

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANGELO FAVINI

Su un'equazione astratta di tipo ellittico-iperbolico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 55 (1976), p. 227-242

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__55__227_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__55__227_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Su un'equazione astratta di tipo ellittico-iperbolico.

ANGELO FAVINI (Bologna) (*)

SUMMARY - In this paper I consider the abstract equation in a Banach space X

$$u''(z) = z^m U u(z), \quad z \in R.$$

First, I prove the existence of a strict solution for the hyperbolic Cauchy problem

$$\begin{cases} u''(z) = z^m A^2 u(z), & z \geq 0, \\ u(0) = u_0, \\ u'(0) = u_1, \end{cases}$$

where A is a suitable linear closed operator in X and u_0, u_1 belong to $D(A^2)$. This result applies to the problem

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(z, x)}{\partial z^2} = z^m \frac{\partial^2 u(z, x)}{\partial x^2}, & z \geq 0, x \in R, \\ u(0, x) = u_0(x), & \frac{\partial u(0, x)}{\partial z} = u_1(x), \quad x \in R, \end{cases}$$

and extends [3].

Then, I study the Cauchy problem for the elliptic equation

$$u''(z) = z^m B u(z), \quad z \in [0, T], \quad 0 < T < +\infty,$$

B being a linear closed operator, and I prove that, under suitable hypotheses on the initial data u_0, u_1 , the Cauchy problem for this equation has a strict solution.

Further, if m is a positive odd integer and $U = A^2$, $-U = B$, with cor-

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « S. Pincherle, Piazza di Porta S. Donato 5, Bologna.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

responding domains, then the problem

$$\begin{cases} u''(z) = z^m Uu(z), & z \in [-T, T], \\ u(0) = u_0, \\ u'(0) = u_1, \end{cases}$$

has, for certain u_0, u_1 , a strict solution.

DEFINIZIONE 1. *Sia X uno spazio di Banach reale o complesso e sia A un operatore lineare chiuso in X , a dominio D_A ; sia, infine, m un reale positivo. Diciamo che $w = w(z)$, $z \geq 0$, è una soluzione stretta del problema*

$$(1) \quad \begin{cases} w''(z) = z^m A^2 w(z), & z \geq 0, \\ w(0) = x_0, & x_0 \in X, \\ w'(0) = x_1, & x_1 \in X, \end{cases}$$

se $w(z)$ è dotata di derivate prima e seconda continue su $z \geq 0$, $w(z) \in D_{A^2}$, $z \geq 0$, e vale la (1).

Per dimostrare il successivo Teorema di esistenza, faremo l'ipotesi fondamentale che A sia il generatore infinitesimale di un gruppo fortemente continuo (di classe C_0) di operatori lineari nello spazio di Banach X .

Siano y_0, y_1 elementi di X . La considerazione della funzione Z , e delle sue proprietà ci suggerisce di cercare una soluzione del problema (1) nella forma di combinazione lineare delle due funzioni

$$u(z) = z \int_{-1}^1 \left[\exp \left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} A t \right) \right] (1-t^2)^{-m/(2(m+2))} y_1 dt,$$

$$v(z) = \int_{-1}^1 \left[\exp \left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} A t \right) \right] (1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} y_0 dt.$$

Poichè A genera un gruppo fortemente continuo, riesce

$$\|\exp(-\tau A)\| \leq M \exp(\omega|\tau|)$$

e l'integrabilità delle funzioni sotto il segno di integrale dipende solo dai coefficienti

$$(1 - t^2)^{-m/(2(m+2))} \quad \text{e} \quad (1 - t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} \quad \text{su }]-1, 1[.$$

Ora, $t \rightarrow (1 - t^2)^{-m/(2(m+2))}$ è integrabile su $]-1, 1[$ se e solo se $m \in]-\infty, -4[\cup]-2, +\infty[$ e $t \rightarrow (1 - t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))}$ è integrabile su $]-1, 1[$ se e solo se $m \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$.

Di qui, le funzioni $u(z)$ e $v(z)$ riescono ben definite e continue su $]0, +\infty[$ per tutti gli $m \in]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$.

Supponiamo $m > 0$. Una ipotesi che si presenta spontanea è di assumere che y_0, y_1 appartengano a D_{A^2} , onde sia lecito derivare sotto il segno di integrale.

