RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

STEFANO TESTA

Sui sottouniversi normali di un universo di dispositivi lineari su un corpo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 56 (1976), p. 193-204
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__56__193_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 56 (1977)

Sui sottouniversi normali di un universo di dispositivi lineari su un corpo.

STEFANO TESTA (*)

SUMMARY - In this note the author defines (§ 3) and deals with the normal subuniverses of a universe of linear networks on a commutative field [1]. Throughout a sequence of partial results, a general property of the networks of a normal subuniverse is given. Applications of the preceeding results to important normal universes conclude the work.

1. Richiami e notazioni.

Nel corso del presente lavoro tratteremo dell'universo dei dispositivi lineari su un corpo commutativo K, secondo la definizione data in [1]; indichiamo tale universo con la notazione $\boldsymbol{D}(K)$.

Richiamiamo ora alcune definizioni e proprietà relative a $\boldsymbol{D}(K)$ che useremo nel seguito. Sia quindi α un insieme finito, K un corpo commutativo: consideriamo lo spazio vettoriale su K, $\bigoplus_{i\in\alpha} K_i$ ove per ogni $i\in\alpha$, $K_i = K$, tale spazio sarà indicato K^α e chiamato lo spazio delle tensioni sui terminali α, lo stesso spazio, indicato K_α, sarà chiamato lo spazio delle correnti sui terminali α.

L'insieme $\mathfrak{D}_\alpha$ dei dispositivi su α di $\boldsymbol{D}(K)$ è l'insieme delle relazioni lineari di K^α in K_α (cfr. [1], [2] e [3]). Come è noto le relazioni (lineari) di K^α in K_α sono in corrispondenza biunivoca canonica con i sottospazi

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « L. B. Alberti » dell'Università, Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

vettoriali di $K^{\alpha} \oplus K_{\alpha}$. Tale corrispondenza associa ad ogni relazione M il sottospazio $G(M)$ suo grafico.

Dato $M \in \mathfrak{D}_{\alpha}$ diremo dimensione di M la dimensione dello spazio vettoriale $G(M)$. Siano $x \in K^{\alpha}$ e $y \in K_{\alpha}$ tali che il vettore $(x, y) \in G(M)$, (x, y) sarà detto allora un funzionamento di M. Indicheremo inoltre rispettivamente x_i e y_i la tensione e la corrente al terminale $i \in \alpha$ del funzionamento (x, y) di M.

Dato il trasduttore $\varphi: \alpha \to \beta$ (per una particolareggiata trattazione sui trasduttori vedasi [1] e [2]), con α e β insieme finiti, in [1] è assegnato il funtore $\mathfrak{D}$ che associa a φ l'applicazione tra insiemi $\mathfrak{D}(\varphi): \mathfrak{D}_{\alpha} \to \mathfrak{D}_{\beta}$. Consideriamo ora un caso particolare di uso frequente in seguito. Sia $i \in \alpha$, si consideri il trasduttore $\hat{\imath}: \alpha \to \alpha - \{i\}$ reciproco dell'inclusione canonica $\alpha - \{i\} \hookrightarrow \alpha$. Dato un dispositivo $M \in \mathfrak{D}_{\alpha}$, $\mathfrak{D}(\hat{\imath})M$ verrà scritto $\hat{\imath}M$ (leggasi i-soppresso M) e sarà definito dalla composizione delle relazioni:

$$K^{\alpha-\{i\}} \xrightarrow[\tilde{\pi}_i]{} K^{\alpha} \xrightarrow[M]{} K_{\alpha} \xrightarrow[\tilde{\varepsilon}_i]{} K_{\alpha-\{i\}}$$

con $\tilde{\pi}_i$ e $\tilde{\varepsilon}_i$ relazioni reciproche di π_i e ε_i rispettivamente proiezione ed immersione canoniche.

Il trasduttore $\hat{\imath}$ definisce l'operazione di soppressione del terminale i.

2. Le operazioni di cosoppressione e dualizzazione di terminali.

Diamo ora la seguente:

Definizione 2.1. Sia $M \in \mathfrak{D}_{\alpha}$, $i \in \alpha$, il dispositivo $\check{\imath}M \in \mathfrak{D}_{\alpha-\{i\}}$ (leggasi i-cosoppresso M) dato dalla relazione:

$$K^{\alpha-\{i\}} \xrightarrow[\varepsilon_i]{} K^{\alpha} \xrightarrow[M]{} K_{\alpha} \xrightarrow[\pi_i]{} K_{\alpha-\{i\}} .$$

con ε_i e π_i rispettivamente immersione e proiezione canoniche, si dirà ottenuto da M per cosoppressione del terminale i.

