$ definierten Begriffe [6; pp. 563, 565, 568, 571, 576, 584] auf ${}_pF$ für $p \neq 0$, wobei man lediglich bei der Definition eines T^* -Ideals die Forderung der Abgeschlossenheit bezüglich der Bildung partieller Ableitungen der Elemente durch die Bedingung der Abgeschlossenheit bezüglich der Sub-

stitutionen $x_i \rightarrow n_i + x_i$, $n_i \in Z_p$ in Elementen des T^* -Ideals ersetzt, so bleiben [6; Sätze 1, 2, 4, 15, pp. 565, 573, 584] gültig. Ist ${}_pL_n$ bzw. ${}_pL_n^*$ der symmetrische Modul aller n -fach bzw. *eigentlich n -fach linearen Formen* aus ${}_pF$ und $T(M)$ bzw. $T^*(M)$ das von $M \subseteq {}_pF$ erzeugte T -bzw. T^* -Ideal, so folgt man leicht

BEMERKUNG 1. Symmetrische Moduln $M_i \subseteq {}_pL_n$ bzw. ${}_pL_n^*$, $1 \leq i \leq 2$ sind wegen $T(M_i) \cap {}_pL_n = M_i$ bzw. $T^*(M_i) \cap {}_pL_n^* = M_i$ genau dann äquivalent bzw. $*$ -äquivalent, wenn $M_1 = M_2$.

[6; Sätze 3, 9, pp. 568, 576] gelten für $p = 1$ uneingeschränkt und für $0 \neq p \neq 1$ geändert gemäß

BEMERKUNG 2. Für $p > n$ ist jede Teilmenge von ${}_pF_n$ bzw. ${}_pF_n^*$ äquivalent bzw. $*$ -äquivalent zu einer Teilmenge von $\bigcup_{i=2}^n {}_pL_i$ bzw. $\bigcup_{i=2}^n {}_pL_i^*$.

Für $f \in {}_pF$ notieren wir genauer $f(x_1, \dots, x_n)$, wenn in den f aufbauenden Unbestimmtenprodukten höchstens die Unbestimmten x_i , $1 \leq i \leq n$ auftreten. Für $f \in {}_pL_n$ bzw. $M \subseteq {}_pF$ sei $S(f)$ bzw. $|M|$ der von f bzw. M erzeugte symmetrische Modul bzw. Z_p -Modul.

Für eine Folge $a = x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ von Unbestimmten sei $k(a)$ die Mächtigkeit der Menge $a(k) := \{j | i_j = k\}$. Sei X_n die *lexikographisch geordnete* Menge aller Unbestimmtenfolgen $a = x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ mit $i_1 = 1$, $i_k \leq i_{k+1}$, $k(a) \geq k + 1(a)$, $1 \leq k < n$.

BEISPIEL 5. Die Elemente von X_i , $2 \leq i \leq 5$ in geordneter Reihenfolge:

$$X_2: x_1, x_1 < x_1, x_2.$$

$$X_3: x_1, x_1, x_1 < x_1, x_1, x_2 < x_1, x_2, x_3.$$

$$X_4: x_1, x_1, x_1, x_1 < x_1, x_1, x_1, x_2 < x_1, x_1, x_2, x_2 < x_1, x_1, x_2, x_3 < \\ < x_1, x_2, x_3, x_4.$$

$$X_5: x_1, x_1, x_1, x_1, x_1 < x_1, x_1, x_1, x_1, x_2 < x_1, x_1, x_1, x_2, x_2 < \\ < x_1, x_1, x_1, x_2, x_3 < x_1, x_1, x_2, x_2, x_3 < x_1, x_1, x_2, x_3, x_4 < \\ < x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.$$

Sei $M \subseteq {}_pL_n$ symmetrischer Modul. Für alle $a \in X_n$ ist die Menge ${}_aM \subseteq M$ aller Elemente $f \in M$ mit nachstehenden Eigenschaften ein

symmetrischer Modul: Für alle $b = x_{i_1}, \dots, x_{i_n} \in X_n$ mit $b < a$ und alle $\pi \in P_n$ geht f bei den Substitutionen $x_{\pi(j)} \rightarrow x_{i_j}$, $1 \leq j \leq n$ in die Nullform über.

Für $a = x_{i_1}, \dots, x_{i_n} \in X_n$ sei $P_{n,a} \subseteq P_n$ die Teilmenge derjenigen Permutationen, welche die Mengen $a(k)$, $1 \leq k \leq n$ auf sich abbilden. Aus $f \in {}_a M$ erhält man bei den Substitutionen $x_j \rightarrow x_{\pi(j)}$, $\pi \in P_{n,a}$ bzw. $x_j \rightarrow x_{i_j}$ bzw. $x_j \rightarrow \sum_{k \in a(i_j)} x_k =: y_j$, $1 \leq j \leq n$ der Reihe nach die Elemente

$${}_a f := \sum_{\pi \in P_{n,a}} f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) \in {}_a M \quad \text{bzw.} \quad {}^a f := f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in {}^a F$$

$$\text{bzw.} \quad f^a := f(y_1, \dots, y_n) \in {}^a F.$$

(A) Es gilt $f^a = {}_a f + g$, $g \in {}^a F$, wobei in jedem g aufbauenden Unbestimmtenprodukt wenigstens eine der Unbestimmten x_i , $1 \leq i \leq n$ nicht auftritt.

(B) Sei ${}^a M := ({}^a f | f \in {}_a M)$ für alle $a \in X_n$. Für $f, g \in {}_a M$ folgt aus ${}^a f = {}^a g$ stets ${}_a f = {}_a g$ und $f^a = g^a$. Für $h \in {}^a M$ mit $h = {}^a f$, $f \in {}_a M$ ist deshalb ${}_a h := {}_a f$ und $h^a := f^a$ wohl definiert.