Consideriamo $u(z)$. Procedendo formalmente, abbiamo

$$\begin{aligned} u'(z) &= \int_{-1}^1 \left[\exp \left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} A t \right) \right] (1 - t^2)^{-m/(2(m+2))} y_1 dt - \\ &\quad - z^{m/2+1} \int_{-1}^1 \left[\exp \left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} A t \right) \right] t (1 - t^2)^{-m/(2(m+2))} A y_1 dt, \\ u''(z) &= - z^{m/2} \int_{-1}^1 \left[\exp \left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} A t \right) \right] t (1 - t^2)^{-m/(2(m+2))} A y_1 dt - \\ &\quad - \frac{m+2}{2} z^{m/2} \int_{-1}^1 \left[\exp \left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} A t \right) \right] t (1 - t^2)^{-m/(2(m+2))} A y_1 dt + \\ &\quad + z^{m+1} \int_{-1}^1 \left[\exp \left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} A t \right) \right] t^2 (1 - t^2)^{-m/(2(m+2))} A^2 y_1 dt = \\ &= - \frac{m+4}{2} z^{m/2} \int_{-1}^1 \left[\exp \left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} A t \right) \right] t (1 - t^2)^{-m/(2(m+2))} A y_1 dt + \\ &\quad + z^m \int_{-1}^1 \left[\exp \left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} A t \right) \right] t^2 (1 - t^2)^{-m/(2(m+2))} A^2 y_1 dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= z^{m/2} \int_{-1}^1 \left[\exp \left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} A t \right) \right] \frac{d}{dt} \left(\frac{m+2}{2} (1-t^2)^{-m/(2(m+2))+1} \right) A y_1 dt + \\
&+ z^m \int_{-1}^1 \left[\exp \left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} A t \right) \right] t^2 (1-t^2)^{-m/(2(m+2))} A^2 y_1 dt.
\end{aligned}$$

Una integrazione per parti nel primo addendo a destra porta a

$$\begin{aligned}
u''(z) &= -z^{m/2} \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial}{\partial t} \exp \left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} A t \right) \right] A y_1 \cdot \\
&\cdot \left(\frac{m}{2} + 1 \right) (1-t^2)^{-m/(2(m+2))+1} dt + z^m \cdot z \int_{-1}^1 \left[\exp \left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} A t \right) \right] \cdot \\
&\cdot (t^2 - 1 + 1) (1-t^2)^{-m/(2(m+2))} A^2 y_1 dt.
\end{aligned}$$

Così

$$\begin{aligned}
u''(z) &= z^m \cdot z \int_{-1}^1 \left[\exp \left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} A t \right) \right] A^2 y_1 (1-t^2)^{-m/(2(m+2))+1} dt + \\
&+ z^m \cdot z \int_{-1}^1 \left[\exp \left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} A t \right) \right] (1-t^2)^{-m/(2(m+2))+1} A^2 y_1 dt - \\
&- z^m \cdot z \int_{-1}^1 \left[\exp \left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} A t \right) \right] (1-t^2) (1-t^2)^{-m/(2(m+2))} A^2 y_1 dt = z^m A^2 u(z),
\end{aligned}$$

perchè $[\exp(\tau A)] A^2 y_1 = A^2 [\exp(\tau A)] y_1$, se $y_1 \in D_{A^2}$.

Come si vede facilmente, la assunzione che y_1 appartenga a D_{A^2} assicura la validità dei passaggi e, perciò, $u(z)$ soddisfa l'equazione, riuscendo continua, dotata di derivate prima e seconda continue su $[0, +\infty[$, per le proprietà del gruppo generato da A , (cfr. [5]).

È poi chiaro che abbiamo $u(0) = 0$, mentre

$$u'(0) = \left(\int_{-1}^1 (1-t^2)^{-m/(2(m+2))} dt \right) y_1 = C_1 y_1.$$

Analizziamo $v(z)$. Riesce

$$v'(z) = - \int_{-1}^1 \left[\exp \left(- 2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} At \right) \right] (1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} t z^{m/2} A y_0 dt .$$

Se $m/2 \geq 1$, chiaramente $v'(z)$ riesce derivabile anche nell'origine. Ciò non sembra, a priori, assicurato se $m/2 < 1$.

