

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

DIEGO PIGOZZI

Sulla struttura analitica dell'energia libera e sulle equazioni costitutive nel caso di trasformazioni reversibili per un continuo di Cosserat

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 56 (1976), p. 227-234

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__56__227_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**Sulla struttura analitica dell'energia libera
e sulle equazioni costitutive nel caso di trasformazioni
reversibili per un continuo di Cosserat.**

DIEGO PIGOZZI (*)

1. Introduzione.

Riesce sotto molti aspetti conveniente analizzare come intervengono nelle equazioni costitutive e in quelle indefinite di un continuo di Cosserat con deformazioni finite, la rotazione locale relativa al campo di spostamenti e quella accessoria libera con la quale si realizza una rotazione globale libera dell'elemento. Tale scopo è stato raggiunto in [1] supponendo ivi decomposta la rotazione globale \mathcal{R} nel prodotto della rotazione locale η e di una ausiliaria ϱ' , eseguito nell'ordine $\mathcal{R} = \eta\varrho'$.

In tal caso tuttavia si trova che nelle equazioni generali interviene esplicitamente la deformazione pura e ciò — se da un lato illustra certi aspetti del problema — rappresenta dall'altro un grosso inconveniente in quanto essa non è esplicitamente esprimibile mediante le componenti degli spostamenti.

In questo lavoro si dimostra come si può ovviare a tale inconveniente supponendo invece la decomposizione in prodotto del tipo $\mathcal{R} = \varrho\eta$. Infatti in tal caso si trova che al posto della deformazione pura interviene direttamente lo strain.

In conseguenza si stabilisce la struttura analitica dell'energia

(*) Indirizzo dell'A: Seminario Matematico, - Via Belzoni, 7 - 35100 Padova.
Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

libera e le equazioni costitutive della parte reversibile dello stress (cioè le equazioni costitutive complete nel caso di trasformazioni reversibili).

2. Premesse.

È noto che un continuo di Cosserat si può pensare come un insieme continuo di punti a ciascuno dei quali viene associato un triedro rigido. Una variazione della configurazione del continuo è caratterizzata dal campo degli spostamenti che competono a ciascun punto, e dal campo delle rotazioni che competono a ciascun triedro. Nel caso qui considerato di un continuo di Cosserat con rotazioni libere, la rotazione globale di un triedro si può pensare espressa dal prodotto della rotazione locale η subordinata dal campo degli spostamenti, per una rotazione ausiliaria ϱ . Fissato il campo degli spostamenti u e delle rotazioni globali \mathcal{R} la relazione

$$(1) \quad \mathcal{R} = \varrho \eta$$

precisa il significato di ϱ ⁽¹⁾.

Le matrici di rotazione col significato sopra precisato siano relative al passaggio del continuo dalla configurazione di riferimento C^* a quella attuale C ; detta C' una configurazione vicinissima a C siano invece R^δ , ϱ^δ , η^δ , le rotazioni che caratterizzano la trasformazione infinitesima del continuo da C a C' .

Tenuto conto di (1) sussiste la

$$(2) \quad \mathcal{R}^\delta = \varrho^\delta \varrho \eta^\delta \bar{\varrho}$$

ove con $\bar{\varrho}$ s'intende la matrice coniugata di ϱ e coincide con ϱ^{-1} in quanto si tratta di matrice di rotazione.