M heißt b -Modul, $b \in X_n$, wenn $M = {}_b M$, ${}^a M = 0$ für alle $b \neq a \in X_n$, ${}_a M = 0$ für alle $b < a \in X_n$.

BEISPIEL 6. Für $a \in X_n$ erhält man zunächst die Elemente f von ${}_a({}_p L_n)$ bzw. ${}_a({}_p L_n^*)$, indem man die Definitionseigenschaften an den Koeffizienten $n_\pi \in Z_p$ der Basisdarstellung $f = \sum_{\pi \in P_n} n_\pi x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(n)}$ bzw. gemäß [6; Satz 15, p. 584] verifiziert und dann weiter:

$$x_1, \dots, x_1({}_p L_n) = |h_{1,n}|, \quad x_1, \dots, x_n({}_p L_n) = |h_{2,n}|, \quad x_1, \dots, x_1({}_p L_n^*) = 0,$$

$$x_1, \dots, x_1, x_3({}_p L_n^*) = |h_{3,n}|, \quad x_1, \dots, x_n({}_p L_n^*) = |h_{2,n}|$$

bzw. 0 für gerade bzw. ungerade n ,

$$x_1, x_1, x_2, x_2({}_p L_4^*) = |(x_1 \circ x_2)^2|, \quad x_1, x_1, x_2, x_3({}_p L_4^*) = |(x_1 \circ x_2) \circ (x_1 \circ x_3)|,$$

$$x_1, x_1, x_1, x_2, x_3({}_p L_5^*) = |(x_1 \circ x_2) h_{3,3}, h_{3,3}(x_1 \circ x_2)|.$$

LEMMA 1. Sei $0 \neq M \subseteq {}_p L_n$ symmetrischer Modul und R ein ${}_p F$

zugeordneter Ring.

(1) Es gibt $b \in X_n$, so daß ${}^bM \neq 0$, wie man unmittelbar einsieht.

(2) Nach (B) gilt $S(a)f \subseteq {}^aM$ für alle $a \in X_n$, $f \in {}^aM$.

(3) Aus $f \in {}_pF_R$ folgt $S(a)f \subseteq {}_pF_R$ für alle $a \in X_n$, $f \in {}^aM$.

(4) Ist M minimaler symmetrischer Modul, so gibt es $b \in X_n$, so daß M ein b -Modul ist. Für alle $0 \neq f \in {}^bM$ gilt $S(b)f = M$. Weiterhin ist $M \subseteq {}_pF_R$ genau dann, wenn ${}^bM \subseteq {}_pF_R$.

BEWEIS. (3) Aus $f \in {}_pF_R$ folgt $f_0 := f^a \in {}_pF_R$, also der Reihe nach

$$f_{i+1} := f_i(x_1, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, x_i, 0, x_{i+2}, \dots, x_n) \in {}_pF_R, \quad 0 \leq i < n.$$

Wegen (A) gilt $af = f_n \in {}_pF_R$, also $S(a)f \subseteq {}_pF_R$.

(4) Nach (1) gibt es $b \in X_n$, so daß ${}^bM \neq 0$, also $0 \neq {}^bM = M$. Für $b > a \in X_n$ ist ${}^aM = {}^a({}^bM) = 0$. Für $b < a \in X_n$ gilt wegen ${}^bM \neq 0$, daß $0 = {}^aM \subsetneq {}^bM = M$, also auch ${}^aM = 0$. Für $0 \neq f \in {}^bM$ gilt nach (2) $0 \neq S(b)f = {}^bM = M$. Aus $M \subseteq {}_pF_R$ folgt ${}^bM \subseteq {}_pF_R$. Mit (3) folgt aus $0 \neq f \in {}^bM \subseteq {}_pF_R$, daß $M = S(b)f \subseteq {}_pF_R$.

Sei $p \neq 0$, $M \subseteq {}_pL_n$ symmetrischer Modul, $f \in M$, $\pi \in P_n$. Mit der Verknüpfung $(\pi, f) \rightarrow f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$ sind die symmetrischen Moduln genau die P_n -Untermodule von ${}_pL_n$.

(a) Jedem symmetrischen Modul $M \subseteq {}_0L_n$ ist wegen ${}_0L_n \subseteq {}_1L_n$ der von M erzeugte symmetrische Modul $N \subseteq {}_1L_n$ zugeordnet. Es gilt $N \cap {}_0L_n = M$.

Ein Modul $M \subseteq {}_0F$ heißt *linearer Modul*, wenn aus $mf \in M$, $0 \neq m \in Z_0$, $f \in {}_0F$ stets $f \in M$ folgt. Für einen Modul $M \subseteq {}_0F$ ist $L(M) := (f \in {}_0F \mid \text{Es gibt } 0 \neq m \in Z_0, \text{ so daß } mf \in M)$ der von M erzeugte lineare Modul. Es gilt unter Berücksichtigung von (a) der

SATZ VON MASCHKE. Sei $p = 1$ oder $p > n$. Zu jedem symmetrischen Modul $M \subseteq {}_pL_n$ bzw. $M \subseteq {}_0L_n$ gibt es minimale symmetrische Moduln M_i , $1 \leq i \leq m$, so daß die Summe $\bar{M} := \sum_{i=1}^m M_i$ direkt und $M = \bar{M}$ bzw. $M = L(\bar{M})$. Zu je zwei symmetrischen Moduln $N \subseteq M \subseteq {}_pL_n$ bzw. $N \subseteq M \subseteq {}_0L_n$ gibt es einen symmetrischen Modul K , so daß die Summe $N + K$ direkt und $M = N + K$ bzw. $M = L(N + K)$.

