

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

U. MASSARI

L. PEPE

Successioni convergenti di ipersuperfici di curvatura media assegnata

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 53 (1975), p. 53-68

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__53_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Successioni convergenti di ipersuperfici di curvatura media assegnata.

U. MASSARI - L. PEPE (*)

L'indagine sulle superfici di curvatura media assegnata in senso generalizzato, ha avuto recentemente notevole impulso, come prolungamento dello studio delle superfici di curvatura media nulla (superfici di area minima).

La ricerca si è sviluppata lungo due direttrici: da una parte sono state studiate le superfici che sono grafici di funzioni, soluzioni in senso generalizzato dell'equazione:

$$(0.1) \quad \sum_{i=1}^n D_i \left(\frac{D_i f(x)}{\sqrt{1 + |Df(x)|^2}} \right) = A(x, f(x))$$

(caso cartesiano); dall'altra il problema è stato ambientato nella classe delle frontiere degli insiemi di perimetro localmente finito, nel senso di Caccioppoli e De Giorgi (caso parametrico).

Per quanto riguarda il caso cartesiano, risultati molto precisi sono stati ottenuti da Giaquinta in ([1]), ([2]) e ([3]); da Giusti ([4]) e Miranda ([10]).

Massari ha invece esteso i risultati di esistenza e di regolarità di De Giorgi e Miranda per le frontiere minimali, alle frontiere di insiemi di curvatura media limitata ([5]) ed in L^p ([6]).

In questo lavoro studieremo il comportamento delle frontiere di

(*) Indirizzo degli AA.: Istituto Matematico, Università degli Studi, Via Savonarola 9, 44100 Ferrara.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale di Analisi Funzionale ed Applicazioni del C.N.R.

successioni convergenti di insiemi aventi curvatura (media) assegnata, se queste curvature tendono ad una curvatura fissata.

I risultati ottenuti hanno come conseguenza immediata un teorema di regolarità locale per le soluzioni dell'equazione (0.1) se la norma L^p ($p > n + 1$) della funzione $A(x, t)$ è abbastanza piccola. Questo risultato si viene ad affiancare ad un risultato analogo di Vergara Caffarelli, relativo al problema di Dirichlet per l'equazione (0.1), nel caso che A sia funzione soltanto di x ([11]).

NOTAZIONI. Indichiamo con $B_\varrho(x) = \{y \in R^n; |y - x| < \varrho\}$ e con ω_n la misura della sfera unitaria di R^n ($n \geq 2$).

Se E è un sottoinsieme di R^n , chiamiamo $\bar{E}$ la sua chiusura e ∂E la sua « frontiera essenziale »: cioè, l'insieme dei punti $x \in R^n$, tali che per ogni $\varrho > 0$:

$$\text{mis}(B_\varrho(x) \cap E) \neq 0$$

$$\text{mis}(B_\varrho(x) \cap (R^n - E)) \neq 0$$

Se Ω è un aperto di R^n , diremo che $f \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$ se $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e le derivate della f , nel senso delle distribuzioni: $(D_1 f, \dots, D_n f)$ sono misure di Radon in Ω . La variazione totale della misura $(D_1 f, \dots, D_n f)$ su $K \subset\subset \Omega$ sarà:

$$\int_K |Df|$$

Un insieme $E \subset R^n$ si dirà di Caccioppoli in Ω se la sua funzione caratteristica $\varphi_E(x) \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$.

Inoltre chiameremo *frontiera ridotta* di E l'insieme $\partial^* E$ degli $x \in \partial E$ per i quali:

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{\int_{B_\varrho(x)} D\varphi_E}{\int_{B_\varrho(x)} |D\varphi_E|} = \nu(x) \quad \text{e} \quad |\nu(x)| = 1.$$

Diremo, infine, che un insieme E di Caccioppoli ha, in Ω , *curvatura media* $A(x) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ se per ogni compatto K di Ω , E rende minimo

il funzionale ⁽¹⁾:

$$(0.2) \quad \mathfrak{I}_A(F) = \int_K |D\varphi_F| + \int_K \varphi_F(x) A(x) dx$$

tra gli insiemi di Caccioppoli F che coincidono con E fuori di K .

Ringraziamo Mario Miranda con il quale abbiamo discusso i risultati di questo lavoro.

1. Primi teoremi di convergenza.

Cominciamo con il provare alcuni risultati relativi al comportamento degli insiemi di Caccioppoli rispetto a certi tipi di convergenza.