Consideriamo allora (si noti che $v'(0) = 0$) il rapporto incrementale

$$\begin{aligned} \frac{v'(z)}{z} &= - z^{m/2-1} \int_{-1}^1 \left[\exp \left(- 2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} At \right) \right] t (1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} A y_0 dt = \\ &= z^{m/2-1} \int_{-1}^1 \left[\exp \left(- 2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} At \right) \right] \frac{d}{dt} \left(\frac{m+2}{m} (1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))+1} \right) A y_0 dt = \\ &= - z^{m/2-1} \int_{-1}^1 \left[\exp \left(- 2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} At \right) \right] \left(- 2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} \right) \frac{m+2}{m} \cdot \\ &\quad \cdot (1-t^2)^{m/(2(m+2))} A^2 y_0 dt = \frac{2}{m} z^m \int_{-1}^1 \left[\exp \left(- 2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} At \right) \right] \cdot \\ &\quad \cdot (1-t^2)^{m/(2(m+2))} A^2 y_0 dt \xrightarrow{z \rightarrow 0^+} 0 . \end{aligned}$$

Di qui, esiste $v''(0) = 0$. D'altra parte,

$$v(0) = \left(\int_{-1}^1 (1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} dt \right) y_0 = C_0 y_0$$

e risulta quindi $v''(z) = z^m A^2 v(z)$ per $z = 0$.

Sia $z > 0$. Allora

$$\begin{aligned} v''(z) &= - \frac{m}{2} z^{m/2-1} \int_{-1}^1 \left[\exp \left(- 2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} At \right) \right] (1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} t A y_0 dt + \\ &+ z^m A^2 \int_{-1}^1 \left[\exp \left(- 2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} At \right) \right] t^2 (1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} y_0 dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= z^m A^2 \int_{-1}^1 \left[\exp \left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} A t \right) \right] (t^2 - 1 + 1)(1 - t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} y_0 dt - \\
&- \frac{m}{2} z^{m/2-1} \int_{-1}^1 \left[\exp \left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} A t \right) \right] t(1 - t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} A y_0 dt = \\
&= z^m A^2 v(z) - z^m A^2 \int_{-1}^1 \left[\exp \left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} A t \right) \right] (1 - t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))+1} y_0 dt + \\
&+ z^m A^2 \int_{-1}^1 \left[\exp \left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} A t \right) \right] (1 - t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))+1} y_0 dt = \\
&= (\text{cfr. l'espressione di } v'(z)/z \text{ sopra ottenuta}) = z^m A^2 v(z).
\end{aligned}$$

Ne segue che se $x_0, x_1 \in D_{A^2}$, allora la funzione $w(z)$ definita da

$$\begin{aligned}
w(z) = C_0^{-1} \int_{-1}^1 \left[\exp \left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} A t \right) \right] (1 - t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} x_0 dt + \\
+ C_1^{-1} z \int_{-1}^1 \left[\exp \left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} A t \right) \right] (1 - t^2)^{-m/(2(m+2))} x_1 dt
\end{aligned}$$

è soluzione stretta del problema (1). In particolare, otteniamo una estensione, relativa a $m = 1$, del lavoro [3], avendo eliminato l'ipotesi superflua $x_0 \in D_{A^2}$.

Stabiliamo così il primo risultato:

TEOREMA 1. *Se A è il generatore infinitesimale di un gruppo di operatori lineari di classe C_0 nello spazio di Banach X e $x_0, x_1 \in D_{A^2}$, allora il problema (1) ha una soluzione stretta.*

Prima di considerare l'equazione « ellittica »

$$w''(z) = z^m B w(z), \quad z \in [0, T], \quad m > 0,$$

ci sembra opportuno richiamare alcuni risultati sulle potenze di un operatore lineare chiuso.