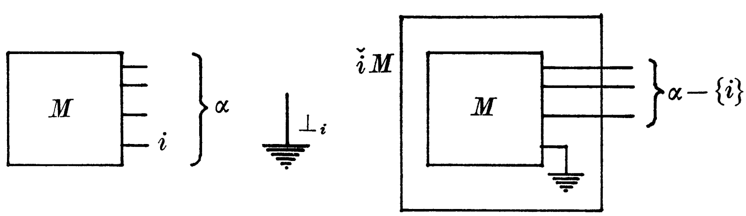
Dalle definizioni stesse appare evidente il carattere duale che hanno le operazioni di soppressione e cosoppressione rispetto all'antinvoluzione che ad ogni relazione associa la relazione reciproca. Precisamente sia $M \in \mathfrak{D}_{\alpha}$ si ha: $\hat{\imath}M = \widetilde{\check{\imath}\tilde{M}}$, ove $\tilde{M}$ è il dispositivo reciproco di M.

DEFINIZIONE 2.2. Un dispositivo $M \in \mathfrak{D}_\alpha$ che sia un morfismo (cioè un'applicazione lineare) di K^α in K_α sarà detto ammettenza, un dispositivo la cui relazione reciproca è un morfismo sarà detto impedenza.

Segue allora subito dalle definizioni:

PROPOSIZIONE 2.3. Se $i \in \alpha$, $M \in \mathfrak{D}_\alpha$ è un'ammettenza allora $\check{\imath} M$ è un'ammettenza; se M è un'impedenza, allora $\hat{\imath} M$ è una impedenza.

OSSERVAZIONE 1. Mentre l'operazione di soppressione di terminali, discendendo dagli assiomi stessi di universo di dispositivi, è definita in ogni universo, lo stesso non accade per l'operazione di cosoppressione, che discende invece dalla particolare assegnazione del funtore $\mathfrak{D}$ per definire $\boldsymbol{D}(K)$ o più in generale un qualunque universo lineare (è bene osservare che la definizione di cosoppressione è estendibile in modo ovvio, per lo meno a qualunque universo della forma $\boldsymbol{D}(\mathcal{C}; X, Y)$; X, Y oggetti della categoria abeliana $\mathcal{C}$ (cfr. [1])). Tuttavia l'operazione di cosoppressione potrebbe definirsi anche mediante operazioni definite su ogni universo di dispositivi, precisamente la soppressione di terminali e la composizione di dispositivi (per la definizione di tale operazione vedasi [1]) e un dispositivo particolare di $\boldsymbol{D}(K)$ (o più in generale di un qualunque universo della forma $\boldsymbol{D}(\mathcal{C}; X, Y)$): il dispositivo terra, il cui prototipo di terminale $\{1\}$ sarà definito dall'equazione $x_1 = 0$ ed indicato $\perp_1$.
Allora si avrà: $\check{\imath} M = \hat{\imath} \perp_i M$. In schema:



Facciamo infine osservare che l'uso dell'operazione di cosoppressione per ottenere i risultati dei numeri 3 e 4 non è strettamente necessario; tuttavia essa semplifica gli enunciati e mette in evidenza alcune dualità di $\boldsymbol{D}(K)$ che ci è parso bene rilevare.

Passiamo ora a definire un'altra operazione sui dispositivi di $\boldsymbol{D}(K)$.

DEFINIZIONE 2.4. Sia $i \in \alpha$, chiamiamo d_i [risp. r_i] l'automorfismo di $K^\alpha \oplus K_\alpha$ così definito: per ogni $(x, y) \in K^\alpha \oplus K_\alpha$, $d_i(x, y) = (u, v)$ con $u_j = x_j$ e $v_j = y_j$ se $j \in \alpha$, $j \neq i$, $u_i = y_i$, $v_i = x_i$ [risp. $r_i(x, y) = (u, v)$, $u_j = x_j$ e $v_j = y_j$ se $j \neq i$, $u_i = -y_i$, $v_i = x_i$]. L'automorfismo

d_i si dirà l'operatore dualizzatore sul terminale i di α. L'automorfismo r_i si dirà l'operatore rotatore sul terminale i di α.

Si consideri il gruppo $\mathcal{G}_\alpha$ [risp. $\bar{\mathcal{G}}_\alpha$] degli automorfismi di $K^\alpha \oplus K_\alpha$ generato dai d_i [risp. dagli r_i] al variare di $i \in \alpha$. Si noti che $\mathcal{G}_\alpha$ e $\bar{\mathcal{G}}_\alpha$ sono abeliani (¹).