TEOREMA 1. *Sia Ω un aperto di R^n ($n \geq 2$), $\{A_h\}_h$ una successione di funzioni di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ convergente in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ad una funzione A . Se $\{E_h\}_h$ è una successione di insiemi di Caccioppoli convergente in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ad un insieme E ed E_h ha, in Ω , curvatura media A_h , allora:*

i) E è un insieme di Caccioppoli di Ω .

ii) E ha, in Ω , curvatura media $A(x)$.

DIM. Dato che φ_{E_h} converge a φ_E in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, si può supporre, passando eventualmente ad una sottosuccessione, che, per ogni compatto K di Ω :

$$(1.1) \quad \sum_{h=1}^{\infty} \int_K |\varphi_{E_{h+1}}(x) - \varphi_{E_h}(x)| dx < +\infty.$$

Fissato K , sia B un aperto relativamente compatto di Ω con frontiera lipschitziana, contenente K , tale che, per ogni h :

$$(1.2) \quad \int_{\partial B} |D\varphi_{E_h}| = 0,$$

$$(1.3) \quad \sum_{h=1}^{\infty} \int_{\partial B} |\varphi_{E_{h+1}}(x) - \varphi_{E_h}(x)| dH_{n-1} < +\infty.$$

⁽¹⁾ Per la giustificazione di questa definizione si rinvia a ([5]).

Se poniamo, per ogni h , $M_h = E_h \cap (\Omega - B)$, dato che E_h ha in Ω curvatura media A_h , si ha:

$$(1.4) \quad \int_{\bar{B}} |D\varphi_{E_h}| \leq \int_{\bar{B}} |D\varphi_{M_h}| - \int_{\bar{B}} \varphi_{E_h}(x) A_h(x) dx.$$

Allora, per i risultati di Miranda sulle tracce delle funzioni di $BV_{\text{loc}}(\Omega)$ (cfr. [7] pag. 243) e per (1.2):

$$(1.5) \quad \int_{\bar{B}} |D\varphi_{M_h}| = \int_{\partial B} \varphi_{E_h}(x) dH_{n-1}.$$

Quindi, ricordando che A_h è limitata in $L^1(B)$, da (1.3) segue che, per ogni h :

$$(1.6) \quad \int_B |D\varphi_{E_h}| \leq \text{cost.}$$

e questa, per ([12] pag. 28) prova la i).

Per provare ii), fissato un compatto K di Ω ed un insieme di Caccioppoli M coincidente con E fuori di K , possiamo ancora indicare con B un aperto relativamente compatto di Ω , con frontiera lipschitziana, contenente K , tale che, oltre alle (1.2) e (1.3), valgano le condizioni:

$$(1.7) \quad \int_{\partial B} |D\varphi_E| = 0,$$

$$(1.8) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\partial B} |\varphi_E(x) - \varphi_{E_h}(x)| dH_{n-1} = 0.$$

Posto, per ogni h , $M_h = (M \cap B) \cup (E_h \cap (\Omega - B))$, confrontando E_h ed M_h , si ha:

$$(1.9) \quad \int_{\bar{B}} |D\varphi_{E_h}| + \int_{\bar{B}} \varphi_{E_h}(x) A_h(x) dx \leq \int_{\bar{B}} |D\varphi_{M_h}| + \int_{\bar{B}} \varphi_{M_h}(x) A_h(x) dx \\ = \int_B |D\varphi_M| + \int_{\partial B} |\varphi_{E_h}(x) - \varphi_E(x)| dH_{n-1} + \int_B \varphi_M(x) A_h(x) dx$$

Dato che la variazione totale del gradiente è semicontinua inferiormente, rispetto alla convergenza in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, per la (1.8), passando al limite per h tendente all'infinito, in quest'ultima relazione, si ha:

$$(1.10) \quad \int_B |D\varphi_E| + \int_B \varphi_E(x) A(x) dx \leq \int_B |D\varphi_M| + \int_B \varphi_M(x) A(x) dx$$

E questa, ricordando che $M = E$ in $B - K$, implica ii).

Proviamo ora un risultato che fornisce una condizione sufficiente per la convergenza dei perimetri degli insiemi di Caccioppoli.