Sia B un operatore lineare chiuso a dominio denso in X , tale che esiste l'inverso $(s + B)^{-1} \in L(X, X)$, per ogni $s > 0$ e vale

$$(2) \quad \|(s + B)^{-1}\| \leq M/s, \quad s > 0.$$

Si sa che allora esiste $(\lambda + B)^{-1}$ per ogni $\lambda \in \mathbf{C}$ soddisfacente $|\arg \lambda| < \pi - \omega$, $0 < \omega < \pi$, e che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una costante $M_\varepsilon > 0$ (indipendente da λ), per cui

$$(3) \quad \|(\lambda + B)^{-1}\| \leq M_\varepsilon/|\lambda|, \quad |\arg \lambda| < \pi - \omega - \varepsilon.$$

Si dice che B è di tipo (ω, M) . Ebbene, per un operatore siffatto, si definisce la potenza B^α , $0 < \alpha < 1$, che risulta essere un operatore lineare chiuso di tipo $(\alpha\omega, M)$.

Dalla (3) segue che se $\alpha\omega < \pi/2$, allora $-B^\alpha$ è il generatore infinitesimale del semigruppoo olomorfo $\exp(-tB^\alpha)$, $t \geq 0$.

A noi interessa il caso $\alpha = \frac{1}{2}$, per cui, se B è di tipo (ω, M) , $-B^{\frac{1}{2}}$ genera un semigruppoo olomorfo.

Valgono inoltre i seguenti risultati:

i) Se $0 < \alpha, \beta, \alpha + \beta < 1$, allora

$$B^\alpha B^\beta x = B^\beta B^\alpha x = B^{\alpha+\beta} x, \quad x \in D_{B^{\alpha+\beta}}, \quad (\text{cfr. [6], p. 127}).$$

$$\text{ii) } x \in D_B, \quad 0 < \alpha < 1 \Rightarrow B^\alpha x = \sin \pi\alpha/\pi \int_0^\infty s^{\alpha-1} (B + s)^{-1} Bx \, ds,$$

(cfr. [6], p. 127).

$$\text{iii) } x \in D_B \Rightarrow \lim_{\alpha \nearrow 1} \|B^\alpha x - Bx\| = 0, \quad (\text{cfr. [7], p. 267}).$$

Dalle affermazioni richiamate i)-iii) possiamo dedurre che

$$\forall x \in D_B, \quad Bx = B^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} x.$$

In effetti,

$$\begin{aligned} Bx &= \lim_{\alpha \nearrow 1} B^\alpha x = \lim_{\alpha \nearrow 1} B^{\frac{1}{2} + \alpha - \frac{1}{2}} x = \lim_{\alpha \nearrow 1} B^{\alpha - \frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} x = \\ &= \lim_{\beta \nearrow \frac{1}{2}} B^\beta B^{\frac{1}{2}} x = \lim_{\beta \nearrow \frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} B^\beta x, \end{aligned}$$

il limite essendo da intendersi come limite nella norma di X .

D'altra parte, se ad esempio $\beta \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$ e $y \in D_B$, poichè

$$B^{\frac{1}{2}}y - B^{\beta}y = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (s^{-\frac{1}{2}} - s^{\beta-1})(s+B)^{-1}By \, ds + \\ + \frac{1 - \operatorname{sen} \pi\beta}{\pi} \int_0^{\infty} s^{\beta-1}(s+B)^{-1}By \, ds ,$$

allora, applicando il Teorema della convergenza dominata (suddividendo il dominio di integrazione in $]0, 1[$ e $[1, +\infty[$), otteniamo

$$\|B^{\frac{1}{2}}y - B^{\beta}y\| \xrightarrow[\beta \nearrow \frac{1}{2}]{} 0 .$$

Per la chiusura dell'operatore $B^{\frac{1}{2}}$, l'affermazione segue.

Sia dunque B un operatore di tipo (ω, M) e sia $y_0 \in D_B$.

È facile riconoscere che se T_d è un fissato reale positivo, allora la funzione $u(\xi)$, $\xi \in [-T_d, T_d]$, definita da

$$u(\xi) = \frac{1}{2} [\exp [-(T_d - \xi)B^{\frac{1}{2}}] + \exp [-(T_d + \xi)B^{\frac{1}{2}}]] y_0 ,$$

è una soluzione stretta, nel senso corrispondente alla Definizione 1, del problema

$$(4) \quad \begin{cases} u''(\xi) = Bu(\xi) , & \xi \in [-T_d, T_d] , \\ u(0) = [\exp (-T_d B^{\frac{1}{2}})] y_0 , \\ u'(0) = 0 . \end{cases}$$

Servendoci di queste osservazioni, risolveremo, per dati sufficientemente « regolari », il problema di Cauchy per l'equazione ellittica sopra scritta; (cfr., ad esempio, [2] e [4]).