Dalle relazioni

$$(3) \quad \mathcal{R}^\delta = I + \delta \mathcal{R} \bar{\mathcal{R}}, \quad \varrho^\delta = I + \delta \varrho \bar{\varrho}, \quad \eta^\delta = I + \delta \eta \bar{\eta}$$

e dalla (2), trascurando i termini infinitesimi a partire dal secondo

⁽¹⁾ Vedi introduzione.

ordine si ricava

$$(4) \quad \delta \overline{\mathcal{R}\mathcal{R}} = \varrho \delta \eta \bar{\eta} \bar{\varrho} + \delta \varrho \bar{\varrho}$$

Poichè le rotazioni \mathcal{R}^δ e η^δ sono infinitesime è noto che è possibile rappresentarle tramite due vettori infinitesimi $\delta\omega^{\mathcal{R}}$, $\delta\omega^\eta$ nella seguente maniera:

$$(5) \quad R^\delta = I + \delta\omega^{\mathcal{R}} \times, \quad \eta^\delta = I + \delta\omega^\eta \times.$$

Tenuto conto di (3), (5) la (4) diventa:

$$(6) \quad \delta\omega^{\mathcal{R}} \times = \varrho(\delta\omega^\eta \times) \bar{\varrho} + \delta\varrho \bar{\varrho}$$

e ricordando l'espressione del vettore rotazione locale infinitesima:

$$(7) \quad (\delta\omega^\eta)_s = \frac{1}{2} \varepsilon_{rst} (\delta u_r)_{,t}$$

dalla (6) si ottiene

$$(8) \quad (\delta\omega^{\mathcal{R}})_r = \frac{1}{2} \varepsilon_{irs} \varrho_{,st} \delta\varrho_{,it} + \frac{1}{2} \varepsilon_{its} \varrho_{,rt} (\delta u_i)_{,s}.$$

Dove ε_{ijk} è l'indicatore di Ricci, x_i sono le coordinate del generico punto P nella configurazione attuale rispetto ad una terna trirettangola di riferimento T e la sbarretta indica derivazione rispetto alle x_i . Analogamente con y_i si denoteranno le coordinate, sempre rispetto a T , del corrispondente di P in C^* , e la virgola indicherà derivazione rispetto alle y_i .

Nel seguito indicherò con a , D , A_r , rispettivamente la matrice $(x_{r,s})$, il suo determinante ed il complemento algebrico di $x_{r,s}$ in a .

3. Espressione del lavoro delle forze interne.

Nella trasformazione infinitesima da C a C' , le forze interne di contatto danno come è noto, una densità di lavoro che, nella forma euleriana, è espressa da

$$(9) \quad \delta l^{(i)} = X_{rs} (\delta u_r)_{,s} + \psi_{rs} (\delta\omega_r^{\mathcal{R}})_{,s} + \varepsilon_{rim} X_{im} \delta\omega_r^{\mathcal{R}}$$

Le matrici (X_{rs}) e (ψ_{rs}) rappresentano rispettivamente gli sforzi e le coppie interne di contatto nello stato attuale C .

Utilizzando per la rappresentazione degli sforzi la matrice di Piola-Kirchoff Y e una analoga λ per le coppie di contatto, definite da

$$(10) \quad X_{rs} = \frac{1}{D} Y_{im} x_{r,i} x_{s,m}; \quad \psi_{rs} = \frac{1}{D} \lambda_{ri} x_{s,i}$$

e ricordando la relazione

$$(11) \quad f_{/s} = f_{,s} \frac{A_{,sn}}{D}$$

è possibile esprimere in forma lagrangiana, come conviene, il lavoro delle forze interne.

Da (9) tenuto conto di (8), (10), (11) si giunge con qualche sviluppo alla

$$(12) \quad \delta^* J^{(t)} = \left(Y_{in} x_{r,i} + \frac{1}{2} \varepsilon_{rli} \lambda_{im} \varrho_{il,m} \frac{A_{,sn}}{D} + \frac{1}{2} \lambda_{im} \varrho_{il} B_{imrn} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \varepsilon_{iap} \varepsilon_{rls} Y_{im} \varrho_{il} x_{a,i} x_{p,m} \frac{A_{,sn}}{D} \right) \delta u_{r,n} + \\ + \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{rip} \lambda_{rn} \varrho_{il,n} + \frac{1}{2} \varepsilon_{raq} \varepsilon_{rip} \varrho_{it} Y_{im} x_{a,i} x_{s,m} \right) \delta \varrho_{pt} + \\ + \frac{1}{2} \lambda_{rn} \varepsilon_{rip} \varrho_{lit} \delta \varrho_{pt,n} + \frac{1}{2} \lambda_{rm} \varrho_{ri} \delta \mu_{im}$$