TEOREMA 2. *Sia Ω un aperto di R^n ; $\{A_h\}_h$ una successione di funzioni di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ convergente in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ad una funzione A . Se E_h ha, in Ω , curvatura media A_h ; allora, se D è un insieme relativamente compatto di Ω tale che:*

$$(1.11) \quad \int_{\partial D} |D\varphi_E| = 0$$

si ha:

$$(1.12) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \int_D |D\varphi_{E_h}| = \int_D |D\varphi_E|.$$

DIM. Sia B un aperto relativamente compatto di Ω con frontiera lipschitziana, contenente D e verificante le condizioni: (1.2), (1.3), (1.7) e (1.8), confrontando E_h con $M_h = (E \cap B) \cup (E_h \cap (\Omega - B))$, si ha:

$$(1.13) \quad \int_B |D\varphi_{E_h}| + \int_B \varphi_{E_h}(x) A_h(x) dx \leq \\ \leq \int_B |D\varphi_E| + \int_{\partial B} |\varphi_{E_h}(x) - \varphi_E(x)| dH_{n-1} + \int_B \varphi_E(x) A_h(x) dx.$$

Allora:

$$(1.14) \quad \maxlim_{h \rightarrow \infty} \int_B |D\varphi_{E_h}| \leq \int_B |D\varphi_E|$$

quindi:

$$(1.15) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \int_B |D\varphi_{E_h}| = \int_B |D\varphi_E|$$

dalla quale si ricava che:

$$(1.16) \quad \max_{\bar{D}} \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\bar{D}} |D\varphi_{E_h}| \leq \int_{\bar{B}} |D\varphi_E| - \min_{B-\bar{D}} \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{B-\bar{D}} |D\varphi_{E_h}| \leq \\ \leq \int_B |D\varphi_E| - \int_{B-\bar{D}} |D\varphi_E| = \int_{\bar{D}} |D\varphi_E|.$$

D'altra parte:

$$(1.17) \quad \int_{\bar{D}} |D\varphi_E| \leq \min_{\bar{D}} \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\bar{D}} |D\varphi_{E_h}| \quad (\bar{D} \text{ è la parte interna di } D).$$

Da queste due ultime relazioni e dalla (1.11) segue la tesi.

2. Un teorema di regolarità.

I risultati di regolarità di Massari ([6]), assicurano che se E è un insieme di Caccioppoli di curvatura media $A(x) \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$, $p > n$; allora esiste un aperto Ω_0 , contenuto in Ω tale che, se $\partial^* E \cap \Omega$ è la frontiera ridotta di E contenuta in Ω ed H_s è la misura di Hausdorff s -dimensionale in R^n :

i) $\partial E \cap \Omega_0 = \partial^* E \cap \Omega_0$ è un'ipersuperficie di classe $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$;

ii) $H_s(\Omega - \Omega_0) = 0$ per ogni $s > n - 8$.

La regolarità della frontiera di insiemi di Caccioppoli di curvatura media assegnata può essere dedotta dal seguente teorema di convergenza:

TEOREMA 3. *Sia $\{E_h\}_h$ una successione di insiemi di Caccioppoli di curvatura media $A_h \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$, $p > n$. Se:*

$$(2.1) \quad \varphi_{E_h}(x) \rightarrow \varphi_E(x) \quad \text{in } L_{\text{loc}}^1(\Omega)$$

$$(2.2) \quad \partial E_h \cap \Omega \ni x_h \rightarrow x \in \partial^* E \cap \Omega$$

$$(2.3) \quad A_h(x) \rightarrow A(x) \quad \text{in } L_{\text{loc}}^1(\Omega)$$

e, per ogni compatto K di Ω , esiste una costante $\gamma(K)$ tale che:

$$(2.4) \quad \|A_h\|_{L^p(K)} \leq \gamma(K) \quad \forall h \in N.$$

Allora esiste $h_0 \in N$, tale che, per ogni $h > h_0$, si ha:

$$(2.5) \quad x_h \in \partial^* E_h \cap \Omega,$$

$$(2.6) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \nu_h(x_h) = \nu(x).$$

DIM. Per il teorema 1, E è un insieme di Caccioppoli di curvatura media $A(x)$, quindi per la (1.1) di ([6]) si ha che:

$$(2.7) \quad \int_{B_\varrho(x)} |D\varphi_E| \leq \left(\frac{n\omega_n}{2} + \omega_n^{1-1/p} \|A\|_{L^p(B_\varrho(x))} \varrho^{1-n/p} \right) \varrho^{n-1},$$

ne deriva, essendo $x \in \partial^* E \cap \Omega$, che:

$$(2.8) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \varrho^{1-n} \left(\int_{B_\varrho(x)} |D\varphi_E| - \left| \int_{B_\varrho(x)} D\varphi_E \right| \right) = 0.$$