SATZ 1. Sei $p = 1$ oder $p > n$, $M \subseteq {}_p L_n$ bzw. $M \subseteq {}_0 L_n$ symmetrischer Modul, R ein ${}_p F$ bzw. ${}_0 F$ zugeordneter Ring und a_i , $1 \leq i \leq m$ eine geordnete Abzählung der Elemente von X_n :

(1) $M \subseteq {}_p F_R$ bzw. $M \subseteq {}_0 F_R$ genau dann, wenn ${}^a M \subseteq {}_p F_R$ bzw.

$L({}^a M) \subseteq {}_0 F_R$ für alle $a \in X_n$.

(2) Es gibt a_i -Moduln M_i , $1 \leq i \leq m$, so daß $M = \sum_{i=1}^m M_i$ bzw.

$M = L\left(\sum_{i=1}^m M_i\right)$. Es gilt ${}_a M = \sum_{j=1}^m M_j$ bzw. ${}_a M = L\left(\sum_{j=i}^m M_j\right)$ und ${}^a M = {}^a M_i$ bzw. $L({}^a M) = L({}^a M_i)$ für $1 \leq i \leq m$. Die Darstellung ist eindeutig und $\sum_{i=1}^m M_i$ direkt.

BEWEIS für $p \neq 0$. $p = 0$ erledigt man entsprechend.

(1) Die rechtsseitige Implikation folgt unmittelbar. Linksseitige Implikation: M ist direkte Summe minimaler symmetrischer Moduln M_i , $1 \leq i \leq k$. Aus ${}^a M_i \subseteq {}^a M \subseteq {}_p F_R$ für alle $a \in X_n$ folgt mit Lemma 1.(4) $M_i \subseteq {}_p F_R$, $1 \leq i \leq k$, also $M \subseteq {}_p F_R$.

(2) Existenz: Sei N_i direkter Summand in der Summe ${}_a M = {}_{a_{i+1}} M + N_i$, $1 \leq i < m$ und $N_m := {}_{a_m} M$. Dann gilt $M = \sum_{i=1}^m N_i$, ${}_a N_i = N_i$, ${}_{a_j} N_i \subseteq {}_{a_j}({}_a M) = 0$ für $1 \leq j < i$ und ${}_{a_j} M \supseteq {}_{a_j} N_i \subseteq N_i$, also ${}_{a_j} N_i = 0$ für $i < j \leq m$. Folglich ist N_i ein a_i -Modul, $1 \leq i \leq m$.

Sei nun $M = \sum_{i=1}^m M_i$ eine beliebige Darstellung von M als Summe von a_i -Moduln M_i , $1 \leq i \leq m$. Wir zeigen ${}_a M = \sum_{j=i}^m M_j$. Wegen $\sum_{j=i}^m M_j \subseteq {}_a M$ bleibt zu zeigen, daß ${}_a M \subseteq \sum_{j=i}^m M_j$. Für $\sum_{j=1}^m f_j \in {}_a M$ mit $f_j \in M_j$ gilt

$${}_{a_1} f_1(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) = \sum_{j=1}^m {}_{a_1} f_j(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) = {}_{a_1} \left(\sum_{j=1}^m f_j(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) \right) = 0$$

für alle $\pi \in P_n$, also $f_1 \in {}_{a_1} M_1 = 0$. Dieses Verfahren liefert der Reihe nach $f_j = 0$ für $1 \leq j < i$. Aus $\sum_{j=1}^m f_j = 0$ folgt entsprechend $f_j = 0$ für $1 \leq j \leq m$. Also ist $\sum_{i=1}^m M_i$ direkt. Mit ${}_a M = \sum_{j=i}^m M_j$ gilt auch ${}^a M = {}^a({}_a M) = {}^a \left(\sum_{j=i}^m M_j \right) = {}^a M_i$ für $1 \leq i \leq m$.

EINDEUTIGKEIT. Wegen ${}^a N_i = {}^a M = {}^a M_i$ und ${}^a N_i = 0 = {}^a M_i$ für $1 < j \neq i \leq m$ sind nach (1) und Bemerkung 1 M_i und N_i äquivalent, also gleich für $1 \leq i \leq m$.

SATZ 2. Sei $p = 1$ oder $p > n$ und $b \in X_n$. Ein Modul $N \subseteq {}^b({}_p L_n)$ bzw. linearer Modul $N \subseteq L({}^b({}_0 L_n))$ heißt *b-induziert* genau dann, wenn ${}^b S(b)f \subseteq N$ für alle $f \in N$. Die Abbildungen $M \rightarrow {}^b M$ und $N \rightarrow \sum_{f \in N} S(b)f$ bzw. $M \rightarrow L({}^b M)$ und $N \rightarrow L\left(\sum_{f \in N} S(b)f\right)$ sind inklusionserhaltende Bijektionen zwischen dem Verband bzw. der Menge der *b*-Moduln $M \subseteq {}_p L_n$ ($M \subseteq {}_p L_n^*$) bzw. $M \subseteq {}_0 L_n$ ($M \subseteq {}_0 L_n^*$) und dem Verband bzw. der Menge der *b*-induzierten Moduln $N \subseteq {}^b({}_p L_n)$ ($N \subseteq {}^b({}_p L_n^*)$) bzw. $N \subseteq L({}^b({}_0 L_n))$ ($N \subseteq L({}^b({}_0 L_n^*))$).

BEWEIS für $p \neq 0$. $p = 0$ erledigt man entsprechend. Nach Lemma 1. (2) ist ${}^b M$ ein *b*-induzierter Modul.

Die Abbildung $M \rightarrow {}^b M$ ist *injektiv*: Für *b*-Moduln M_1 and M_2 folgt mit Satz 1. (1) und Bemerkung 1 aus ${}^b M_1 = {}^b M_2$, daß M_1 und M_2 äquivalent, also gleich sind.

