Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Umberto Massari

Frontiere orientate di curvatura media assegnata in L^p

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 53 (1975), p. 37-52
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__37_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 53 (1975)

Frontiere orientate di curvatura media assegnata in L^p.

UMBERTO MASSARI (*)

In [3] si è provato che, se un insieme di perimetro localmente finito E ha frontiera di curvatura media assegnata $A(x)$ in un aperto Ω di R^n: cioè se, per ogni compatto K contenuto in Ω, E minimizza il funzionale:

$$\mathfrak{J}_A(F) = \int_K |D\varphi_F| + \int_{K \cap F} A(x)\, dx$$

nella classe degli insiemi di perimetro localmente finito F che fuori di K sono uguali ad E, allora la frontiera ridotta di E in Ω: $\partial^* E \cap \Omega$ è una varietà $(n-1)$-dimensionale di classe $C^{1,\alpha}$ per un opportuno α: $0 < \alpha < 1$, nell'ipotesi che la curvatura $A(x)$ sia limitata in Ω.

Il metodo seguito per la dimostrazione di questo risultato può essere applicato anche nel caso in cui la curvatura $A(x)$ sia in $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ con $p > n$, ipotesi che sembra più naturale per questo tipo di problema.

In questa nota, ho riscritto alcuni dei lemmi di [3] nel caso di curvatura in $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Con l'aiuto di tali lemmi, in sostituzione di quelli contenuti nei paragrafi 2 e 3 di [3], si proverà che $\partial^* E \cap \Omega$ è una varietà $(n-1)$-dimensionale regolare e che la misura di Hausdorff s-dimensionale dell'insieme degli eventuali punti singolari è zero per $s \in R$, $s > n - 8$.

Ringrazio Mario Miranda con il quale ho discusso i risultati di questo lavoro.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università degli Studi, via Savonarola 9, 44100 Ferrara.

1. Cominciamo col provare che valgono maggiorazioni analoghe a quelle contenute nel paragrafo 2 di [3]. Per la notazioni si rimanda a [3] e ai lavori di De Giorgi [2] e Miranda [5].

LEMMA 1.1. *Sia E un insieme che minimizza il funzionale $\mathfrak{J}_A(F)$ su di un aperto Ω di R^n, $n \geqslant 2$ e sia $A(x) \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p \geqslant 1$; se $x \in \Omega$ e $0 < \varrho < dist(x, \partial\Omega)$, allora valgono le relazioni*:

$$\int_{\bar{B}_\varrho(x)} |D\varphi_E| \leqslant \frac{n\omega_n}{2}\varrho^{n-1} + \omega_n^{1-1/p}\|A\|_{L^p(B_\varrho(x))}\varrho^{n-n/p} \tag{1.1}$$

e

$$\psi(E, \bar{B}_\varrho(x)) \leqslant \omega_n^{1-1/p}\|A\|_{L^p(B_\varrho(x))}\varrho^{n-n/p}\,. \tag{1.2}$$

DIMOSTRAZIONE. Indico con E_ϱ un insieme uguale ad E fuori di $\bar{B}_\varrho(x)$ e che minimizza il funzionale dell'area su $\bar{B}_\varrho(x)$. Confrontando tale insieme con E, ottengo:

$$\int_{\bar{B}_\varrho(x)} |D\varphi_E| \leqslant \int_{\bar{B}_\varrho(x)} |D\varphi_{E_\varrho}| + \int_{B_\varrho(x)} |A(y)|\,dy \tag{1.3}$$

e

$$\psi(E, \bar{B}_\varrho(x)) \leqslant \int_{B_\varrho(x)} |A(y)|\,dy\,. \tag{1.4}$$

Da queste relazioni si ottengono subito le (1.1) e (1.2), ricordando che per l'insieme E_ϱ vale la maggiorazione:

$$\int_{\bar{B}_\varrho(x)} |D\varphi_{E_\varrho}| \leqslant \frac{n\omega_n}{2}\varrho^{n-1}\,. \tag{1.5}$$