Osservato che per ogni $i \in \alpha$, d_i è di ordine due, potremo istituire un isomorfismo canonico di gruppi tra $\mathcal{G}_\alpha$ e l'insieme $\mathcal{S}(\alpha)$, parti di α, dotato della seguente operazione $\circ$ che lo rende gruppo commutativo.

$$\alpha', \alpha'' \in \mathcal{S}(\alpha), \qquad \alpha' \circ \alpha'' = (\alpha' \cup \alpha'') - (\alpha' \cap \alpha'').$$

Precisamente l'isomorfismo associa ad ogni $\alpha' \subset \alpha$ l'elemento $d_{\alpha'}$ di $\mathcal{G}_\alpha$ dato da: $d_{\alpha'} = \prod_{i \in \alpha'} d_i$.

Per ciò che concerne $\bar{\mathcal{G}}_\alpha$ ci limiteremo ad osservare che per ogni $i \in \alpha$, r_i è di ordine quattro (²) e quindi un generico $\bar{g} \in \bar{\mathcal{G}}_\alpha$ potrà sempre scriversi in uno e un sol modo come prodotto $\prod_{i \in \alpha} r_i^{n_i}$, $n_i = 0, 1, 2, 3$. Osserviamo anche che r_i^2 non dà luogo a scambio tra la tensione e la corrente al terminale i, ma soltanto cambia di segno tali tensioni e corrente e che r_i^3 è tale che per ogni $(x, y) \in K^\alpha \oplus K_\alpha$, $r_i^3(x, y) = (u, v)$ ove $u_j = x_j$ e $v_j = y_j$ se $j \in \alpha$, $j \neq i$, $u_i = y_i$, $v_i = -x_i$.

I gruppi $\mathcal{G}_\alpha, \bar{\mathcal{G}}_\alpha$ operano sui dispositivi di $\mathcal{D}_\alpha$ conservandone la dimensione.

Importante per il presente lavoro sarà la seguente definizione:

DEFINIZIONE 2.5. In $\boldsymbol{D}(K)$, un dispositivo $M \in \mathcal{D}_\alpha$ si dirà normale se nell'orbita di M, rispetto a $\mathcal{G}_\alpha$, esiste un'ammettenza.

Il dispositivo privo di terminali è normale, essendo ammettenza trivialmente. Segue subito dalla definizione che i dispositivi normali hanno dimensione uguale al numero dei terminali; è facile invece verificare che non vale il viceversa, inoltre:

PROPOSIZIONE 2.6. Sono fatti equivalenti per $M \in \mathcal{D}_\alpha$

a) M è normale;

b) nell'orbita di M, rispetto a $\bar{\mathcal{G}}_\alpha$, esiste un'ammettenza;

(¹) Si noti che $\forall\, i \in \alpha$, $r_i = d_i$ (e quindi $\bar{\mathcal{G}}_\alpha = \mathcal{G}_\alpha$) se e solo se la caratteristica di K è due.

(²) Naturalmente se la caratteristica di K è diversa da due.

c) nell'orbita di M rispetto a $\mathcal{G}_\alpha$, esiste un'impedenza;

d) nell'orbita di M rispetto a $\overline{\mathcal{G}}_\alpha$ esiste un'impedenza.

DIMOSTRAZIONE. Per quanto concerne l'equivalenza di *a*) e *b*) verifichiamo che se per qualche $\bar{g} \in \overline{\mathcal{G}}_\alpha$ $\bar{g}M$ è un'ammettenza, allora esiste $\alpha' \subset \alpha$ tale che $d_{\alpha'}M$ è un'ammettenza. Sia $\bar{g} = \prod_{i\in\alpha} r_i^{n_i}$, sia $\alpha' \subset \alpha$ il sottoinsieme degli i per cui $n_i = 1$ oppure $n_i = 3$ allora $d_{\alpha'}M$ è una ammettenza; infatti $d_{\alpha'}M = \psi\cdot(\bar{g}M)\cdot\varphi$ con $\varphi = (\varphi_{ij})$, $\psi = (\psi_{ij})$ $i, j \in \alpha$ automorfismi rispettivamente di K^α e K_α così definiti: $\varphi_{ij} = \psi_{ij} = 0$ se $i \neq j$, $\varphi_{ii} = 1$ se $n_i = 0$ oppure $n_i = 3$, $\varphi_{ii} = -1$ se $n_i = 1$ oppure $n_i = 2$, $\psi_{ii} = 1$ se $n_i = 0$ oppure $n_i = 1$, $\psi_{ii} = -1$ se $n_i = 2$ oppure $n_i = 3$. Viceversa se per qualche $\alpha' \subset \alpha$ $d_{\alpha'}M$ è un'ammetenza allora $\bar{g}M$ è un'ammentenza con $\bar{g} = \prod_{i\in\alpha'} r_i$, come si verifica con dimostrazione analoga al caso precedente.

Per l'equivalenza di *a*) e *c*) basta osservare che $d_\alpha M = \widetilde{M}$. Per l'equivalenza di *c*) e *d*) si procede in modo « duale » (3) alla dimostrazione della equivalenza di *a*) e *b*).