Die Abbildung $M \rightarrow {}^b M$ ist *surjektiv*: Sei $N \subseteq {}^b({}_p L_n)$ bzw. $N \subseteq {}^b({}_p L_n^*)$ ein *b*-induzierter Modul. Nach Lemma 1. (2) gilt $A := \sum_{f \in N} S(b)f \subseteq {}^b({}_p L_n)$ bzw. $A \subseteq {}^b({}_p L_n^*)$. Sei *c* der Nachfolger von *b* in der geordneten Menge X_n und *M* direkter Summand in $A = {}^c A + M$. Dann gilt ${}^b M = {}^b({}^c A) + {}^b M = {}^b({}^c A + M) = {}^b A = {}^b\left(\sum_{f \in N} S(b)f\right) = \sum_{f \in N} {}^b S(b)f = N$, ${}^b M = M$, ${}^a M \subseteq {}^a A = 0$ für $b > a \in X_n$ und ${}^c A \supseteq {}^a M \subseteq M$, also ${}^a M = 0$ für $b < a \in X_n$. Aus ${}^b M = N$ folgt mit Lemma 1 (2) $A \subseteq M$, also $A = M$. Insbesondere sind die Abbildungen inverse Bijektionen. Die Verbandseigenschaften und die Inklusionstreue der Bijektionen sind leicht zu zeigen.

Mit den Sätzen 1, 2 und Bemerkungen 1, 2 folgt

BEMERKUNG 3. Für $p = 1$ und $p > n$ gilt.

(1) Jede Teilmenge *A* von ${}_p F_n$ (${}_p F_n^*$) bzw. ${}_0 F_n$ (${}_0 F_n^*$) ist äquivalent (*-äquivalent) zu einer Vereinigung von *a*-induzierten Untermoduln von ${}^a({}_p L_i)$ (${}^a({}_p L_i^*)$) bzw. $L({}^a({}_0 L_i))$ ($L({}^a({}_0 L_i^*))$), $a \in X_i$, $2 \leq i \leq n$.

(2) Sei a_i , $1 \leq i \leq m$ eine geordnete Abzählung der Elemente von X_n , M_i , $1 \leq i \leq m$ und N_i , $1 \leq i \leq m$ zwei Folgen von a_i -induzierten Untermoduln von ${}^{a_i}({}_p L_n)$ (${}^{a_i}({}_p L_n^*)$) bzw. $L({}^{a_i}({}_0 L_n))$ ($L({}^{a_i}({}_0 L_n^*))$).

Dann sind $\bigcup_{i=1}^m M_i$ und $\bigcup_{i=1}^m N_i$ äquivalent (*-äquivalent) genau dann, wenn $M_i = N_i$ für $1 \leq i \leq m$.

ZU BEISPIEL 1. Sei

$$\begin{aligned} M_1 &:= |x_1 \circ x_2|, & M_2 &:= |h_{3,3}|, & M_3 &:= |h_{3,4}|, \\ M_4 &:= |(x_1 \circ x_2)^2|, & M_5 &:= |(x_1 \circ x_2) \circ (x_1 \circ x_3)|, & M_6 &:= |h_{2,4}|, \\ M_I &:= \bigcup_{i \in I} M_i \text{ für } I \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \end{aligned}$$

Es gilt:

(a) $M_1 \not\subseteq {}_pF_{Z_{p,3}}, M_2 \subseteq {}_pF_{Z_{p,3}}, M_2 \not\subseteq {}_pF_{Z_{p,4}}, M_I \subseteq {}_pF_{Z_{p,4}}$ für $I \subseteq \{3, 4, 5, 6\}$, $M_2 \subseteq {}_pF_{S_p}, M_6 \not\subseteq {}_pF_{S_p}$ (vgl. Beispiel 4).

(b) M_2 ist *-äquivalent zu $M_{\{2,3,4,5\}}$ für $p \neq 3$.

BEWEIS. Sei R ein ${}_pF$ zugeordneter Ring. Aus $f(x_1, x_2) := h_{3,3} \in {}_pF_R$ folgt

$$g(x_1, x_2, x_3) = f(x_1 + x_3, x_2) - f(x_1, x_2) - f(x_3, x_2) \in {}_pF_R,$$

also

$$3((x_1 \circ x_2) \circ x_3) = g(x_2, x_1, x_3) - g(x_1, x_2, x_3) \in {}_pF_R,$$

folglich $(x_1 \circ x_2) \circ x_3 \in {}_pF_R$, schließlich

$$M_3, M_5, M_4 = |(x_1 \circ x_1 x_2) \circ x_2 - x_1((x_1 \circ x_2) \circ x_2)| \subseteq {}_pF_R.$$

Mit Bemerkung 3 und (a)-(b) prüft man Vollständigkeit und paarweise *-Inäquivalenz der Repräsentanten. ${}_pF_2^*: M_1 \cdot {}_pF_3^*: M_1, M_2 \cdot {}_pF_4^*: M_1, M_2, M_{\{2,6\}}, M_I$ mit $I \subseteq \{3, 4, 5, 6\}$.

Zu ${}_pF_5^*, p \in (0, 1)$: Folgende paarweise *-inäquivalenten Repräsentanten garantieren schon unendlich viele Klassen:

$$|i(x_1 \circ x_2)h_{3,3} + h_{3,3}(x_1 \circ x_2)| \subseteq {}_{x_1, x_1, x_1, x_2, x_2}({}_pL_i), \quad i \in Z_0.$$

ZU BEISPIEL 2. Sei $b_1 := x_1, \dots, x_1, b_2 := x_1, \dots, x_n, b_3 := x_1, \dots, x_1, x_2 \in X_n$. Nach Voraussetzung gilt $g \in T(h_{i,n})$. Nach [2; Lemma 6.2.4, p. 156] besitzt g eine Folgeform aus ${}_pL_n$. Ohne Einschränkung sei deshalb $g \in T(h_{i,n}) \cap {}_pL_n$. Da $|h_{i,n}|$ minimaler b_i -induzierter Modul ist, ist $S_i := S(b_i(h_{i,n}))$ nach Satz 2 minimaler b_i -Modul. Nach Satz 1.(1)

und [6; Sätze 1,2, p. 565] sind $|h_{i,n}|$ und S_i äquivalent, also $T(h_{i,n}) = T(S_i)$. Nach Bemerkung 1 gilt $g \in T(h_{i,n}) \cap {}_p L_n = T(S_i) \cap {}_p L_n = S_i$, also $S(g) = S_i$. Folglich ist g äquivalent zu S_i , also $h_{i,n}$.