TEOREMA 2. *Se B è un operatore di tipo (ω, M) e riesce $u_0 = [\exp (-T_0 B^{\frac{1}{2}})] y_0$, $u_1 = [\exp (-T_1 B^{\frac{1}{2}})] y_1$, dove $T_i > 2/(m+2)$, ($i = 0, 1$), allora il problema*

$$(5) \quad \begin{cases} v''(z) = z^m Bv(z) , & z \in [0, T], \, m > 0 , \\ v(0) = u_0 , \\ v'(0) = u_1 , \end{cases}$$

ha una soluzione stretta (cfr. la Def. 1).

DIMOSTRAZIONE. Posto $\xi = z/T$, $v(z) = v(T\xi) = w(\xi)$, se $v(z)$ riesce soluzione di (5), allora da $v''(z) = T^{-2}w''(\xi)$ segue

$$\begin{cases} w''(\xi) = \xi^m(T^{m+2}B)w(\xi), & \xi \in [0, 1], \\ w(0) = u_0, \\ w'(0) = Tu_1, \end{cases}$$

e l'operatore $T^{m+2}B = B_1$ è dello stesso tipo di B ; in effetti,

$$(\lambda + B_1)^{-1} = T^{-(m+2)}(\lambda T^{-(m+2)} + B)^{-1}$$

esiste per ogni $\lambda > 0$ e

$$\|(\lambda + B_1)^{-1}\| = T^{-(m+2)}\|(\lambda T^{-(m+2)} + B)^{-1}\| \leq M/\lambda, \quad \lambda > 0.$$

Si può pertanto supporre che risulti $T = 1$.

Sia $T_0 > 2/(m+2)$ e sia $u = u(\xi)$ soluzione stretta del problema (4). Consideriamo

$$f(t, z) = -\frac{2}{m+2}tz^{m/2+1}, \quad t \in [-1, 1], \quad z \in [0, 1].$$

È chiaro che

$$f([-1, 1] \times [0, 1]) = \left[-\frac{2}{m+2}, \frac{2}{m+2}\right].$$

Allora riesce

$$T_0 + \frac{2}{m+2}tz^{m/2+1} \geq T_0 - \frac{2}{m+2} > 0, \quad t \in [-1, 1], \quad z \in [0, 1],$$

e quindi è lecito scrivere

$$\begin{aligned} u\left(-\frac{2}{m+2}tz^{m/2+1}\right) &= \frac{1}{2}\left[\exp\left[-\left(T_0 + \frac{2}{m+2}tz^{m/2+1}\right)B^\dagger\right] + \right. \\ &\quad \left. + \exp\left[-\left(T_0 - \frac{2}{m+2}tz^{m/2+1}\right)B^\dagger\right]\right]y_0. \end{aligned}$$

In analogia a quanto si è fatto per provare il Teorema 1, poniamo

$$\varphi(z) = \int_{-1}^1 u \left(-\frac{2}{m+2} t z^{m/2+1} \right) (1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} dt, \quad z \in [0, 1].$$

Risulta

$$\varphi'(z) = -z^{m/2} \int_{-1}^1 u' \left(-\frac{2}{m+2} t z^{m/2+1} \right) t (1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} dt, \quad z \in [0, 1],$$

e quindi, in particolare, $\varphi'(0) = 0$. Si vede poi che $\varphi(z)$ ha derivata seconda anche nell'origine, con $\varphi''(0) = 0$. Così, anche nello zero, $\varphi(z)$ soddisfa l'equazione differenziale di (5).