Quindi, se $0 < \alpha < 1$, posto $d = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ e $A = \|A\|_{L^p(B_{d/2}(x))}$, esiste ϱ :

$$0 < \varrho < \min \left\{ \frac{d}{2}, \sigma(n, p, A, \alpha)^{2p/(p-n)} \right\}$$

dove $\sigma(n, p, A, \alpha)$ è la costante del lemma 2.1 di [6], tale che:

$$(2.9) \quad \varrho^{1-n} \left(\int_{B_\varrho(x)} |D\varphi_E| - \left| \int_{B_\varrho(x)} D\varphi_E \right| \right) < \sigma(n, p, A, \alpha)$$

allora, dato che si può sempre supporre che:

$$(2.10) \quad \int_{\partial B_\varrho(x)} |D\varphi_E| = 0$$

per il teorema 2 risulta:

$$(2.11) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_\varrho(x)} |D\varphi_{E_h}| = \int_{\bar{B}_\varrho(x)} |D\varphi_E|.$$

D'altra parte, per ((12) pag. 51):

$$(2.12) \quad \int_{\bar{B}_\varrho(x)} D\varphi_{E_h} = \int_{\partial B_\varrho(x)} \varphi_{E_h}(y) \frac{y-x}{|y-x|} dH_{n-1}(y)$$

e quindi:

$$(2.13) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \left| \int_{\bar{B}_\varrho(x)} D\varphi_{E_h} \right| = \left| \int_{\bar{B}_\varrho(x)} D\varphi_E \right|.$$

Posto ora $\varrho_h = |x_h - x|$, per la (2.2), esiste h_0 tale che, per ogni $h > h_0$ vale la relazione: $\varrho_h < \varrho$ e:

$$(2.14) \quad \int_{\bar{B}_\varrho(x)} |D\varphi_{E_h}| - \left| \int_{\bar{B}_\varrho(x)} D\varphi_{E_h} \right| \leq \sigma(n, p, A, \alpha) (\varrho - \varrho_h)^{n-1}.$$

Dato che l'espressione a sinistra della (2.14) è monotona rispetto alla inclusione insiemistica, essendo $\bar{B}_{\varrho-\varrho_h}(x_h) \subset \bar{B}_\varrho(x)$, per ogni $h > h_0$ vale:

$$(2.15) \quad \int_{\bar{B}_{\varrho-\varrho_h}(x_h)} |D\varphi_{E_h}| - \left| \int_{\bar{B}_{\varrho-\varrho_h}(x_h)} D\varphi_{E_h} \right| \leq \sigma(n, p, A, \alpha) (\varrho - \varrho_h)^{n-1}.$$

Siamo così nelle ipotesi del lemma 2.2 di ([6]), grazie al quale si può concludere che: $x_h \in \partial^* E_h \cap \Omega$ e che, per ogni $t: 0 < t < \varrho$ si ha:

$$(2.16) \quad \left| \nu(x) - \frac{\int_{B_t(x)} D\varphi_E}{\int_{B_t(x)} |D\varphi_E|} \right| \leq \eta(n, p, A, \alpha) \left(\frac{t}{\varrho} \right)^{(p-n)/4p}$$

e, analogamente, per ogni $h > h_0$ e per ogni $t: 0 < t < \varrho - \varrho_h$ si ha:

$$(2.17) \quad \left| \nu_h(x_h) - \frac{\int_{B_t(x_h)} D\varphi_{E_h}}{\int_{B_t(x_h)} |D\varphi_{E_h}|} \right| \leq \eta(n, p, A, \alpha) \left(\frac{t}{\varrho - \varrho_h} \right)^{(p-n)/4p}.$$

D'altra parte per quasi tutti i t : $0 < t < \varrho$ è:

$$(2.18) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \left| \frac{\int_{B_t(x_h)} D\varphi_{E_h}}{\int_{B_t(x_h)} |D\varphi_{E_h}|} - \frac{\int_{B_t(x)} D\varphi_E}{\int_{B_t(x)} |D\varphi_E|} \right| = 0$$

e questo, insieme a (2.16) e (2.17), prova la (2.6).