ZU BEISPIEL 4. Die linksseitige Implikation ist trivial. Rechtsseitige Implikation: Es gilt

$$(a) \quad (r \circ s) \circ t = 0 = (r \circ s)(r \circ t) \text{ für alle } r, s, t \in S_0.$$

Nach Bemerkung 3.(1) gibt es $1 < n \in Z_0$, $b \in X_n$ und $0 \neq f \in {}^b({}_0 L_n^*)$, so daß $f \in {}_0 F_R$ und $f \notin {}_0 F_{S_0}$. Indem man wie in Beispiel 6 vorgeht, erhält man wegen (a), daß ${}_a({}_0 L_n^*) \subseteq {}_0 F_{S_0}$ für ungerade n oder $a \neq x_1, x_2, \dots, x_n$. Also gilt $0 \neq f \in |h_{2,n}|$ mit geradem n , folglich $h_{2,n} \in {}_0 F_R$.

$h(x_1, \dots, x_n) \in {}_p F$ heißt *homogen*, wenn es $0 < j_i \in Z_0$ gibt, so daß in jedem h aufbauenden Unbestimmtenprodukt q die Unbestimmte x_i genau j_i -mal vorkommt, $1 \leq i \leq n$. Insbesondere ist dann $d(h) := d(q)$ wohl definiert. Jedes $f \in {}_p F$ besitzt eine eindeutige Darstellung

$$(C) \quad f = \sum_{i=1}^m h_i, \quad h_i \text{ homogen, } h_j + h_k \text{ nicht homogen für } 1 \leq i, j \neq k \leq m.$$

LEMMA 2. R ist $Z_{p,n}$ -Ring, $n > 2$ genau dann, wenn es $0 \neq g \in {}_p F_R$ gibt, so daß die Darstellung (C) von g wenigstens einen Summanden h mit $d(h) < n$ besitzt. Jeder $Z_{p,n}$ -Ring ist also $Z_{p,i}$ -Ring für alle $i > n$.

BEWEIS. Rechtsseitige Implikation. Sei $Y_{p,n} \subseteq Z_{p,n}$ Unterring der Matrizen $(a_{i,j})$ mit $a_{i,j} = 0$ für $1 \leq j < i \leq n$. Sei weiter $f(x_1, \dots, x_m) \in {}_p F_R$, $f \notin {}_p F_{Y_{p,n}}$. Wegen $Z_{p,n} = Z_p + Y_{p,n}$ gibt es $n_i \in Z_p$, $1 \leq i \leq m$, so daß aus f bei den Substitutionen $x_i \rightarrow n_i + x_i$ ein $g \in {}_p F_R$, $g \notin {}_p F_{Y_{p,n}}$ entsteht. Mit $(Y_{p,n})^n = 0$ folgt die Behauptung.

Linksseitige Implikation: Es reicht, die Annahme $g \in {}_p F_{Y_{p,n}} \supseteq {}_p F_{Z_{p,n}}$ zum Widerspruch zu führen: Aus g entsteht durch Streichung aller Unbestimmtenprodukte einer Dimension größer als $n-1$ wegen $(Y_{p,n})^n = 0$ ein Element $0 \neq h_1 \in {}_p F_{Y_{p,n}}$. Nach [2; Lemma 6.2.4, p. 156] gibt es $0 \neq h_2(x_1, \dots, x_k) \in {}_p F_{Y_{p,n}} \cap {}_p L_k$ mit $k < n$. Ohne Einschränkung komme evtl. nach Permutation der Unbestimmten der Summand $m_1 x_1 x_2 \dots x_k$, $0 \neq m_1 \in Z_p$ in h_2 vor. Für die Matrizen $E_j = (a_{i,j})$ mit $a_{i,i+1} = 1$, $a_{i,j} = 0$ sonst, $1 \leq l < n$ gilt dann $h_2(E_1, \dots, E_k) = m_1 E_1 \dots E_k \neq 0$ im Widerspruch zu $h_2 \in {}_p F_{Y_{p,n}}$.

LEMMA 3. Sei R ein ${}_p F$ zugeordneter Ring mit Zentrum $Z_R := (r \in R | r \circ R = 0)$. Eine Form $f(x_1, \dots, x_n) \in {}_p F$ heißt Z_R -Form genau dann, wenn es $0 \neq g(x_{n+1}) \in {}_p F$ gibt, so daß $g(s)f(r_1, \dots, r_n) = 0$ für

alle $s \in Z_R$ und $r_i \in R$, $1 \leq i \leq n$. Für $f \in {}_pF_R$ ist jeder Summand der Darstellung (C) von f eine Z_R -Form.