espressione lagrangiana della densità di lavoro delle forze interne di contatto. Le B_{imrn} , μ_{ri} sono definite dalle relazioni

$$(13) \quad \mu_{ri} = \frac{1}{2D} \varepsilon_{rim} A_{ip} u_{m,p}, \\ B_{imrn} = \frac{u_{v,sm}}{2D^2} (\varepsilon_{lit} A_{in} A_{r\sigma} - \varepsilon_{lir} A_{iv} A_{vn}).$$

4. Equazioni costitutive nel caso di trasformazioni reversibili.

Per una trasformazione infinitesima reversibile del continuo, detta \mathfrak{J} l'energia libera, E l'entropia e ϑ la temperatura assoluta, sussiste la

e vale la pena di osservare che nella (17)₂ a Y_{im} può sostituirsi \underline{Y}_{im} dato che la parte simmetrica di Y_{im} non dà contributo.

Dalle (17)₄ si ricavano le λ_{rm} , dalle (17)₂ le \underline{Y}_{ln} ed infine le (19) danno le Y_{ln} .

Imponendo che l'espressione così ottenuta delle Y_{ln} sia effettivamente simmetrica si ottiene la seguente condizione di compatibilità per l'energia libera:

$$(20) \quad \varepsilon_{irm} \left(x_{r,i} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_{m,i}} + \mu_{ri} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \mu_{mi}} \right) - \varepsilon_{i\alpha\beta} \varrho_{\beta i} + \varepsilon_{i\alpha\beta} \varrho_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \varrho_{\alpha i}} - \\ - \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \varrho_{\alpha i, m}} (\varepsilon_{i\alpha\beta} \varrho_{\beta i, m} + \varepsilon_{i\alpha\beta} \varrho_{\alpha\beta, m}) = 0.$$

Le (17)₃, (17)₄ con la posizione

$$(21) \quad \mathfrak{J}' = \mathfrak{J} - \tau A_{ri} \mu_{ri}$$

diventano

$$(22) \quad - \frac{\partial \mathfrak{J}'}{\partial \mu_{im}} = \frac{1}{2} \lambda_{rm} \varrho_{ri}, \quad - \frac{\partial \mathfrak{J}'}{\partial \varrho_{\alpha i, m}} = \frac{1}{2} \lambda_{rm} \varrho_{\alpha i} \varepsilon_{ri\alpha}.$$

Eliminando λ tra le (22) si ottiene l'ulteriore condizione di compatibilità

$$(23) \quad \frac{\partial \mathfrak{J}'}{\partial \varrho_{\alpha i, m}} - \varepsilon_{str} \frac{\partial \mathfrak{J}'}{\partial \mu_{sm}} \varrho_{\alpha r} = 0.$$

Si può verificare con semplici calcoli che la funzione $\tau A_{ri} \mu_{ri}$ soddisfa le (20), le quali pertanto si possono pensare come condizioni di compatibilità anche per \mathfrak{J}' ; infatti \mathfrak{J} è soluzione delle (20) se e solo se lo è \mathfrak{J}' .

5. Struttura analitica dell'energia libera.

Per la ricerca della più generale funzione \mathfrak{J}' compatibile con le (20), (23) conviene premettere alcune considerazioni.