Per verificare le ipotesi del teorema 3, può essere utile il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 1. *Sia $\{E_h\}_h$ una successione di insiemi di Caccioppoli di curvatura media $A_h(x) \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, $p > n$. Se:*

$$(2.19) \quad \varphi_{E_h}(x) \rightarrow \varphi_E(x) \quad \text{in } L^1_{\text{loc}}(\Omega)$$

$$(2.20) \quad \partial E_h \cap \Omega \ni x_h \rightarrow x \in \Omega$$

$$(2.21) \quad A_h(x) \rightarrow A(x) \quad \text{in } L^1_{\text{loc}}(\Omega)$$

e se, per ogni compatto K di Ω , esiste una costante $\gamma(K)$, tale che:

$$(2.22) \quad \|A_h\|_{L^p(K)} \leq \gamma(K) \quad \text{per ogni } h \in N;$$

allora $x \in \partial E \cap \Omega$.

DM. Se, per assurdo, x non appartenesse a ∂E , a meno di passare ai complementari e di sostituire $A(x)$ con $-A(x)$ ⁽²⁾, esiste $\varrho > 0$ tale che:

$$\text{mis}(E \cap B_\varrho(x)) = 0 \quad (\varrho < \tfrac{1}{2} \text{dist}(x, \partial\Omega))$$

quindi, per la (2.19), si ha:

$$(2.23) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \text{mis}(E_h \cap B_\varrho(x)) = 0.$$

D'altra parte, per la (2.20), fissato σ : $0 < \sigma < \varrho/2$, esiste h_0 tale che,

⁽²⁾ In tal caso, per ogni h , si dovrà passare al complementare di E_h e sostituire $A_h(x)$ con $-A_h(x)$.

per ogni $h > h_0$:

$$(2.24) \quad |x_h - x| < \sigma$$

Per tali h risulta:

$$(2.25) \quad \text{mis}(B_\sigma(x_h) \cap E_h) \leq \text{mis}(B_\sigma(x) \cap E_h)$$

Inoltre, per la (1.9) di [6], per ogni t : $0 < t < \sigma$, si ha:

$$(2.26) \quad \int_{B_t(x_h)} |D\varphi_{E_h}| \geq (\omega_{n-1} - c(n, p) \|A_h\|_{L^p(B_t(x_h))} t^{1-n/p}) t^{n-1}.$$

Confrontando E_h con l'insieme di Caccioppoli $L_h = E_h - B_t(x_h)$, risulta:

$$(2.27) \quad \int_{B_t(x_h)} |D\varphi_{E_h}| + \int_{B_t(x_h)} \varphi_{E_h}(x) A_h(x) dx \leq \int_{\partial B_t(x_h)} \varphi_{E_h}(x) dH_{n-1}$$

Da (2.26), (2.27) e dal fatto che $A(x) \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, $p > n$, si ricava che se $\gamma = \gamma(\bar{B}_{d/2}(x))$ e $h > h_0$:

$$(2.28) \quad \int_{\partial B_t(x_h)} \varphi_{E_h}(x) dH_{n-1} \geq (\omega_{n-1} - c_1(n, p, \gamma) t^{1-n/p}) t^{n-1}.$$

Infine, integrando la (2.28) tra 0 e σ si ha:

$$(2.29) \quad \text{mis}(B_\sigma(x_h) \cap E_h) \geq \left(\frac{\omega_{n-1}}{n} - c_2(n, p, \gamma) \sigma^{1-n/p} \right) \sigma^n$$

quindi, per σ abbastanza piccolo:

$$(2.30) \quad \text{mis}(B_\sigma(x_h) \cap E_h) \geq c_3(n) \sigma^n > 0$$

e questo, per la (2.25), contraddice la (2.23).

3. Caso cartesiano.

Diamo una applicazione dei risultati precedenti allo studio della regolarità delle funzioni $f \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$, verificanti per ogni compatto K

di Ω , la disuguaglianza ⁽³⁾:

$$(3.1) \quad \int_K \sqrt{1 + |Df|^2} + \int_K dx \int_0^{f(x)} A(x, t) dt \leq \int_K \sqrt{1 + |Dg|^2} + \int_K dx \int_0^{g(x)} A(x, t) dt$$

per ogni $g \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$, $g = f$ in $\Omega - K$.

