RENATO ZANOVELLO

Sul calcolo numerico delle funzioni cilindriche incomplete

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 56 (1976), p. 235-243

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__56__235_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 56 (1977)

Sul calcolo numerico delle funzioni cilindriche incomplete.

RENATO ZANOVELLO (*)

SUNTO - In questo lavoro, si studia il problema del calcolo numerico delle funzioni cilindriche incomplete nella forma di Poisson, $E_\nu^\pm(w, z)$, per ν e w reali e z complesso. Tra l'altro, si pone in evidenza una formula atta allo scopo suddetto per $|z|$ elevato. Come applicazione, viene riportata infine una nuova tabella di risultati.

Le soluzioni di alcuni importanti problemi della fisica e dell'ingegneria sono legate alle funzioni cilindriche incomplete, che dipendono in generale da tre parametri e che sono ampiamente trattate da M. M. Agrest-M. S. Maksimov [1]; M.M. Agrest [2], soffermandosi soprattutto sulle funzioni cilindriche incomplete di ordine zero ed uno, cita l'esistenza di tavole ad esse relative. Inoltre, per valori particolari delle variabili, è possibile calcolare le funzioni cilindriche incomplete, magari ricorrendo ad altre ben note funzioni speciali.

Lo scopo del presente lavoro è quello di trattare in generale il problema del calcolo numerico delle funzioni cilindriche incomplete, nella forma di Poisson, che indicherò con la classica notazione $E_\nu^\pm(w, z)$,

---

(*) Indirizzo dell'A.: Centro di Calcolo Scientifico dell'Università - Via Belzoni, 7 - Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

definite dalla relazione

$$(1)\qquad E_\nu^\pm(w,z)=\frac{2(z/2)^\nu}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^w \exp\left[\pm iz\cos t\right]\sin^{2\nu}t\,dt\,,$$

ove i parametri ν, w sono considerati reali mentre z è complesso (in particolare reale, come spesso avviene in pratica) ed ove il dominio di variabilità degli stessi parametri è quello fondamentale, cioè: $\nu>-\frac{1}{2}$, $0\leqslant w\leqslant\pi$, $-\pi\leqslant\arg z\leqslant\pi$. Alla fine, riporto una nuova tabella di risultati.

Faccio inoltre notare, fin d'ora, che gli sviluppi asintotici riportati in [1] sono validi quando le due variabili w e z sono legate da una certa condizione, mentre spesso è necessario poter disporre di sviluppi asintotici rispetto ad una sola variabile per valori qualsivoglia dell'altra, come sottolinea Yu. V. Vaisleib [3], il quale ovvia a tale inconveniente, sempre limitatamente ai casi $\nu=0,1$, ottenendo però formule che mal si prestano ai fini numerici. Senza contare che per altri valori di ν, il ricorrere alle formule di ricorrenza in avanti, com'è suggerito in [1, p. 55] e in [3, p. 273], può causare una rapida perdita di cifre significative per un forte accumulo di errori di arrotondamento.

In questo lavoro, mi limito a considerare il caso $0\leqslant w\leqslant\pi/2$, poichè se $\pi/2<w\leqslant\pi$, posso ricondurmi [1, p. 35] all'intervallo in esame, essendo:

$$(2)\qquad E_\nu^\pm(w,z)=2J_\nu(z)-E_\nu^\mp(\pi-w,z)\,,$$

ove $J_\nu(z)$ è la nota funzione di Bessel di prima specie.

Osservo infine che dalla definizione ricavo:

$$E_\nu^\pm(w,z)=J_\nu(w,z)\pm iH_\nu(w,z)\,,$$

ove:

$$\begin{cases} J_\nu(w,z)=\dfrac{2(z/2)^\nu}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\displaystyle\int_0^w \cos(z\cos t)\sin^{2\nu}t\,dt \\[2ex] H_\nu(w,z)=\dfrac{2(z/2)^\nu}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\displaystyle\int_0^w \sin(z\cos t)\sin^{2\nu}t\,dt\,, \end{cases}$$

le quali ultime, per $w = \pi/2$, si riducono rispettivamente alla funzione di Bessel di prima specie $J_\nu(z)$ e alla funzione di Struve $H_\nu(z)$.