OSSERVAZIONE 2. Anche per le operazioni di dualizzazione e rotazione sarà utile osservare che esse possono essere ottenute mediante le operazioni di composizione di dispositivi e di soppressione di terminali, servendosi di due dispositivi di $\boldsymbol{D}(K)$ a due terminali: il dispositivo dualizzatore il cui prototipo di terminali $\{1, 2\}$ sarà indicato Δ_{12} e definito dal sistema di equazioni

$$y_1 = -x_2$$

$$y_2 = x_1$$

e il dispositivo rotatore il cui prototipo di terminali $\{1, 2\}$ sarà indicato Γ_{12} e definito dal sistema di equazioni:

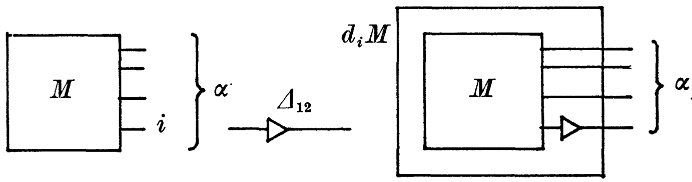
$$y_1 = x_2\,,$$

$$y_2 = x_1\,.$$

---

(3) « duale » rispetto all'antinvoluzione $\sim$ che ad ogni relazione associa la sua reciproca.

Schematicamente il dispositivo $d_i M$ sarà così ottenuto:



Analogamente per il dispositivo $r_i M$, con Γ_{12} al posto di Δ_{12}.

3. Sottouniversi normali di $\boldsymbol{D}(K)$.

Per definizione e proprietà dei sottouniversi di un universo di dispositivi vedasi [1].

Definizione 3.1. Un sottouniverso $\mathcal{N}$ di $\boldsymbol{D}(K)$ si dirà normale quando ogni dispositivo di $\mathcal{N}$ ha dimensione uguale al numero dei suoi terminali.

Lo scopo principale del presente paragrafo sarà quello di dimostrare che un sottouniverso normale è costituito da dispositivi normali in $\boldsymbol{D}(K)$ (cfr. Def. 2.5). È bene osservare che i dispositivi normali non costituiscono un sottouniverso di $\boldsymbol{D}(K)$ in quanto è facile trovare ammettenze di $\boldsymbol{D}(K)$ che, per soppressione di terminali, danno luogo a dispositivi la cui dimensione è diversa dal numero di terminali.

Per ottenere il risultato citato in precedenza ci serviremo della seguente caratterizzazione dei dispositivi normali:

Teorema 3.2. *Un dispositivo M di $\boldsymbol{D}(K)$ è normale se e solo se M è il dispositivo privo di terminali oppure M ha dimensione uguale al numero dei suoi terminali ed esiste inoltre un suo terminale i tale che $\check{\imath}M$ oppure $\hat{\imath}M$ è normale.*

Per la dimostrazione del teorema 3.2 ci serviremo di alcuni lemmi:

Lemma 3.3. *Sia $M \in \mathfrak{D}_\alpha$, $\alpha' \subset \alpha$, $i \in \alpha$, $i \notin \alpha'$ allora:*

$$\check{\imath}(d_{\alpha'}M) = d_{\alpha'}(\check{\imath}M) \quad \text{e} \quad \hat{\imath}(d_{\alpha'}M) = d_{\alpha'}(\hat{\imath}M) .$$

Dimostrazione. Dimostriamo la prima uguaglianza. Per semplicità di notazione sia $\alpha = \{1, 2, \ldots, n\}$. Sia $K^\alpha \xleftarrow[\varphi]{} A \xrightarrow[\psi]{} K_\alpha$, una coppia di applicazioni che individua la relazione M. Scriviamo φ e ψ nelle loro componenti: $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$. Il dispositivo $d_{\alpha'}M$ è dato dalla relazione individuata dalla coppia $K^\alpha \xleftarrow[\sigma]{} A \xrightarrow[\theta]{} K_\alpha$, ove $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ con $\sigma_j = \varphi_j$, $\theta_j = \psi_j$ se $j \in \alpha$, $j \notin \alpha'$ $\sigma_j = \psi_j$, $\theta_j = \varphi_j$ se $j \in \alpha'$. Il dispositivo $\check{i}(d_{\alpha'}M)$ è dato dalla relazione composta

$$K^{\alpha-\{i\}} \xrightarrow[\varepsilon_i]{} K^\alpha \xrightarrow[d_{\alpha'}M]{} K_\alpha \xrightarrow[\pi_i]{} K_{\alpha-\{i\}} \tag{1}$$