Per il loro significato, le ϱ_{rs} , $\varrho_{rs,t}$ sono legate dalle relazioni

$$(24) \quad \varrho_{ir} \varrho_{is} = \delta_{rs}, \quad \varrho_{ir,t} \varrho_{is} + \varrho_{ir} \varrho_{is,t} = 0.$$

Dalla (24)₁ scende

$$(25) \quad \varrho_{ir}\varrho_{is} + \varrho_{is}\varrho_{ir} = 0$$

che permettono di dimostrare che, limitatamente a rotazioni caratterizzate da un angolo φ soddisfacente

$$(26) \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{oppure} \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi$$

la matrice ϱ è univocamente determinata dalla sua parte antisimmetrica. Esiste quindi corrispondenza biunivoca tra i punti della varietà di $\varrho_{rs}, \varrho_{rs,t}$ definita dalle (24) e le variabili indipendenti

$$(27) \quad \nu'_r = \varepsilon_{ijr}\varrho_{ij}, \quad \sigma'_{rs} = \varepsilon_{ijr}\varrho_{iis}\varrho_{tj}$$

basta osservare, oltre a quanto detto, che da (27) (24) scende

$$(28) \quad \varrho_{ir,t} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ris}\sigma'_{st}\varrho_{it}.$$

La corrispondenza stabilita dalle (27) consente di ritenere J' dipendente dalle ϱ_{iis} tramite le σ'_{rs} e di scrivere quindi le (23) nella forma

$$(29) \quad \varepsilon_{ijr}\varrho_{vj} \left(\frac{\partial J'}{\partial \sigma'_{rs}} - \frac{\partial J'}{\partial \mu_{rs}} \right) = 0.$$

Fatte le posizioni

$$(30) \quad \xi_{ri} = \mu_{ri}, \quad \beta'_{im} = \mu_{im} + \sigma'_{im}$$

ed osservando che le (30) definiscono una trasformazione invertibile, le (29) danno:

$$(31) \quad \frac{\partial J'}{\partial \xi_{rs}} = 0.$$

La dipendenza di J' dalle μ_{ri}, σ'_{im} ha luogo dunque solo attraverso le β'_{im} .
Con l'ulteriore trasformazione di variabili definita dalle

$$(32) \quad \begin{cases} \alpha_{rs} = x_{r,s}, & \nu_r = x_{i,r}\nu'_i = x_{i,r}\varepsilon_{ijl}\varrho_{ij} \\ \beta_{rm} = x_{i,r}\beta'_{im} = x_{i,r}\mu_{im} + x_{i,r}\varepsilon_{ijl}\varrho_{iis}\varrho_{lm} \end{cases}$$

le (20) diventano:

$$(33) \quad \varepsilon_{rim} \alpha_{ri} \frac{\partial J'}{\partial \alpha_{mi}} = 0$$

la cui più generale soluzione è una funzione J' delle $b_{ij} = \alpha_{i1}\alpha_{1j}$. In definitiva la più generale soluzione J' del sistema (20), (23), è una funzione arbitraria delle variabili v_r , b_{ij} , e delle β_{rm} . Tale fatto determina la struttura analitica dell'energia libera. Si può osservare inoltre che le variabili $b_{rs} - \delta_{rs}$ (δ_{rs} sono i simboli di Kronecker), v_r , β_{rm} si annullano allora e solo allora che lo spostamento sia rigido e ciò permette di soddisfare al principio di indifferenza materiale (v. [4]). Infatti in tal caso le ρ_{rs} si identificano con i simboli di Kronecker e inoltre le μ_{im} risultano nulle.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. GRIOLI, *Sui continui di Cosserat con rotazioni libere*, Rend. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, **47** (1972).
- [2] G. GRIOLI, *Questioni di compatibilità per i continui di Cosserat*, Ist. Naz. di Alta Matematica, Symposia Mathematica, **1** (1968).
- [3] A. BRESSAN, *Sui sistemi continui nel caso asimmetrico*, Ann. di Mat. Pura e App., (4) **62** (1963).
- [4] G. GRIOLI, *Energia libera e stato tensionale dei continui*, Ann. di Mat. Pura e Appl., (4) **87** (1970).

Manoscritto pervenuto in Redazione l'8 Luglio 1976.