BEWEIS. Es reicht durch Induktion über m zu zeigen: Für homogene Formen $h_i(x_1, \dots, x_n) \in {}_pF$ und Formen $0 \neq g_i(x_{n+1}) \in {}_pF$ folgt aus $\sum_{i=1}^m g_i(s) h_i(r_1, \dots, r_n) = 0$ für alle $s \in Z_R$ und $r_j \in R$, $1 \leq j \leq n$, daß h_i eine Z_R -Form ist für $1 \leq i \leq m$. Für $m = 1$ ist die Aussage trivial. Sei $m > 1$ und die Behauptung für alle Summen mit weniger als m Summanden bewiesen. Es gibt wenigstens eine Unbestimmte x_{i_0} , die nicht in den aufbauenden Unbestimmtenprodukten aller h_i mit derselben Anzahl auftritt. x_{i_0} komme in den Unbestimmtenprodukten von h_i genau k_i -mal vor für $1 \leq i \leq m$. Sei $l := \text{Maximum}(k_1, \dots, k_m)$. Nach evtl. Umordnung der Summanden $g_i h_i$ ist $k_i < j$ für $1 \leq i \leq k$, $k_i = j$ für $k < i \leq m$. Für alle $s \in Z_R$, $r_j \in R$, $1 \leq j \leq n$ gilt: Aus

$$\sum_{i=1}^m s^j g_i(s) h_i(r_1, \dots, r_n) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^m s^{k_i} g_i(s) h_i(r_1, \dots, r_n) = \sum_{i=1}^m g_i(s) h_i(r_1, \dots, s r_{i_0}, \dots, r_n) = 0$$

folgt $\sum_{i=1}^k (s^j - s^{k_i}) g_i(s) h_i(r_1, \dots, r_n) = 0$. Wegen $k < m$ gibt es $0 \neq g(x_{n+1}) \in {}_pF$, so daß $g(s) h_i(r_1, \dots, r_n) = 0$ für $1 \leq i \leq k$, also $\sum_{i=k+1}^m g(s) \cdot g_i(s) h_i(r_1, \dots, r_n) = 0$. Wegen $m - k < m$ sind auch die Formen h_i , $k < i \leq m$ Z_R -Formen.

LEMMA 4. Ist R ein $Z_{p,n}$ -Ring, $n > 2$, so besitzt R eine Z_R -Form $f \in {}_pL_m^*$ mit $m < n$. Enthält Z_R einen unendlichen Unterring S , dessen Elemente allesamt Nichtnullteiler von R sind, so gilt $f \in {}_pF_R$.

BEWEIS. 1. *Behauptung.* Nach den Lemmata 2 und 3 gibt es eine homogene Z_R -Form $0 \neq g_0$ mit $d(g_0) < n$. Evtl. nach Umbenennung kommen in g_0 genau die Unbestimmten x_i , $1 \leq i \leq k \leq d(g_0)$ vor, wobei entweder $f_0 := g_0 \in {}_pL_k$ oder x_1 wenigstens 2-mal erscheint. Die Darstellung (C) der Z_R -Form $g_0(x_1 + x_{k+1}, x_2, \dots, x_k)$ besitzt nach dem Beweis von Lemma 3 einen Summanden $0 \neq g_1$, welcher Z_R -Form ist und in dem x_{k+1} genau 1-mal vorkommt. Dieses Verfahren liefert schließlich eine Z_R -Form $f_0 \in {}_pL_j$, mit $j < n$. Durch partielle Ableitung von f_0 erhält man nach evtl. Umbenennung der Unbestimmten $0 \neq f \in {}_pL_m^*$ mit $m < n$ oder $0 \neq j \in Z_p$. Im letzteren Falle setzt man

$f := j(x_1 \circ x_2)$. Da R ein Einselement besitzt, ist mit f_0 auch f eine Z_R -Form.

2. *Behauptung.* Es gibt $0 \neq g(x_{m+1}) \in {}_pF$, so daß $g(s)f(r_1, \dots, r_m) = 0$ für alle $s \in Z_R$ und $r_i \in R$, $1 \leq i \leq m$. Aus $f \notin {}_pF_R$ würde $g \in {}_pF_s$ folgen im Widerspruch dazu, daß S ein unendlicher Integritätsbereich ist.

LEMMA 5. Sei J_R das Jacobsonradikal von R . Für alle $r \in R$, $s \in J_R$ folgt aus $r = sr$ stets $r = 0$, da es bekanntlich $t \in J_R$ gibt, so daß $ts - s - t = 0$, also $r = t(sr - r) - (sr - r) = 0$.

LEMMA 6. Sei R ein $Z_{p,4}$ -Ring oder $h_{2,4} \notin {}_pF_R$ und R ein $Z_{p,5}$ -Ring. Z_R enthalte einen unendlichen Unterring S , dessen Elemente allesamt Nichtnullteiler von R sind. Dann ist R' nil. Insbesondere gilt I (1) mit $S := Z_0$.

BEWEIS. Nach Lemma 4 gibt es $0 \neq f \in {}_pF_R \cap {}_pL_m^*$ mit $m < 4$ bzw. $m < 5$. Nach Lemma 1 (1) gibt es $b \in X_m$, so daß $0 \neq {}^bS(f) \cap \cap {}^b({}_pL_m^*) \subseteq {}_pF_R$. Gemäß Beispiel 6 gilt mit den Notationen des Beweises zu Beispiel 1 für $m < 4$ bzw. $m < 5$ wegen $h_{2,4} \notin {}_pF_R$, daß ${}^bS(f) = M_i$ mit $1 \leq i \leq 2$ bzw. $1 \leq i \leq 5$. Aus $M_i \subseteq {}_pF_R$ mit $1 \leq i \leq 3$ folgt nach [3; Application 2, p. 271] daß R' nil ist. Für $M_4 \subseteq {}_pF_R$ bzw. $M_5 \subseteq {}_pF_R$ schließt man analog.

ZU I. (2): Da es zu jedem $r \in R'$ einen endlich erzeugten Unterring T von R mit denselben Voraussetzungen und $r \in T'$ gibt und nach [1] J_T nil ist, sei ohne Einschränkung R endlich erzeugt und $J_R = 0$. Nach [2; Theorem 2.2.1, p. 54] reicht es jetzt zu zeigen, daß jeder primitive Ring R kommutativ ist. Als $Z_{p,2}$ -Ring ist R nach [2; Theorem 6.3.1, p. 157] endlich dimensionale Divisionsalgebra über Z_R . Ist R endlich, so ist R nach [2; Theorem 3.1.1, p. 70] kommutativ. Anderenfalls ist Z_R unendlicher Körper. Mit Lemma 6 folgt für $S := Z_R$, daß R' nil, also R kommutativ ist.