con ε_i, π_i immersione e proiezione canoniche. D'altra parte la relazione (1) è individuata dalla coppia

$$K^{\alpha-\{i\}} \xleftarrow[\sigma']{} \sigma^{-1}(K^{\alpha-\{i\}}) \xhookrightarrow[\lambda]{} A \xrightarrow[\theta]{} K_\alpha \xrightarrow[\pi_i]{} K_{\alpha-\{i\}}\,, \tag{2}$$

ove $\sigma' = (\sigma'_1, \dots, \sigma'_{i-1}, \sigma'_{i+1}, \dots, \sigma'_n)$ con $\sigma'_j = \sigma_{j|\sigma^{-1}(K^{\alpha-\{i\}})}$, $j \in \alpha - \{i\}$, in quanto il quadrato di applicazioni

$$\begin{tikzcd}
K^{\alpha-\{i\}} \arrow[d, "\varepsilon_i"'] & \sigma^{-1}(K^{\alpha-\{i\}}) \arrow[l, "\sigma'"'] \arrow[d, hook, "\lambda"] \\
K^\alpha & A \arrow[l, "\sigma"]
\end{tikzcd}$$

è un pull-back. Ora, poichè $i \notin \alpha'$, $\sigma^{-1}(K^{\alpha-\{i\}}) = \varphi^{-1}(K^{\alpha-\{i\}})$ e quindi (2) potrà essere scritta

$$K^{\alpha-\{i\}} \xleftarrow[\sigma']{} \varphi^{-1}(K^{\alpha-\{i\}}) \xrightarrow[\theta']{} K^{\alpha-\{i\}} \tag{3}$$

ove $\theta' = \pi_i \cdot \theta \cdot \lambda = (\theta'_1, \dots, \theta'_{i-1}, \theta'_{i+1}, \dots, \theta'_n)$ con $\theta'_j = \theta_{j|\varphi^{-1}(K^{\alpha-\{i\}})}$, $j \in \alpha -$ $- \{i\}$. Ma la coppia (3) individua proprio $d_{\alpha'}(\check{i}M)$.

Dimostriamo $\hat{i}d_{\alpha'}M = d_{\alpha'}(\hat{i}M)$. Tenendo conto dell'uguaglianza appena dimostrata si ha:

$$\hat{i}d_{\alpha'}M = \check{i}(\widetilde{\widetilde{d_{\alpha'}M}}) = \widetilde{\check{i}d_{\alpha-\alpha'}M} = \widetilde{\check{i}(d_{\alpha'}\tilde{M})} = \widetilde{d_{\alpha'}(\check{i}\tilde{M})} = d_{\alpha-\alpha'}(\check{i}\tilde{M}) =$$
$$= d_{\alpha'}(\widetilde{\check{i}\tilde{M}}) = d_\alpha(\hat{i}M)$$

Osservazione 3. La dimostrazione del lemma precedente potrebbe essere fatta anche tenendo conto delle osservazioni 1) e 2) e della seguente regola di calcolo $\hat{i}(NM) = N\hat{i}M$ per i terminale non di N (regola che risulta valida in qualunque universo di dispositivi).

Proposizione 3.4. Sia $M\in\mathfrak{D}_\alpha$ dispositivo normale, $i\in\alpha$, allora $\check{i}M$ oppure $\hat{i}M$ è normale.

Dimostrazione. Sia $\alpha'\subset\alpha$ tale che $d_{\alpha'}M$ è un'ammettenza. Se $i\notin\alpha'$ per il lemma precedente $d_{\alpha'}(\check{i}M)=\check{i}(d_{\alpha'}M)$ e quindi $d_{\alpha'}(\check{i}M)$ è un'ammettenza, cioè $\check{i}M$ è normale.

Se $i\notin\complement\alpha'=\alpha-\alpha'$, per il lemma precedente $d_{\complement\alpha'}(\hat{i}M)=\hat{i}d_{\complement\alpha'}M$, ma $d_{\complement\alpha'}M=d_\alpha d_{\alpha'}M=\widetilde{d_{\alpha'}M}$ è un'impedenza, quindi $d_{\complement\alpha'}(\hat{i}M)$ è una impedenza cioè $\hat{i}M$ è normale.

Lemma 3.5. Sia $\mathcal{C}$ una categoria abeliana, $\varphi_i\colon A\to B_i$, con $i\in\alpha$ insieme finito, morfismi di $\mathcal{C}$; posto $(\varphi_i)_{i\in\alpha}\colon A\to\bigoplus_{i\in\alpha}B_i$ il morfismo di A nel biprodotto $\bigoplus_{i\in\alpha}B_i$ indotto dai φ_i, allora $\ker(\varphi_i)_{i\in\alpha}=\bigcap_{i\in\alpha}\ker\varphi_i$.