Si suppone che:

- (3.2) — $A(x, t)$ è una funzione misurabile in x per ogni $t \in R$, continua e non decrescente in t per ogni $x \in \Omega$;
— per ogni compatto K si Ω :

$$\int_K A(x, 0) f(x) dx > -\infty.$$

OSSERVAZIONE. Quest'ultima condizione assicura che:

$$\int_K dx \int_0^{f(x)} A(x, t) dt > -\infty$$

Infatti:

$$\int_0^{f(x)} A(x, t) dt \geq \begin{cases} f(x) A(x, 0) & \text{se } f(x) \geq 0, \\ f(x) A(x, 0) & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

Una tale funzione f può essere considerata come soluzione, in senso generalizzato, di (0.1) (cfr. [10]).

Cominciamo con lo scrivere la (3.1) usando, come è consueto, il linguaggio delle frontiere di insiemi:

PROPOSIZIONE 2. Se $f \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$ verifica (3.1) e $A(x, t) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega \times R)$ verifica (3.2), allora l'insieme $E = \{(x, t); x \in \Omega, t \leq f(x)\}$ è un insieme di Caccioppoli in $\Omega \times R$ di curvatura media $A(x, t)$.

⁽³⁾ $\int_K \sqrt{1 + |Df|^2}$ è la variazione totale su K della misura vettoriale le cui componenti sono la misura di Lebesgue e le misure $(D_1 f, D_2 f, \dots, D_n f)$.

Dim. Facciamo vedere, in primo luogo, che, per ogni compatto K di Ω , se M è un insieme di Caccioppoli in $\Omega \times R$ tale che $(M - E) \cup \cup (E - M) \subset K \times R$, allora risulta:

$$(3.3) \quad \int_{K \times R} |D\varphi_E| \leq \int_{K \times R} |D\varphi_M| + \int_{M-E} A(x, t) dx dt - \int_{E-M} A(x, t) dx dt$$

Per fare questo, introduciamo la funzione:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \gamma(x) &= f(x) + \int_R [\varphi_M(x, t) - \varphi_E(x, t)] dt = \\ &= f(x) + \int_R [\varphi_{M-E}(x, t) - \varphi_{E-M}(x, t)] dt. \end{aligned}$$

Ovviamente $\gamma(x) \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\gamma(x) = f(x)$ in $\Omega - K$, quindi, per la (3.1), si ha:

$$(3.5) \quad \int_K \sqrt{1 + |Df|^2} \leq \int_K \sqrt{1 + |D\gamma|^2} + \int_K^{f(x)} dx \int_{f(x)}^{\gamma(x)} A(x, t) dt.$$

Se si pone $M^* = \{(x, t); x \in \Omega, t \leq \gamma(x)\}$, per noti risultati sulla simmetrizzazione degli insiemi di Caccioppoli (vedi [8], pag. 528), si ha:

$$(3.6) \quad \int_K \sqrt{1 + |Df|^2} = \int_{K \times R} |D\varphi_E|,$$

$$(3.7) \quad \int_K \sqrt{1 + |D\gamma|^2} = \int_{K \times R} |D\varphi_{M^*}| \leq \int_{K \times R} |D\varphi_M|,$$

D'altra parte:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \int_K^{f(x)} dx \int_{f(x)}^{\gamma(x)} A(x, t) dt &= \int_{M^*-E} A(x, t) dx dt - \int_{E-M^*} A(x, t) dx dt \\ &\leq \int_{M-E} A(x, t) dx dt - \int_{E-M} A(x, t) dx dt \end{aligned}$$

in quanto, essendo $A(x, t)$ non decrescente in t , risulta:

$$(3.9) \quad \int_{M^*-M} A(x, t) dx dt - \int_{M-M^*} A(x, t) dx dt \leq 0$$

Da (3.5), (3.6), (3.7) e (3.8) segue immediatamente la (3.3).

Sia ora Γ un compatto di $\Omega \times R$, esiste allora un compatto K di Ω tale che $\Gamma \subset \overset{\circ}{K} \times R$. Quindi, se M è un insieme di Caccioppoli coincidente con E in $\Omega \times R - \Gamma$:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \int_{\Gamma} |D\varphi_E| &= \int_{K \times R} |D\varphi_E| - \int_{K \times R - \Gamma} |D\varphi_E| \leq \int_{K \times R} |D\varphi_M| + \int_{M-E} A(x, t) dx dt - \\ &- \int_{E-M} A(x, t) dx dt - \int_{K \times R - \Gamma} |D\varphi_M| = \int_{\Gamma} |D\varphi_M| + \int_{\Gamma} \varphi_M(x, t) A(x, t) dx dt - \\ &- \int_{\Gamma} \varphi_E(x, t) A(x, t) dx dt \end{aligned}$$

e questo dice che E ha curvatura media $A(x, t)$ in $\Omega \times R$.