LEMMA 7. Sei A Ideal von R und es gelte:

(*) Zu jedem Paar $r, s \in R$ gibt es eine Hauptform $f_{r,s}(x_1, x_2) \in {}_0F$, so daß die $f_{r,s}$ aufbauenden Unbestimmtenprodukte allesamt Dimensionen größer als 2 besitzen und $\text{ros} = f_{r,s}(r, s)$.

(1) Ist A hypernilpotent [7; p. 401], so gilt $A \circ A = 0$.

(2) Ist A hyperkommutativ [7; p. 401], so gilt $\{A \circ A\} \circ \{A \circ A\} = 0$. Hierbei sei $\{C\}$ das von $C \subseteq R$ erzeugte Ideal von R .

BEWEIS. Da die Hauptformen $f_{r,s}$ Darstellungen als Summen mit Summanden der Gestalt $q_x(x_1 \circ x_2)q_y$, $q_x, q_y \in Q \cup (1)$, $q_x q_y \in Q$ besitzen, gilt $J \circ J \subseteq J\{J \circ J\} + \{J \circ J\}J$, also

(a) $J \circ J \subseteq J^n\{J \circ J\} + \{J \circ J\}J^n$ für alle Ideale J von R und $1 \leq n \in \mathbb{Z}_0$:

Für alle $c, d \in J$, $r, s \in R$ gilt

$$cd(r \circ s) = cr \circ ds - (c \circ ds)r - (cr \circ d)s + (c \circ d)rs,$$

$$(r \circ s)cd = rc \circ sd - s(rc \circ d) - r(c \circ sd) + rs(c \circ d),$$

$$(c \circ r)d = c \circ rd - r(c \circ d), \quad c(d \circ r) = d \circ cr - (c \circ d)r \in \{J \circ J\},$$

also

(b) $J^2 R' + R' J^2 + \{J \circ R\}J + J\{J \circ R\} \subseteq \{J \circ J\}$ für alle Ideale J von R .

(1) Sei B maximales Element der Menge aller Ideale J von R mit $J \subseteq A$ und $J \circ J = 0$. Wir führen die Annahme $B \subsetneq A$ zum Widerspruch: Es gibt ein Ideal C von R mit $B \subsetneq C \subseteq A$ und $C^2 \subseteq B$. Mit

(a) und (b) folgt

$$\{C \circ C\} \subseteq C^4\{C \circ C\} + \{C \circ C\}C^4 \subseteq B^2 R' + R' B^2 \subseteq \{B \circ B\} = 0.$$

(2) Sei B maximales Element der Menge aller Ideale J von R mit $J \subseteq A$ und $\{J \circ J\} \circ \{J \circ J\} = 0$. Wir führen die Annahme $B \subsetneq A$ zum Widerspruch: Es gibt ein Ideal C von R mit $B \subsetneq C \subseteq A$ und $C \circ C \subseteq B$. Mit (b) und (1) folgt $\{C \circ C\}^3 \subseteq (\{C \circ C\}^2 R')^3 \subseteq (B^2 R')^3 \subseteq \{B \circ B\}^3 \subseteq \{B \circ B\}^2 R' = 0$, also $\{C \circ C\} \circ \{C \circ C\} = 0$ im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von B .

Zu (II): Berücksichtigt man im Beweis von Lemma 2, daß R starker $Z_{p,3}$ -Ring ist, so erhält man, daß es eine Hauptform $0 \neq g \in {}_p F_R$ gibt, so daß in der Darstellung (C) von g wenigstens ein Summand h mit $d(h) < 3$ vorkommt. Nach evtl. Umordnung der Unbestimmten gilt $h = m(x_1 \circ x_2)$, $0 \neq m \in Z_p$. Für $f_{r,s}(x_1, x_2) := x_1 \circ x_2 - m^{-1}g(x_1, x_2, 0, \dots, 0)$ gilt Lemma 7 (*). Nach [5; Theorem 4, p. 339], [4; Theorem 5.5, p. 349] und Lemma 7 ist R' ein L -Ring, also das von $R' \circ R'$ erzeugte Ideal von R' kommutativ, folglich R' nilpotent, schließlich $R' \circ R' = 0$.

LEMMA 8. Erfüllt ein Ring R die schwache Minimalbedingung für Linksideale, so ist J_R hyper- J_R -annullierendes Ideal von R .

BEWEIS analog [10; Lemma 1, p. 350]. Anstelle der Nilpotenz der Elemente verwendet man Lemma 5.

ZU (III). Nach Lemma 1 ist R ein $Z_{p,4}$ -Ring, also nach I.(2) R' nil schließlich nach (II) $R' \circ R' = 0$.

LEMMA 9. Ist R hyperkommutativ und gilt Lemma 7 (*) mit der Zusatzbedingung, daß in jedem Unbestimmtenprodukt x_1 wenigstens 2-mal, x_2 wenigstens 1-mal vorkommt, so ist R kommutativ.