Dimostrazione. Basterà fare la dimostrazione per $\alpha=\{1,2\}$; posto $\varepsilon\colon\ker\varphi_1\cap\ker\varphi_2\hookrightarrow A$, poichè $\varphi_1\cdot\varepsilon=\varphi_2\cdot\varepsilon=0$ allora

$$0=(\varphi_1\varepsilon,\varphi_2\varepsilon)=(\varphi_1,\varphi_2)\cdot\varepsilon\,,$$

per cui: $\ker\varphi_1\cap\ker\varphi_2\hookrightarrow\ker(\varphi_1,\varphi_2)\hookrightarrow A$. Viceversa dal diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & B_1 \\
\ker(\varphi_1,\varphi_2) \arrow[r, hook, "j"] & A \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[r, "(\varphi_1,\varphi_2)"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & B_1\oplus B_2 \arrow[u, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] \\
 & & B_2
\end{tikzcd}$$

segue $\varphi_1 j=\varphi_2 j=0$

quindi $\ker(\varphi_1,\varphi_2)\hookrightarrow\ker\varphi_1\cap\ker\varphi_2\hookrightarrow A$.

Lemma 3.6. Sia $\mathcal{C}$ una categoria abeliana, sia $M\colon A\to B$ una relazione di $\mathcal{C}$ (cioè un morfismo di $\hat{\mathcal{C}}$ simmetrizzata di $\mathcal{C}$, cfr. [2]); M è un morfismo di $\mathcal{C}$ se e solo se per ogni coppia di morfismi $A\xleftarrow{\varphi}C\xrightarrow{\psi}B$ che individua M si ha:

1) φ epimorfismo,

2) $\ker\varphi\hookrightarrow\ker\psi$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che due coppie di morfismi $A \xleftarrow[\varphi]{} C \xrightarrow[\psi]{} B$ e $A \xleftarrow[\varrho]{} C' \xrightarrow[\sigma]{} B$ individuano la stessa relazione $M\colon A \to B$ se e solo se $C \xrightarrow[(\varphi,\psi)]{} A \oplus B$ e $C' \xrightarrow[(\varrho,\sigma)]{} A \oplus B$ hanno la stessa immagine.

Sia $M\colon A \to B$ un morfismo di $\mathcal{C}$, allora per ogni coppia di morfismi $A \xleftarrow[\varphi]{} C \xrightarrow[\psi]{} B$ che individua M si ha $\mathrm{Im}\big((\varphi, \psi)\big) = \mathrm{Im}\big((1, M)\big)$. Ma $\mathrm{Im}\big((1, M)\big) = A$ e quindi dalla fattorizzazione

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "(\varphi, \psi)"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & A \oplus B \\ & A \arrow[ur, "(1, M)"'] & \end{tikzcd}$$

segue che φ è un epimorfismo e $\psi = M\varphi$ da cui $\ker\varphi \hookrightarrow \ker\psi$. Viceversa se 1) e 2) dell'enunciato sono soddisfatte per una coppia $A \xleftarrow[\varphi]{} C \xrightarrow[\psi]{} B$ che individua $M\colon A \to B$, allora si ha il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} A & C \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"] & B \\ & C/\ker\varphi \arrow[ul, "\bar{\varphi}"] \arrow[ur, "\bar{\psi}"'] & \end{tikzcd}$$

con π epimorfismo e $\bar{\varphi}$ isomorfismo e quindi, essendo $(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$ monoformismo e $C/(\ker\varphi)$ immagine di (φ, ψ), segue che M è individuata anche da $A \xleftarrow[\bar{\varphi}]{} C/\ker\varphi \xrightarrow[\bar{\psi}]{} B$, da cui $M = \bar{\psi}\cdot\bar{\varphi}^{-1}$

Lemma 3.7. Se $M \in \mathfrak{D}_\alpha$ è un dispositivo la cui dimensione è uguale al numero dei suoi terminali, $i \in \alpha$ e $\check{i}M$ è un'ammettenza, allora M è normale (precisamente M è un'ammettenza oppure $d_i M$ è una ammettenza).