Utilizzando la proposizione 2 si prova facilmente il seguente asserito:

PROPOSIZIONE 3. *Sia $\{f_h\}_h$ una successione di funzioni verificanti per ogni compatto $K \subset \Omega$ la disuguaglianza:*

$$(3.11) \quad \int_K \sqrt{1 + |Df_h|^2} + \int_{\overset{f_h(x)}{K}} \int_0^{\overset{f_h(x)}{0}} A_h(x, t) dt \leq \int_K \sqrt{1 + |Dg|^2} + \int_{\overset{g(x)}{K}} \int_0^{\overset{g(x)}{0}} A_h(x, t) dt$$

per ogni $g \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$, $g = f_h$ in $\Omega - K$, con $A_h(x, t)$ verificante le (3.2) con f_h al posto di f . Se:

$$(3.12) \quad f_h \rightarrow f \quad \text{in } L^1_{\text{loc}}(\Omega),$$

$$(3.13) \quad f \text{ è di classe } C^1(\Omega),$$

$$(3.14) \quad A_h(x, t) \rightarrow A(x, t) \quad \text{in } L^1_{\text{loc}}(\Omega \times R)$$

e se, per ogni compatto T di $\Omega \times R$, esiste una costante $\gamma(T)$ tale che

$$(3.15) \quad \|A_h\|_{L^p(T)} \leq \gamma(T), \quad p > n+1, \text{ per ogni } h \in N;$$

allora per ogni $x \in \Omega$, esistono $\varrho > 0$ ed $h_0 \in N$ tali che: per ogni $h > h_0$, f_h è una funzione lipschitziana in $B_\varrho(x)$.

DIM. Indichiamo con $E = \{(x, t); x \in \Omega, t \leq f(x)\}$ e con $E_h = \{(x, t); x \in \Omega, t \leq f_h(x)\}$. E ed E_h , per la proposizione 2, sono insiemi di Caccioppoli di curvatura media rispettivamente $A(x, t)$ e $A_h(x, t)$. Inoltre se $x \in \Omega$, $(x, f(x)) \in \partial^* E \cap \Omega$. Sono quindi verificate le ipotesi del teorema 3. Cominciamo col provare che esistono $\varrho > 0$ e $h_0 \in N$ tali che se $h > h_0$:

$$\partial E_h \cap \{B_\varrho(x) \times]f(x) - \varrho, f(x) + \varrho]\} = \partial^* E_h \cap \{B_\varrho(x) \times]f(x) - \varrho, f(x) + \varrho]\}$$

Infatti se ciò non fosse vero, esisterebbero una sottosuccessione di E_h : E'_h e una successione di punti (x_h, t_h) , $x_h \in \Omega$, $t_h \in R$ con

$$(x_h, t_h) \in \partial E_h - \partial^* E_h \quad \text{e} \quad (x_h, t_h) \rightarrow (x, f(x))$$

e questo è in contrasto col teorema 3. Inoltre, per la continuità del versore normale su $\partial^* E$ e per la convergenza dei versori normali, si può supporre, a meno di modificare ϱ ed h_0 , che per ogni $h > h_0$:

$$(3.15) \quad \frac{D_{n+1} \varphi_{E_h}}{|D \varphi_{E_h}|}(x, t) = \nu_h^{(n+1)}(x, t) > k > 0 \quad \text{in } (B_\varrho(x) \times R) \cap \partial E_h$$

ne segue per [12] pag. 55, che se $h > h_0$, le funzioni f_h sono lipschitziane in $B_\varrho(x)$ con una costante che non dipende da h .

Una conseguenza interessante di questo risultato è il seguente teorema di regolarità per le funzioni $f \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$, verificante (3.1) sotto certe ipotesi:

TEOREMA 4. Per ogni compatto K di Ω e per ogni costante $L > 0$, esiste $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(K, L)$ tale che, se $f \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$, verifica (3.1), per $p > n+1$:

$$(3.16) \quad \|A(x, t)\|_{L^p(\Omega \times [-L, L])} \leq \varepsilon_0 \quad \text{e vale la (3.2);}$$

$$(3.17) \quad |f(x)| \leq L \quad \forall x \in \Omega$$

Allora f è lipschitziana in K .