Poi, se $z \in]0, 1]$, vale l'espressione

$$\begin{aligned} \varphi''(z) &= -\frac{m}{2} z^{m/2+1} \int_{-1}^1 u' \left(-\frac{2}{m+2} t z^{m/2+1} \right) t (1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} dt + \\ &+ z^m \int_{-1}^1 u'' \left(-\frac{2}{m+2} t z^{m/2+1} \right) t^2 (1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} dt = \\ &= z^m \int_{-1}^1 u'' \left(-\frac{2}{m+2} t z^{m/2+1} \right) (t^2 - 1 + 1) (1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} dt + \\ &+ \frac{m+2}{2} z^{m/2-1} \int_{-1}^1 u' \left(-\frac{2}{m+2} t z^{m/2+1} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} (1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))+1} dt. \end{aligned}$$

Integrando per parti, riconosciamo che l'ultimo termine coincide con

$$z^m \int_{-1}^1 B u \left(-\frac{2}{m+2} t z^{m/2+1} \right) (1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} dt = z^m B \varphi(z), \quad z \in]0, 1].$$

Poichè $u(0) = u_0$, $u'(0) = 0$, abbiamo inoltre

$$\varphi(0) = \left(\int_{-1}^1 (1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} dt \right) u_0 = C_0 u_0, \quad \varphi'(0) = 0.$$

Sia ora

$$u_1(\xi) = \frac{1}{2} [\exp [-(T_1 - \xi) B^*] + \exp [-(T_1 + \xi) B^*]] y_1, \quad \xi \in [-T_1, T_1],$$

e poniamo

$$\psi(z) = z \int_{-1}^1 u_1 \left(-\frac{2}{m+2} t z^{m/2+1} \right) (1-t^2)^{-m/(2(m+2))} dt, \quad z \in [0, 1].$$

$\psi(z)$ riesce ben definita per quanto già visto, continua, dotata anzi di derivate prima e seconda continue su $[0, 1]$; precisamente,

$$\begin{aligned} \psi'(z) = & \int_{-1}^1 u_1 \left(-\frac{2}{m+2} t z^{m/2+1} \right) (1-t^2)^{-m/(2(m+2))} dt - \\ & - z^{m/2+1} \int_{-1}^1 u_1' \left(-\frac{2}{m+2} t z^{m/2+1} \right) t (1-t^2)^{-m/(2(m+2))} dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi''(z) = & z^m \left(-z \int_{-1}^1 u_1'' \left(-\frac{2}{m+2} t z^{m/2+1} \right) (1-t^2)^{-m/(2(m+2))+1} dt + \right. \\ & + z \int_{-1}^1 u_1'' \left(-\frac{2}{m+2} t z^{m/2+1} \right) (1-t^2)^{-m/(2(m+2))} dt \Big) - \\ & - \left(\frac{m}{2} + 2 \right) z^{m/2} \int_{-1}^1 u_1' \left(-\frac{2}{m+2} t z^{m/2+1} \right) t (1-t^2)^{-m/(2(m+2))} dt. \end{aligned}$$

Una integrazione per parti nell'ultimo integrale porta a riconoscere che

$$\begin{aligned} \psi''(z) = & z^m B\psi(z) - z^{m+1} \int_{-1}^1 u_1'' \left(-\frac{2}{m+2} t z^{m/2+1} \right) (1-t^2)^{-m/(2(m+2))+1} dt + \\ & + z^{m/2} \int_{-1}^1 u_1'' \left(-\frac{2}{m+2} t z^{m/2+1} \right) (1-t^2)^{-m/(2(m+2))+1} z^{m/2+1} dt = z^m B\psi(z). \end{aligned}$$

Infine, abbiamo

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = \left(\int_{-1}^1 (1-t^2)^{-m/(2(m+2))} dt \right) y_1 = C_1 y_1.$$

Segue che $v(z) = C_0^{-1}\varphi(z) + C_1^{-1}\psi(z)$, $z \in [0, 1]$, è soluzione stretta del problema (5) e ciò chiude la prova del Teorema.

OSSERVAZIONE 1. Se C è un operatore massimale dissipativo in uno spazio di Hilbert, allora a $B = -C$ è applicabile il Teorema 2 (cfr. [6], p. 128).

OSSERVAZIONE 2. Se m è un intero positivo pari, la soluzione $w(z)$ del problema (1) si prolunga in una soluzione su tutto l'asse reale.

Analogamente, la $v(z)$ soluzione del problema (5) su $[0, T]$ riesce soluzione di tale problema anche sull'intervallo $[-T, T]$.