Dimostrazione. Sia, per semplicità di notazione $\alpha = \{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \geqslant 1)$, M sia rappresentato dalla coppia di applicazioni $K^\alpha \xleftarrow[\varphi]{} K^\alpha \xrightarrow[\psi]{} K_\alpha$, con $K^\alpha \xrightarrow{(\varphi,\psi)} K^\alpha \oplus K_\alpha$ monomorfismo, poniamo:

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \qquad \psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n).$$

$\check{i}M$ sarà dato dalla relazione $K^{\alpha-\{i\}} \xrightarrow[\varepsilon_i]{} K^{\alpha} \xrightarrow[M]{} K_{\alpha} \xrightarrow[\pi_i]{} K_{\alpha-\{i\}}$ che è individuata dalla coppia

$$(1) \qquad K^{\alpha-\{i\}} \xleftarrow[\varphi']{} \varphi^{-1}(K^{\alpha-\{i\}}) \xhookrightarrow[\lambda]{} K^{\alpha} \xrightarrow[\psi]{} K_{\alpha} \xrightarrow[\pi_i]{} K_{\alpha-\{i\}} .$$

con $\varphi' = (\varphi'_1, \dots, \varphi'_{i-1}, \varphi'_{i+1}, \dots, \varphi'_n)$ ove

$$\varphi'_j = \varphi_{j|\varphi^{-1}(K^{\alpha-\{i\}})} , \qquad j \in \alpha - \{i\} ,$$

essendo il quadrato

$$(2) \qquad \begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(K^{\alpha-\{i\}}) & \xrightarrow{\lambda} & K^{\alpha} \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \varphi \\ K^{\alpha-\{i\}} & \xrightarrow[\varepsilon_i]{} & K^{\alpha} \end{array}$$

un pull-back. La coppia (1) potremo anche scriverla

$$K^{\alpha-\{i\}} \xleftarrow[\varphi']{} \varphi^{-1}(K^{\alpha-\{i\}}) \xrightarrow[\psi']{} K_{\alpha-\{i\}}$$

con

$$\psi' = \pi_i \psi \lambda = (\psi'_1, \dots, \psi'_{i-1}, \psi'_{i+1}, \dots, \psi'_n) ,$$

$$\psi'_j = \psi_{j|\varphi^{-1}(K^{\alpha-\{i\}})} , \qquad j \in \alpha - \{i\} .$$

Poichè $\check{i}M$ è un'ammettenza, φ' è, per il lemma 3.6, epimorfismo ed inoltre $\ker \varphi' \subset \ker \psi'$.

Poichè φ' è epimorfismo, possono aversi due casi: $\varphi^{-1}(K^{\alpha-\{i\}}) = K^{\alpha}$ oppure $\varphi^{-1}(K^{\alpha-\{i\}}) \xrightarrow[\varphi']{\sim} K^{\alpha-\{i\}}$.

Nel primo caso $\varphi'_j = \varphi_j$, $\psi'_j = \psi_j$, $j \in \alpha - \{i\}$ e $\varphi_i = 0$ e quindi, per il lemma 3.5, $\ker \varphi' = \bigcap_{i \in \alpha - \{i\}} \ker \varphi'_j = \bigcap_{i \in \alpha} \ker \varphi_j = \ker \varphi$ inoltre, essendo (φ, ψ) monomorfismo, $0 = \ker(\varphi, \psi) = \ker \varphi \cap \ker \psi = \ker \varphi' \cap \cap \ker \psi$, ma $\ker \psi = \bigcap_{j \in \alpha} \ker \psi_j = \Big(\bigcap_{j \in \alpha - \{i\}} \ker \psi_j \Big) \cap \ker \psi_i = \ker \psi' \cap \ker \psi_i$, quindi $0 = \ker \varphi' \cap \ker \psi = \ker \varphi' \cap \ker \psi' \cap \ker \psi_i = \ker \varphi' \cap \ker \psi_i$.

Si consideri allora il morfismo $\sigma \colon K^{\alpha} \to K^{\alpha}$ ove

$$\sigma = (\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \psi_i, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_n) ,$$

si ha $\ker \sigma = 0$, quindi σ è un isomorfismo e ciò basta per affermare che $d_i M$ è una ammettenza.

Se φ' è isomorfismo, dal quadrato (2), si ha subito che:

$$K^{\alpha-\{i\}} = \mathrm{Im}(\varphi\cdot\lambda) \subset \mathrm{Im}(\varphi) \subset K^{\alpha}$$

da cui $K^{\alpha} = \mathrm{Im}(\varphi)$, chè altrimenti $\varphi^{-1}(K^{\alpha-\{i\}}) = K^{\alpha}$, perciò φ è un isomorfismo ed M un'ammettenza. Con dimostrazione analoga vale anche la proposizione duale della precedente, precisamente:

LEMMA 3.7*. Se $M \in \mathfrak{D}_{\alpha}$ è un dispositivo la cui dimensione è uguale al numero dei suoi terminali, $i \in \alpha$ e $\hat{\imath}M$ è un'impedenza, allora M è normale.

Possiamo ora dare la

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.2. Se M è normale e non è il dispositivo privo di terminali, sia i un suo terminale, allora per la proposizione 3.4 $\check{\imath}M$ oppure $\hat{\imath}M$ è normale.