DIM. Se la tesi del teorema 4 non fosse vera, esisterebbero: un compatto K , una costante L , una successione di numeri positivi ε_h tendente a zero; una successione di funzioni $A_h(x, t)$; una successione di funzioni f_h di $BV_{\text{loc}}(\Omega)$, per cui vale la (3.11); e:

$$(3.18) \quad A_h(x, t) \text{ verifica la (3.2) e } \|A_h(x, t)\|_{L^p(\Omega \times [-L, L])} < \varepsilon_h, \quad p > n + 1;$$

$$(3.19) \quad |f_h(x)| \leq L$$

ed una successione di punti $x_h \in K$ tali che f_h non è lipschitziana nell'intorno di x_h .

Vedremo che questo condurrà ad un assurdo.

Cominciamo con il provare che se $\tilde{K}$ è un compatto di Ω :

$$(3.20) \quad \sup_h \int_{\tilde{K}} |Df_h| < +\infty.$$

Sia B un aperto relativamente compatto di Ω , contenente $\tilde{K}$, con frontiera lipschitziana, per cui:

$$(3.21) \quad \int_{\partial B} |Df_h| = 0 \quad \forall h \in N.$$

Indichiamo con g_h la funzione di $BV_{\text{loc}}(\Omega)$ uguale a 0 in B e ad f_h in $\Omega - B$. Allora per (3.11), (3.18), (3.19) e (3.21) si ha:

$$(3.22) \quad \int_{\tilde{K}} |Df_h| \leq \int_{\bar{B}} \sqrt{1 + |Dg_h|^2} - \int_B dx \int_0^{f_h(x)} A_h(x, t) dt \leq \\ \leq \text{mis}(B) + LH_{n-1}(\partial B) + \varepsilon_h (2L)^{1-1/p} (\text{mis } B)^{1-1/p}$$

e quindi la (3.20).

Inoltre, essendo $|f_h| \leq L$, a meno di passare ad una sottosuccessione si può supporre che f_h converga ad una funzione f_0 in $L_{\text{loc}}(\Omega)$ con $f_0 \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$.

Per il teorema 1, l'insieme $E = \{(x, t), x \in \Omega, t \leq f_0(x)\}$ ha frontiera minimale in $\Omega \times \mathbb{R}$. Quindi f_0 è analitica in Ω (cfr. ([9]) pag. 364).

D'altra parte si può supporre che x_h converga ad $x \in K \subset \Omega$, e questo contraddice la proposizione 3.

OSSERVAZIONE. Nelle ipotesi del teorema 4, per i risultati di regolarità relativi alle equazioni uniformemente ellittiche segue allora che $f \in C^{1,\alpha}$ con $\alpha = 1 - n/p$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. GIAQUINTA, *Sul problema di Dirichlet per le superfici di curvatura media assegnata*, in corso di stampa su Symposia Mathematica (1973).
- [2] M. GIAQUINTA, *Regolarità delle superfici $BV(\Omega)$ con curvatura media assegnata*, Bollettino U.M.I., **8** (1973).
- [3] M. GIAQUINTA, *On the Dirichlet problem for surfaces of prescribed mean curvature*, Manuscripta Math. (1974).
- [4] E. GIUSTI, *Boundary value problems for non parametric surfaces of prescribed mean curvature*, in corso di stampa.
- [5] U. MASSARI, *Esistenza e regolarità delle ipersuperfici di curvatura media assegnata in R^n* , in corso di stampa su Archive R.M.A.
- [6] U. MASSARI, *Frontiere orientate di curvatura media assegnata in L^p* , in corso di stampa.
- [7] M. MIRANDA, *Comportamento delle successioni convergenti di frontiere minimali*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **38** (1967).
- [8] M. MIRANDA, *Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro finito sui prodotti cartesiani*, Annali Sc. Norm. Sup. Pisa, **18** (1964).
- [9] M. MIRANDA, *Un principio di massimo forte per le frontiere minimali ecc.*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **45** (1971).
- [10] M. MIRANDA, *Dirichlet problem with L^1 data for the non-homogeneous minimal surfaces equation*, in corso di stampa.
- [11] G. VERGARA CAFFARELLI, *Superfici con curvatura media assegnata in L^p . Applicazioni ad un problema di disequazioni variazionali*, Bollettino U.M.I. (1973).
- [12] M. MIRANDA, *Distribuzioni aventi derivate misure ed insiemi di perimetro localmente finito*, Annali Sc. Norm. Sup. Pisa, **18** (1964).

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 maggio 1974.