§ **1.** – Innanzitutto esamino per $\nu \geqslant 0$, il classico sviluppo in serie:

$$E_\nu^\pm(w, z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \sum_0^\infty {}_m\, C_{m,\nu}(w) \frac{(\pm iz)^m}{m!}, \tag{3}$$

ove i coefficienti $C_{m,\nu}(w)$ sono definiti dalla:

$$C_{m,\nu}(w) = 2\int_0^w \cos^m t \sin^{2\nu} t\, dt . \tag{4}$$

Dalla (4) si ottengono, com'è noto [1, p. 59], espressioni utili al calcolo numerico dei suddetti coefficienti, fra le quali cito la:

$$C_{m,\nu}(w) = B\left(\frac{m+1}{2}, \nu + \frac{1}{2}\right) - \cos^{m+1} w \cdot B\left(\frac{m+1}{2}, 1\right) \cdot$$
$$\cdot F\left(-\nu + \frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}; \frac{m+3}{2}; \cos^2 w\right),$$

che esprime il generico coefficiente $C_{m,\nu}(w)$, detto funzione beta incompleta, tramite la funzione beta B e la funzione ipergeometrica F.

Per valutare poi l'errore R_n, che viene commesso nel calcolo della (3) troncata dopo n termini, osservo innanzitutto che dalla (4) ricavo, nelle mie ipotesi:

$$|C_{m,\nu}(w)| \leqslant \pi . \tag{5}$$

Tenendo conto della (5), ricavo allora:

$$|R_n| \leqslant \frac{\pi^{\frac{1}{2}}|(z/2)^\nu|}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \sum_n^\infty {}_m \frac{|z|^m}{m!}; \tag{6}$$

d'altronde la serie a secondo membro in (6) è:

$$\frac{|z|^n}{n!}\left[1 + \frac{|z|}{n+1} + \frac{|z|^2}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right],$$

ove la serie tra parentesi è una minorante della serie geometrica di ragione $|z|/n$, convergente per $n > |z|$, a $n/(n-|z|)$. Con ciò, dalla (6) ottengo per $n > |z|$:

$$|R_n| \leqslant \frac{\pi^{\frac{1}{2}}|(z/2)^\nu|}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \cdot \frac{|z|^n}{(n-1)!(n-|z|)}, \tag{7}$$

la quale implica che per n sufficientemente grande, l'errore puô essere reso arbitrariamente piccolo.

§ **2.** – Per $|z|$ relativamente basso, la (3) ben si presta al calcolo numerico delle funzioni cilindriche incomplete; qualora tale condizione non sia verificata, potrei servirmi, per ν fissato, dei noti sviluppi asintotici, validi per $|z \sin w| \gg 1$, [1, p. 66 e segg.], oppure ricorrere allo sviluppo asintotico di una funzione legata alla funzione cilindrica incompleta da una nota relazione [4].

Però, per quanto attiene agli sviluppi trattati in [1], si presenta un altro grave inconveniente, oltre a quello già citato all'inizio e denunciato anche da Vaisleib, autore che peraltro non risolve il problema generale dal punto di vista numerico: è il fatto che l'applicazione diretta di tali sviluppi asintotici (ove possibile) fornisce risultati poco precisi, come del resto han confermato le prove effettuate. Pertanto tali formule sono sconsigliabili per lo scopo prefisso.

Per quanto concerne poi lo sviluppo asintotico dato da [4], faccio presente che esso contiene gravi limitazioni rispetto ai parametri e che inoltre, in generale, è complicato dal punto di vista numerico.