Viceversa, se M ha dimensione uguale al numero dei suoi terminali; se $\check{\imath}M$ è normale esiste $\alpha' \subset \alpha - \{i\}$ tale che $d_{\alpha'}\check{\imath}M = \check{\imath}d_{\alpha'}M$ è una ammettenza ed allora, per il lemma 3.7, M è normale, se $\hat{\imath}M$ è normale allora esiste $\alpha' \subset \alpha - \{i\}$ tale che $d_{\alpha'}\hat{\imath}M = \hat{\imath}d_{\alpha'}M$ è un'impedenza ed allora, per il lemma 3.7*, M è normale.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente:

TEOREMA 3.8. Un sottouniverso $\mathcal{N}$ normale è tutto costituito da dispositivi normali (come dispositivi di $\boldsymbol{D}(K)$).

DIMOSTRAZIONE. Poichè il dispositivo privo di terminali è in $\mathcal{N}$ ed è normale, il teorema sarà provato dimostrando che, se i dispositivi di $\mathcal{N}$ a $n-1$ terminali ($n \geqslant 1$) sono normali in $\boldsymbol{D}(K)$ allora anche quelli ad n terminali sono normali in $\boldsymbol{D}(K)$. Ma ciò ormai è una quasi immediata conseguenza del teorema 3.2.

4. Applicazioni.

a) Seguendo [1] si consideri una famiglia $\mathfrak{T}$ non vuota di strutture paracomplesse su K, ed il sottouniverso di $\boldsymbol{D}(K)$ dei dispositivi passivi massimali rispetto a $\mathfrak{T}$, che sarà indicato $\boldsymbol{D}(K, \mathfrak{T})$. Questo sottouniverso è normale e quindi per il teorema 3.8 tutto costituito da dispositivi normali; non solo, ma osservato che per ogni α insieme finito, il gruppo $\mathfrak{G}_{\alpha}$ opera stabilmente sui dispositivi su α di $\boldsymbol{D}(K, \mathfrak{T})$, cioè trasforma dispositivi di $\boldsymbol{D}(K, \mathfrak{T})$ in dispositivi di $\boldsymbol{D}(K, \mathfrak{T})$, come mostra un semplice calcolo sui funzionamenti, potremo anche affermare che per ogni dispositivo M di $\boldsymbol{D}(K, \mathfrak{T})$ esiste un insieme di suoi terminali α' ed una ammettenza P di $\boldsymbol{D}(K, \mathfrak{T})$ tali che $M = d_{\alpha'}P$.

Infine, tenendo conto dell'osservazione 2) poichè il dualizzatore $\Delta_{1,2}$, oltre ad essere dispositivo passivo rispetto ad ogni struttura paracomplessa su K, è anche ammettenza, quanto sopra stabilito ci permette di affermare che le ammettenze di $\boldsymbol{D}(K, \mathfrak{T})$ generano il sottouniverso stesso.

b) In [1] partendo da un automorfismo involutorio η del corpo K, si è definito un automorfismo pure involutorio di $\boldsymbol{D}(K)$, chiamato automorfismo di η-reciprocità. I dispositivi lasciati inalterati da tale automorfismo costituiscono un sottouniverso normale di $\boldsymbol{D}(K)$ che indicheremo $\boldsymbol{H}_\eta(K)$ e chiameremo sottouniverso dei dispositivi η-hermitiani ovvero η-reciproci di $\boldsymbol{D}(K)$. Anche qui, tenuto conto dell'osservazione 2), è facile verificare che per ogni insieme finito α il gruppo $\overline{\mathfrak{G}}_\alpha$ opera stabilmente sui dispositivi su α di $\boldsymbol{H}_\eta(K)$ in quanto il rotatore Γ_{12} è η-reciproco per ogni automorfismo involutorio η di K_η, quindi per ogni dispositivo M di $\boldsymbol{H}_\eta(K)$ ad α terminali, per la proposizione 2.6, esiste un operatore $\bar{g} \in \overline{\mathfrak{G}}_\alpha$ e un'ammettenza P di $\boldsymbol{H}_\eta(K)$ tali che $M = \bar{g}P$.

Ancora, giacchè il rotatore è un'ammettenza, anche in questo caso si potrà affermare che le ammettenze η-hermitiane generano $\boldsymbol{H}_\eta(K)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Darbo, *Aspetti algebrico-categoriali della teoria dei dispositivi*, Symposia Matematica, **4**, pag. 303 e seg.

[2] F. Parodi, *Simmetrizzazioni di una categoria*, Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, **44**, pag. 185 e seg., **46**, pag. 273 e seg.

[3] P. Hilton, *Correspondences and exact squares*, Proc. of the Conf. on Categ. Alg., La Jolla (1965).

[4] B. Mitchell, *Theory of Categories*, Academic Press (1965).

Manoscritto pervenuto in Redazione il 14 giugno 1976.