Nel caso in cui m è dispari, invece, si presenta il problema del raccordo tra la parte iperbolica e la parte ellittica quando A^2 e $-B$ sono due diverse « realizzazioni » di un medesimo operatore; nei casi concreti, quest'ultimo è un operatore differenziale.

DEFINIZIONE 2. Sia m un numero naturale dispari e sia U un operatore lineare in X di dominio $D_U = D_1 \cup D_2$. Diciamo che $u = u(z)$ è una soluzione stretta del problema

$$(6) \quad \begin{cases} u''(z) = z^m U u(z), & z \in [-T, T], \\ u(0) = u_0, \\ u'(0) = u_1, \end{cases}$$

se u ha derivate prima e seconda continue su $[-T, T]$, $u(z) \in D_1$, $z \geq 0$, $u(z) \in D_2$, $z \leq 0$, e vale (6).

Supponiamo che riesca, da una parte, $U = A^2$, $D_{A^2} = \{u \in D_A, Au \in D_A\}$, A essendo il generatore infinitesimale di un gruppo di operatori lineari di classe C_0 (e allora, se $u_0, u_1 \in D_{A^2}$, il Teorema 1 consente di affermare la esistenza di una soluzione stretta $w(z)$ di (1) su $[0, T]$); inoltre, sia $-U = B$, con dominio D_B , in generale diverso da D_{A^2} , un operatore di tipo (ω, M) .

Dal Teorema 2 segue allora che esiste una soluzione stretta di

$$\begin{cases} v''(t) = t^m(-U)v(t) = t^m Bv(t), & t \in [0, T], \\ v(0) = u_0, & v'(0) = -u_1, \end{cases}$$

purchè risulti $u_i \in \bigcup_{k > 2/(m+2)} \exp[-kB^{\frac{1}{2}}](D_B)$, ($i = 0, 1$).

Allora $w_1(z) = v(-z)$, $z \in [-T, 0]$, risolve il problema di Cauchy ellittico

$$\begin{cases} w_1''(z) = -z^m Bw_1(z), & z \in [-T, 0], \\ w_1(0) = u_0, & w_1'(0) = u_1. \end{cases}$$

Notiamo che riesce $w''(0) = w_1''(0) = 0$. Posto

$$u(z) = \begin{cases} w(z), & z \in [0, T], \\ w_1(z), & z \in [-T, 0], \end{cases}$$

$u(z)$ è una funzione continua, con derivate prima e seconda continue su $[-T, T]$. Se poi poniamo $D_U = D_{A^1} \cup D_B$, possiamo affermare, in virtù delle proprietà di $w(z)$ e di $w_1(z)$, che se

$$u_0 = \exp[-T_0 B^{\frac{1}{2}}]v_0, \quad u_1 = \exp(-T_1 B^{\frac{1}{2}})v_1,$$

$$v_0, v_1 \in D_B, \quad T_0, T_1 > 2/(m+2) \quad \text{e} \quad u_0, u_1 \in D_{A^1},$$

allora (6) ha la soluzione stretta $u(z)$.

Facciamo notare che nei casi concreti, il fatto che $v_i \in D_B$ comporta il soddisfacimento di certe condizioni ai limiti che, in genere, non sono implicate dalla appartenenza a D_{A^1} .

APPLICAZIONE. Sia m un numero reale positivo e sia X uno qualunque degli spazi $L^p(R)$, $1 \leq p < +\infty$.

Sia U l'operatore differenziale d^2/dx^2 : $(Uf)(x) = f''(x)$.

Posto

$$D_A = \{f \in X; f \text{ localmente assolutamente continua su } R(f \in AC_{\text{loc}}(R)),$$

$$f' \in X\}, \quad Af = f',$$

segue che

$$D_{A^2} = \{f \in X; f, f' \in AC_{\text{loc}}(R) \cap X, f'' \in X\}, \quad A^2 f = f''.$$

Siano allora u_0, u_1 elementi di D_{A^2} , per cui possiamo dire, grosso modo, che esse sono funzioni (di x) in L^p , dotate di derivate prima e seconda in L^p anch'esse. Allora il problema iperbolico (1), essendo A generatore infinitesimale di un gruppo di classe C_0 in X , ha la soluzione stretta

$$\begin{aligned} u(z, x) = & C_0 \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} \left(\exp\left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} At\right) u_0 \right)(x) dt + \\ & + C_1 z \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-m/(2(m+2))} \left(\exp\left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} At\right) u_1 \right)(x) dt. \end{aligned}$$