LEMMA 1.2. *Sia E un insieme che minimizza il funzionale $\mathfrak{J}_A(F)$ su di un aperto Ω di R^n, $n \geqslant 2$ e sia $A(x) \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p > n$; se $x \in \Omega$ e se $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < dist\ (x, \partial\Omega)$, allora*:

$$\varrho_2^{1-n}\int_{B_{\varrho_2}(x)} |D\varphi_E| - \varrho_1^{1-n}\int_{B_{\varrho_1}(x)} |D\varphi_E| + c(n,p)\|A\|_{L^p(B_{\varrho_2}(x))}(\varrho_2^{1-n/p} - \varrho_1^{1-n/p}) \geqslant 0\,. \tag{1.6}$$

dove:

$$c(n,p) = \frac{(n-1)p\omega_n^{1-1/p}}{p-n}\,. \tag{1.7}$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla relazione (1.2), ho:

$$(1.8)\qquad \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} t^{-n}\psi(E, \bar{B}_t(x))\,dt \leqslant \omega_n^{1-1/p}\|A\|_{L^p(B_{\varrho_2}(x))}\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} t^{-n/p}\,dt =$$

$$= \frac{p\,\omega_n^{1-1/p}}{p-n}\|A\|_{L^p(B_{\varrho_2}(x))}(\varrho_2^{1-n/p} - \varrho_1^{1-n/p}),$$

dalla quale, ragionando come nella prova del Lemma 2.2 di [3], si ottiene la (1.6).

LEMMA 1.3. *Sia E un insieme che minimizza il funzionale $\mathfrak{J}_A(F)$ su di un aperto Ω di R^n, $n \geqslant 2$ e sia $A(x) \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p > n$; se $x \in \partial E \cap \Omega$ e se $0 < \varrho < dist(x, \partial\Omega)$, allora:*

$$(1.9)\qquad \varrho^{1-n}\int_{B_\varrho(x)} |D\varphi_E| + c(n, p)\|A\|_{L^p(B_\varrho(x))}\,\varrho^{1-n/p} \geqslant \omega_{n-1}$$

dove $c(n, p)$ è data da (1.7).

DIMOSTRAZIONE. Se $x \in \partial^* E$, (1.9) si ottiene immediatamente da (1.6) scritta per $0 < \varrho_1 < \varrho$, facendo tendere ϱ_1 a zero. Altrimenti si sfrutta la densità di $\partial^* E$ in ∂E e quindi se $0 < \varepsilon < \varrho$, indicato con y un punto di $\partial^* E$ tale che $|y - x| < \varepsilon$ ottengo:

$$(1.10)\qquad \varrho^{1-n}\int_{B_\varrho(x)} |D\varphi_E| \geqslant \varrho^{1-n}\int_{B_{\varrho-\varepsilon}(y)} |D\varphi_E|$$

$$\geqslant \varrho^{1-n}\big(\omega_{n-1}(\varrho - \varepsilon)^{n-1} - c(n, p)\|A\|_{L^p(B_\varrho(x))}(\varrho - \varepsilon)^{n-n/p}\big)\,.$$

E questa relazione, data l'arbitrarietà di ε, mi assicura la validità di (1.9).

LEMMA 1.4. *Sia E un insieme che minimizza il funzionale $\mathfrak{J}_A(F)$ su di un aperto Ω di R^n, $n \geqslant 2$ e sia $A(x) \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p > n$; se $x \in \Omega$ e se $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < dist\,(x, \partial\Omega)$, allora:*

$$(1.11)\qquad \Big|\varrho_2^{1-n}\int_{\bar{B}_{\varrho_2}(x)} D\varphi_E - \varrho_1^{1-n}\int_{\bar{B}_{\varrho_1}(x)} D\varphi_E\Big|^2 \leqslant$$

$$\leqslant n\omega_n\Big(1 + (n-1)\lg\frac{\varrho_2}{\varrho_1} + k(n, p)\|A\|_{L^p(B_{\varrho_2}(x))}\,\varrho_2^{1-n/p}\Big)$$

$$\Big(\varrho_2^{1-n}\int_{\bar{B}_{\varrho_2}(x)} |D\varphi_E| - \varrho_1^{1-n}\int_{\bar{B}_{\varrho_1}(x)} |D\varphi_E| + c(n, p)\|A\|_{L^p(B_{\varrho_2}(x))}\,\varrho_2^{1-n/p}\Big)$$

dove:

$$k(n, p) = \frac{2(p-1)}{(p-n)\,\omega_n^{1/p}}\,. \tag{1.12}$$

DIMOSTRAZIONE. Comincio coll'osservare che il primo membro di (1.11) si può maggiorare col primo membro della (2.4) di [3]. Questo è immediato, qualora si tenga conto della relazione:

$$\varrho^{1-n}\int_{\overline{B}_\varrho(x)} D\varphi_E = \int_{|y-x|=1} \varphi_E(x+\varrho(y-x))\,\frac{y-x}{|y-x|}\,dH_{n-1}(y)\,. \tag{1.13}$$