Ciò premesso, posso allora procedere nel modo seguente: esprimo innanzitutto la (1), per $\nu > \frac{1}{2}$, mediante l'espressione:

$$E_\nu^\pm(w,z) = \tag{8}$$
$$= J_\nu(z) \pm iH_\nu(z) - \frac{2(z/2)^\nu}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^{\cos w} \exp[\pm izt](1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt\,.$$

Escludendo i casi speciali, sui quali mi soffermerò nel prossimo paragrafo, che si ottengono qualora w o z siano nulli, sostituisco quindi la funzione $(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$ che figura nell'integrale di (8) mediante il suo classico sviluppo in serie binomiale, ottenendo per detto integrale:

$$(9)\qquad \int_0^{\cos w}\exp[\pm izt](1-t^2)^{\nu-\frac12}dt=\sum_0^\infty{}_k(-1)^k\binom{\nu-\frac12}{k}\int_0^{\cos w}\exp[\pm izt]\,t^{2k}\,dt\,,$$

essendo lecita l'integrazione per serie. Ricorrendo poi alla classica funzione gamma incompleta [5], la (9) diventa:

$$\int_0^{\cos w}\exp[\pm izt](1-t^2)^{\nu-\frac12}\,dt=\mp\sum_0^\infty{}_k(-1)^k\binom{\nu-\frac12}{k}\frac{\gamma(2k+1,\mp iz\cos w)}{(iz)^{2k+1}}\,,$$

per mezzo della quale, dalla (8) ricavo:

$$(10)\quad E_\nu^\pm(w,z)=$$
$$=J_\nu(z)\pm i\boldsymbol{H}_\nu(z)\pm\frac{2(z/2)^\nu}{\Gamma(\frac12)\Gamma(\nu+\frac12)}\sum_0^\infty{}_k(-1)^k\binom{\nu-\frac12}{k}\frac{\gamma(2k+1,\mp iz\cos w)}{(iz)^{2k+1}}\,.$$

Dalla (10), semplificando, ottengo in definitiva:

$$(11)\quad E_\nu^\pm(w,z)=J_\nu(z)\pm i\boldsymbol{H}_\nu(z)\pm$$
$$\pm\frac{2(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}}\sum_0^\infty{}_k\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+\frac12-k)}\cdot\frac{\gamma(2k+1,\mp iz\cos w)}{(iz)^{2k+1}}\,.$$

La (11) permette di calcolare la $E_\nu^\pm(w,z)$ per valori elevati di $|z|$, pur di servirsi delle formule opportune per $J_\nu(z)$ [6], $\boldsymbol{H}_\nu(z)$ [7], $\gamma(\alpha,z)$ [5].

§ **3.** – Talvolta può essere utile o addirittura necessario, servirsi per $\nu>\frac12$ della seguente rappresentazione integrale:

$$E_\nu^\pm(w,z)=\frac{2(z/2)^\nu}{\Gamma(\frac12)\Gamma(\nu+\frac12)}\int_{\cos w}^1(1-t^2)^{\nu-\frac12}\exp[\pm izt]\,dt\,,$$

dalla quale ricavo, posto $z=a+ib$:

$$(12)\qquad E_\nu^\pm(w,z)=\frac{2(z/2)^\nu}{\Gamma(\frac12)\Gamma(\nu+\frac12)}\cdot$$
$$\cdot\left\{\int_{\cos w}^1(1-t^2)^{\nu-\frac12}\exp[\mp bt]\cos(at)\,dt\pm i\int_{\cos w}^1(1-t^2)^{\nu-\frac12}\exp[\mp bt]\sin(at)\,dt\right\}.$$

Calcolo quindi gli integrali a secondo membro nella (12) con buona precisione, ricorrendo ad una formula di quadratura gaussiana di ordine n, tenendo presente un noto teorema di Stieltjes [8] che assicura la convergenza del procedimento stesso in intervalli finiti. Se a è elevato, può convenire, ai fini pratici, l'uso di una formula opportuna per il caso di funzioni integrande fortemente oscillanti [9].