Ora, $[(\exp tA)f](x) = f(x+t)$ e quindi

$$\left[\exp\left(-2 \frac{z^{m/2+1}}{m+2} At\right) u_i \right](x) = u_i\left(x - \frac{2}{m+2} z^{m/2+1} t\right), \quad i = 0, 1.$$

Segue

$$\begin{aligned} u(z, x) = & C_0 \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} u_0\left(x - \frac{2}{m+2} z^{m/2+1} t\right) dt + \\ & + C_1 z \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-m/(2(m+2))} u_1\left(x - \frac{2}{m+2} z^{m/2+1} t\right) dt. \end{aligned}$$

Posto $t = 2s - 1$, otteniamo

$$\begin{aligned} u(z, x) = & C'_0 \int_{-1}^1 [s(1-s)]^{-(m+4)/(2(m+2))} u_0\left(x + (1-2s) \frac{2}{m+2} z^{m/2+1}\right) ds + \\ & + C'_1 z \int_0^1 [s(1-s)]^{-m/(2(m+2))} u_1\left(x + (1-2s) \frac{2}{m+2} z^{m/2+1}\right) ds, \end{aligned}$$

(cfr. [1], p. 36).

Sia $D_B = H_0^{2,p}(R) = H^{2,p}(R)$, $(Bu)(x) = -u''(x)$, $u \in D_B$.

Allora $-B$ è il generatore infinitesimale di un semigruppato in $X = L^p(R)$ e, in più, anche $-B^{\frac{1}{2}}$ genera un semigruppato $\exp(-tB^{\frac{1}{2}})$; precisamente,

$$(\exp(-tB^{\frac{1}{2}})u)(x) = \frac{\pi}{t} \int_{-\infty}^{\infty} [t^2 + (x-y)^2]^{-1} u(y) dy.$$

Se $u_i = \exp[-T_i B^{\frac{1}{2}}]v_i$ ($i = 0, 1$), dove $v_i \in H^{2,p}(R)$, e quindi $u_i(x)$ è il valore in (x, T_i) di una funzione armonica la cui traccia sull'asse reale è una funzione $v_i(x) \in H^{2,p}(R)$, possiamo asserire che il problema di Cauchy per l'equazione ellittica

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(z, x)}{\partial z^2} = z^m \frac{\partial^2 u(z, x)}{\partial x^2}, & z \in [-T, 0], x \in R, \\ u(0, x) = u_0(x), & \frac{\partial u(0, x)}{\partial z} = u_1(x), \quad x \in R, \end{cases}$$

ha una soluzione stretta, m essendo un intero positivo dispari.

Si noti che dalle assunzioni segue che $u_0, u_1 \in D_B = H^{2,p}(R)$.

In forza di un Teorema di Sobolev, se $v_i \in H^{k,p}(R)$, k sufficientemente grande, allora u_i appartiene anche a D_{A^2} .

In queste ipotesi di regolarità sui dati iniziali $u_0(x), u_1(x)$, si è quindi ottenuto una soluzione stretta, nel senso della Definizione 2, del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(z, x)}{\partial z^2} = z^m \frac{\partial^2 u(z, x)}{\partial x^2}, & (z, x) \in [-T, T] \times R, m \text{ dispari} \\ u(0, x) = u_0(x), \\ \frac{\partial u(0, x)}{\partial z} = u_1(x). \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. V. BITSADZE, *Equations of the mixed type*, ed. Pergamon Press (1964).
- [2] J. A. DONALDSON, *An operational calculus for a class of abstract operator equations*, J. of Math. Anal. and Appl., **37** (1972), pp. 167-184.

- [3] A. FAVINI, *Su un'equazione astratta di tipo Tricomi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **53** (1975), pp. 257-267.
- [4] P. HENRICI, Zeitsch. Angew. Math. Phys., **8** (1957), pp. 169-203.
- [5] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, ed. Springer (1966).
- [6] S. G. KREIN, *Linear Differential Equations in Banach Space*, ed. AMS (1972).
- [7] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, ed. Springer (1966).

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 dicembre 1975.