BEWEIS. Ohne Einschränkung sei R endlich erzeugt und nach [2; Lemma 2.2.2, p. 52] subdirekt irreduzibel, besitze also ein kleinstes Ideal $D \neq 0$. Nach Lemma 7 ist $R' \circ R' = 0$, also nach Lemma 7.(b) $a \circ r = f_{a,r}(a, r) \in R' \{R' \circ R\} + \{R' \circ R\} R' = 0$ für alle $a \in R'$, $r \in R$, folglich $R' \circ R = 0$, schließlich $(R')^2 = 0$. Für $E := (r|r \in R, rD = 0)$ gilt $E \circ R = 0$, da aus $e \circ s \neq 0$, $e \in E$, $s \in R$ wegen $(E \circ R) \circ R = 0$ folgen würde, daß $e \circ s = f_{e,s}(e, s) = t(e \circ s)$ mit $t \in E$, also $d = td$ für alle $d \in D \subseteq \{e \circ s\}$ im Widerspruch zu $ED = 0$. Wir nehmen $E \neq R$ und $D \subseteq R' \neq 0$ an, da anderenfalls nichts zu zeigen ist. Wegen $R'D = 0$ ist $R' \subseteq E$, also R/E kommutativ.

R/E ist ein Körper: Zu $r, s \in R$, $r, s \notin E$ gibt es $d \in D$, so daß $rd \neq 0$. Wegen $D \circ R = 0$, $RD \neq 0$ und der Minimaleigenschaft von D gilt $D = RD = R\{rd\} = Rrd$, also $trd = d$ mit $t \in R$, folglich $(str - s)d = 0$, demnach $(str - s)D = 0$, schließlich $(st)r \equiv s$ modulo E .

Bekanntlich ist R/E endlich, da R/E ein als Ring endlich erzeugter Körper ist. Gemäß [2; p. 86] folgt hieraus wegen $E \circ R = 0$, daß $R' = 0$.

LEMMA 10. Besitzt jedes epimorphe Bild $S \neq 0$ von R ein nils Element $a \neq 0$ oder ein kommutatives Ideal $J \neq 0$ und gilt Lemma 7.(*) mit der Zusatzbedingung, daß in jedem Unbestimmtenprodukt x_1 wenigstens 2-mal und x_2 genau 1-mal vorkommt, so ist R kommutativ.

BEWEIS. Nach Lemma 9 reicht es zu zeigen, daß R hyperkommutativ ist. Sei $S \neq 0$ epimorphes Bild von R . Besitzt S ein kommutatives Ideal $J \neq 0$, so ist nichts zu zeigen. Anderenfalls gibt es $0 \neq a \in S$ mit $a^2 = 0$, also $a \circ s = f_{a,s}(a, s) \in |asa| = |(a \circ s)a|$ für alle $s \in S$, folglich $a \circ S = 0$, schließlich $\{a\}^2 = 0$.

ZU (IV). Geht man vor wie beim Beweis von (II), so erhält man eine Form $f_{r,s}(x_1, x_2) = g$, welche die 2. Voraussetzung von Lemma 10

erfüllt. Da der einfache nichtkommutative Ring $Z_{p,2}$ die 1. Voraussetzung von Lemma 10 erfüllt, ist $g - x_1 \circ x_2 \notin {}_pF_{Z_{p,2}}$, also R ein $Z_{p,2}$ -Ring. Nach Lemma 2 ist R ein $Z_{p,4}$ -Ring, also nach I.(2) R' nil, Schließlich nach Lemma 10 R kommutativ.

BEMERKUNG 4. Sei $p > 1$, R endlich erzeugter starker $Z_{p,3}$ -Ring endlicher Klasse (es gibt eine Folge J_i , $0 \leq i \leq n$ von Idealen von R , so daß $J_0 = R$, $J_n = 0$, $J_{i+1} \subseteq J_i$, $J_i \circ R \subseteq J_{i+1}$, $0 \leq i < n$) und ${}_R Z$ das größte Ideal A von R mit $A \subseteq Z_R$. Dann ist $S := R/{}_R Z$ endlich.

BEWEIS. Man zeigt durch vollständige Induktion

$$(a) \ r^{p^n} \circ R = 0 \text{ für alle } r \in R.$$

Geht man vor wie beim Beweis von (II), so erhält man eine Hauptform $0 \neq g_0 \in {}_pF_R$, deren Darstellung (C) den Summanden $x_1 \circ x_2$ besitzt.

Nach Lemma 3 gibt es $0 \neq g(x_3) \in {}_pF$, so daß $g(s)(R \circ R) = 0$ für alle $s \in Z_R$, also wegen (a) $g(r^{p^n})(R \circ R) = 0$, $g(r^{p^n}) \circ R = 0$ für alle $r \in R$, folglich $g(r^{p^n}) \in {}_R Z$ für alle $r \in R$. Da S/S' endlich erzeugt ist und die Charakteristik p besitzt, ist S/S' endlich, also nach [10; III] S endlich.

LITERATUR

- [1] S. A. AMITSUR, *A generalization of Hilbert's Nullstellensatz*, Proc. Amer. Math. Soc., **8** (1957), pp. 649-656.
- [2] I. N. HERSTEIN, *Noncommutative Rings*, The Mathematical Association of America (1973).
- [3] I. N. HERSTEIN, *A remark on rings and algebras*, Michigan Math. J., **10** (1963), pp. 269-272.
- [4] S. A. JENNINGS, *Central chains of ideals in an assoziative ring*, Duke Math. J., **9** (1942), pp. 341-355.
- [5] J. LEVITZKI, *A theorem on polynomial identities*, Proc. Amer. Math. Soc., **1** (1950), pp. 334-341.
- [6] W. SPECHT, *Gesetze in Ringen I*, Mathematische Zeitschrift, Band 52, Heft 5 (1949), pp. 557-589.
- [7] W. STREB, *Über schwach hyperzentrale Ringe*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **44** (1970), pp. 399-409.

- [8] W. STREB, *Über Algebren mit nilpotenten assoziierten Lie-Ringen*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **46** (1971), pp. 137-139.
- [9] W. STREB, *Über Ringe mit auflösbaren assoziierten Lie-Ringen*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **50** (1973), pp. 127-142.
- [10] W. STREB, *Endlichkeitssätze über Ringe*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **52** (1974), pp. 185-192.

Manoscritto pervenuto in Redazione il 10 novembre 1975.