Basta provare dunque, che il secondo membro della (2.4) di [3], si maggiora col secondo membro della (1.11). Usando la (2.20) di [3] e la (1.1), ottengo:

$$\begin{aligned}\int_{\varrho_1<|y-x|\leqslant\varrho_2} |y-x|^{1-n}\,|D\varphi_E| &\leqslant \varrho_2^{1-n}\int_{\overline{B}_{\varrho_2}(x)} |D\varphi_E| + (n-1)\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} t^{-n}\Big(\int_{\overline{B}_t(x)} |D\varphi_E|\Big)dt \leqslant \\ &\leqslant \frac{n\omega_n}{2}\Big(1+(n-1)\lg\frac{\varrho_2}{\varrho_1} + k(n,p)\,\|A\|_{L^p(B_{\varrho_2}(x))}\,\varrho_2^{1-n/p}\Big).\end{aligned} \tag{1.14}$$

Da questa e dalla (1.8) si ha la maggiorazione richiesta.

Usando le maggiorazioni precedenti, si provano ora alcuni Lemmi fondamentali per la regolarità. Di essi darò solo l'enunciato, in quanto le dimostrazioni sono simili a quelle contenute nel paragrafo 3 di [3].

LEMMA 1.5. *Per ogni numero naturale n, $n \geqslant 2$; per ogni numero reale p, $p > n$ e per ogni costante positiva A, esistono un numero positivo $\delta = \delta(n, p, A)$ ed una funzione reale $\lambda(\varepsilon) = \lambda_{n,p,A}(\varepsilon)$, definita in $(0, \delta)$ ed infinitesima nello zero, tali che: se E minimizza il funzionale $\mathfrak{J}_A(F)$ su di un aperto Ω di R^n, se $\overline{B}_1 \subset \Omega$, $\|A\|_{L^p(B_1)} \leqslant A$ e se*

$$\int_{\overline{B}_1} |D\varphi_E| - \int_{\overline{B}_1} D_n\varphi_E \leqslant \varepsilon \qquad \text{per } 0<\varepsilon<\delta; \tag{1.15}$$

allora, posto:

$$f(x) = \frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n}\int_{|t|\leqslant 1} \exp\left[-\,|x-t|\varepsilon^{-4}\right]\varphi_E(t)\,dt \tag{1.16}$$

risulta:

$$(1.17)\qquad \inf\left\{\frac{D_n f(x)}{|Df(x)|}\,;\ |x|\leqslant 1-2\varepsilon^{1/2(n-1)},\ \varepsilon^2< f(x)<1-\varepsilon^2\right\}\geqslant 1-\lambda(\varepsilon)\,.$$

OSSERVAZIONE. In questo caso risulta:

$$\lambda(\varepsilon)=\frac{e^{\frac{4}{3}}3^n}{\omega_{n-1}}\varphi(\varepsilon)+\frac{2}{\omega_{n-1}}\psi(\varepsilon)$$

dove

$$\varphi(\varepsilon)=\varphi_{n,p,A}(\varepsilon)=$$

$$=\varepsilon^{\frac{1}{2}}+\sqrt{n\omega_n}\big(1+(n-1)\lg\varepsilon^{-4+1/2(n-1)}+k(n,p)A\varepsilon^{(p-n)/2p(n-1)}\big)^{\frac{1}{2}}\cdot$$
$$\cdot\big(\varepsilon^{\frac{1}{2}}+c(n,p)A(\varepsilon^{(p-n)/2p(n-1)}+\varepsilon^{4(p-n)/p})\big)^{\frac{1}{2}}+c(n,p)A\varepsilon^{(p-n)/2p(n-1)}$$

e

$$\psi(\varepsilon)=\psi_{n,p,A}(\varepsilon)=\omega_n(3n+2A\omega_n^{-1/p})\frac{\exp\left[-\varepsilon^{-4+1/2(n-1)}\right]}{\exp\left[-2\varepsilon^{-2}\right]\varepsilon^{2(n-1)}}\,.$$