A complemento di quanto detto, posso aggiungere alcune osservazioni:

a) Valori particolari dei parametri: dalla (1) segue per z non nullo: $E_\nu^\pm(0, z) = 0$; tenendo allora conto di ciò, dalla (2) ottengo $E_\nu^\pm(\pi, z) = 2J_\nu(z)$. Sempre dalla (1) ricavo: $E_0^\pm(w, 0) = (2/\pi)w$, mentre per $\nu > 0$, ho: $E_\nu^\pm(w, 0) = 0$.

b) per i casi riguardanti valori negativi o comunque piccoli di ν, che non siano stati contemplati in precedenza, posso provvedere mediante la formula di ricorrenza all'indietro:

$$E_{\nu-1}^\pm(w, z) + E_{\nu+1}^\pm(w, z) - \frac{2\nu}{z} E_\nu^\pm(w, z) = 2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sin^{2\nu-1} w \cdot \tag{13}$$

$$\cdot \frac{\exp[\pm iz\cos w]}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\cos w}{z\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \pm i \frac{\operatorname{sen}^2 w}{2\Gamma(\nu+\frac{3}{2})}\right).$$

§ **4.** – In questo paragrafo riporto, a mo' d'esempio, una nuova tabella di valori significativi, arrotondati secondo la prassi usuale; detti valori sono stati ricavati con molteplicità di precisione dipendente dalla terna in esame, con il calcolatore elettronico CDC 6600, mediante l'applicazione delle formule contenute nel presente lavoro (1). È forse superfluo sottolineare che, per i valori di z reali sotto elencati, $E_\nu^-(w, z)$ coincide con il coniugato di $E_\nu^+(w, z)$.

(1) Ringrazio le dott.sse G. Cimador e A. Passone per la collaborazione prestata ai fini della codificazione e messa a punto dei programmi.

z	$E_2^+(w, z)$		$E_3^+(w, z)$		$E_4^+(w, z)$	
			$w = 0{,}1$			
2	— 0,0000007	0,0000015	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
4	— 0,0000045	— 0,0000051	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
6	0,0000145	— 0,0000046	0,0000001	0,0000000	0,0000000	0,0000000
8	— 0,0000032	0,0000268	0,0000000	0,0000003	0,0000000	0,0000000
10	— 0,0000362	— 0,0000217	— 0,0000005	— 0,0000003	0,0000000	0,0000000
			$w = 0{,}3$			
2	— 0,0001412	0,0003690	— 0,0000035	0,0000093	— 0,0000001	0,0000002
4	— 0,0011760	— 0,0010547	— 0,0000595	— 0,0000521	— 0,0000023	— 0,0000020
6	0,0031593	— 0,0016216	0,0002352	— 0,0001258	0,0000136	— 0,0000075
8	0,0006840	0,0062679	0,0000827	0,0006263	0,0000071	0,0000486
10	— 0,0095131	— 0,0024979	— 0,0012003	— 0,0002792	— 0,0001173	— 0,0000251
			$w = 0{,}5$			
2	— 0,0011879	0,0045501	— 0,0000741	0,0003026	— 0,0000037	0,0000156
4	— 0,0163431	— 0,0091554	— 0,0022046	— 0,0011476	— 0,0002290	— 0,0001135
6	0,0290101	— 0,0301758	0,0055025	— 0,0062775	0,0008208	— 0,0009940
8	0,0385434	0,0628176	0,0112841	0,0160916	0,0024559	0,0032255
10	— 0,1087849	0,0331769	— 0,0354466	0,0138444	— 0,0089750	0,0040208
			$w = 0{,}7$			
2	— 0,0021820	0,0223614	— 0,0001850	0,0027092	— 0,0000125	0,0002533
4	— 0,0868311	— 0,0170426	— 0,0212892	— 0,0029081	— 0,0040050	— 0,0003950
6	0,0552657	— 0,1859702	0,0142996	— 0,0697540	0,0029315	— 0,0198841
8	0,3086624	0,1238622	0,1587007	0,0433896	0,0611730	0,0119657
10	— 0,2250734	0,4418190	— 0,1005330	0,2942946	— 0,0350518	0,1443479
			$w = 0{,}9$			
2	0,0067387	0,0668241	0,0017781	0,0120696	0,0002984	0,0016770
4	— 0,2525141	0,0522494	— 0,0906763	0,0275483	— 0,0250018	0,0092410
6	— 0,1672741	— 0,5151651	— 0,1320901	— 0,2744407	— 0,0663934	— 0,1118525
8	0,7927175	— 0,3677230	0,5527956	— 0,3863250	0,2929559	— 0,2585021
10	0,6501633	1,0134149	0,8513501	0,8567489	0,7105248	0,5432239

z	$E^{+}_{2}(w, z)$		$E^{+}_{3}(w, z)$		$E^{+}_{4}(w, z)$	
			$w = 1{,}1$			
2	0,0478856	0,1410320	0,0136841	0,0331937	0,0027708	0,0059948
4	− 0,4297686	0,3361576	− 0,1897279	0,1912565	− 0,0647439	0,0769944
6	− 0,9019087	− 0,5530190	− 0,7628706	− 0,2935590	− 0,4551884	− 0,1156144
8	0,2361705	− 1,5037448	− 0,1211258	− 1,6678234	− 0,2902014	− 1,2962766
10	1,7308488	− 0,5404563	2,3169327	− 1,4230242	2,1346602	− 1,8540434
			$w = 1{,}3$			
2	0,1438105	0,2241340	0,0471934	0,0619467	0,0111478	0,0131150
4	− 0,3586067	0,8300225	− 0,1369286	0,5344527	− 0,0368371	0,2476773
6	− 1,4908270	0,3648007	− 1,3638351	0,6735555	− 0,8939516	0,6134982
8	− 1,5480189	− 0,9770436	− 2,5910448	− 0,8857009	− 2,7369943	− 0,4690810
10	− 0,7769873	− 1,6776937	− 2,0992776	− 3,2937124	− 3,4280952	− 4,0501045
			$w = 1{,}5$			
2	0,2931397	0,2760937	0,1051052	0,0819521	0,0271961	0,0186189
4	0,1277317	1,2150490	0,2413658	0,8311757	0,1734175	0,4110787
6	− 0,7659084	1,5046417	− 0,5118547	1,9931185	− 0,1785929	1,7050819
8	− 1,0210531	1,2540260	− 1,7417185	2,5661516	− 1,7605360	3,3470657
10	− 1,1211639	1,6744284	− 2,6889499	3,2129533	− 4,1382919	4,9741550

ν	w	z	$E^{+}_{\nu}(w, z)$	
0,8	0,1	10	− 0,0037536	− 0,0022858
6	0,8	20	− 2,3462063	3,4194887
11	1,5	30	− 23316,0093041	− 12718,5209212

ν	w	z			
2	0,4	(1; 4)	− 0,0001415	− 0,0000688	$E^{+}_{\nu}(w, z)$
			− 0,0405189	0,2964517	$E^{-}_{\nu}(w, z)$

BIBLIOGRAFIA

[1] M. M. Agrest - M. S. Maksimov, *Theory of incomplete cylindrical functions and their applications*, Springer-Verlag, 1971.

[2] M. M. Agrest, *Evaluation of incomplete cylindrical functions*, Zh. vych. Mat. mat. Fiz., **10**, 2 (1970), pp. 313-325.

[3] Yu. V. Vaisleib, *Asymptotic representations of incomplete cylinder functions*, Zh. vych. Mat. mat. Fiz., **11**, 3 (1971), pp. 758-761.

[4] W. H. Steel - J. Y. Ward, *Incomplete Bessel and Struve functions*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **52** (1956), pp. 431-441.

[5] V. ad es., L. Gatteschi, *Funzioni speciali*, UTET, Torino, 1973.

[6] V. ad es., M. Abramowitz - I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover, New York, 1965.

[7] R. Zanovello, *Sul calcolo numerico della funzione di Struve* $H_\nu(z)$, Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. Torino, **32** (1973-74), pp. 251-269.

[8] V. ad es., I. P. Natanson, *Constructive function theory*, vol. III (*Interpolation and approximation quadratures*), Ungar Publ. Co., New York, 1965, p. 105.

[9] L. N. G. Filon, *On a quadrature for trigonometric integrals*, Roy. Soc. Edinburgh Proc., **49** (1928-29), pp. 38-47.
Y. L. Luke, *On the computation of oscillatory integrals*, Cambridge Phil. Soc. Proc., **50** (1954), pp. 269-277.
N. Imada, *On a numerical calculation of the finite Fourier integrals with the high frequency*, Inf. Processing in Japan, **11** (1971), pp. 50-55.

Manoscritto pervenuto in Redazione il 17 Luglio 1976.