LEMMA 1.6. *Sia $\{E_h\}$ una successione di insiemi di R^n, $n\geqslant 2$ con le proprietà seguenti:*

a) *E_h minimizza il funzionale $\mathfrak{J}_{A_h}(F)$ su di un aperto Ω_h contenente la sfera $\bar{B}_1$ e $\|A_h\|_{L^p(B_1)}\leqslant A$ per ogni $h\in N$, $p>n$;*

b) *valgono le due relazioni:*

$$(1.18)\qquad \int_{\bar{B}_1}|D\varphi_{E_h}|-\int_{\bar{B}_1}D_n\varphi_{E_h}\leqslant\varepsilon_h$$

$$(1.19)\qquad \lim_{h\to+\infty}\varepsilon_h^{-1}\psi(E_h,\bar{B}_1)=0$$

con ε_h successione di numeri reali positivi tali che:

$$(1.20)\qquad \sum_{h=1}^{\infty}\varepsilon_h<+\infty\,.$$

Allora, per ogni numero α: $0<\alpha<1$, esiste un insieme N_α contenuto in $(0,1)$ di misura lineare nulla, tale che se $t\in(0,1)-N_\alpha$ è possibile *trovare una successione di insiemi L_h verificanti le proprietà:*

$$\lim_{h\to+\infty} \varepsilon_h^{-1}\psi(L_h, \bar{B}_t) = 0 , \tag{1.21}$$

$$\lim_{h\to+\infty} \varepsilon_h^{-1}\Big(\int_{\bar{B}_t}|D\varphi_{L_h}| - \int_{\bar{B}_t}|D\varphi_{E_h}|\Big) = 0 , \tag{1.22}$$

$$\lim_{h\to\infty} \varepsilon_h^{-1}\Big|\int_{\bar{B}_t}D\varphi_{L_h} - \int_{\bar{B}_t}D\varphi_{E_h}\Big| = 0 , \tag{1.23}$$

$$\max\lim_{h\to+\infty} \varepsilon_h^{-1}\Big(\int_{\bar{B}_{\alpha t}}|D\varphi_{E_h}| - \Big|\int_{\bar{B}_{\alpha t}}D\varphi_{E_h}\Big|\Big) \leqslant \tag{1.24}$$
$$\leqslant \max\lim_{h\to+\infty} \varepsilon_h^{-1}\Big(\int_{\bar{B}_{\alpha t}}|D\varphi_{L_h}| - \Big|\int_{\bar{B}_{\alpha t}}D\varphi_{L_h}\Big|\Big) ,$$

per ogni $h \in N$, la funzione della x:

$$\frac{D\varphi_{L_h}}{|D\varphi_{L_h}|}(x) = \lim_{\varrho\to 0^+} \frac{\int_{B_\varrho(x)} D\varphi_{L_h}}{\int_{B_\varrho(x)} |D\varphi_{L_h}|} \tag{1.25}$$

è continua su $\partial L_h \cap B_t$ e vale la relazione:

$$\lim_{h\to\infty} \inf\left\{\frac{D_n\varphi_{L_h}}{|D\varphi_{L_h}|}(x);\ |x| < t,\ x \in \partial L_h\right\} = 1 .$$

2. Per brevità, dato un insieme di perimetro localmente finito E e un borel-limitato B di R^n, indico con:

$$\Gamma(E, B) = \int_B |D\varphi_E| - \Big|\int_B D\varphi_E\Big| \tag{1.26}$$

Vale il seguente lemma:

LEMMA 2.1 (De Giorgi). *Per ogni intero $n \geqslant 2$, per ogni numero reale $p > n$, per ogni costante positiva A e per ogni α: $0 < \alpha < 1$, esiste una costante $\sigma = \sigma(n, p, A, \alpha)$ positiva tale che: se E minimizza il funzionale $\mathfrak{J}_A(F)$ su di un aperto Ω di R^n e se per $x \in \Omega$ e $0 < \varrho < dist(x, \partial\Omega)$, valgono le relazioni:*

$$\Gamma(E, \bar{B}_\varrho(x)) \leqslant \eta\varrho^{n-1} \tag{2.1}$$

dove $\eta \leqslant \sigma$ *e* $\varrho \leqslant \eta^{2p/(p-n)}$

$$\|A\|_{L^p(B_\varrho(x))} \leqslant A\,. \tag{2.2}$$

Allora:

$$\Gamma(E, \bar{B}_{\alpha\varrho}(x)) \leqslant \alpha^{(p-n)/2p}\, \eta(\alpha\varrho)^{n-1}\,. \tag{2.3}$$

DIMOSTRAZIONE. Ragiono per assurdo e suppongo che esistano $n \in N$, $n \geqslant 2$; $p \in R$, $p > n$; un numero $A > 0$ e un numero α: $0 < \alpha < 1$, per i quali non esista la costante $\sigma = \sigma(n, p, A, \alpha)$. Allora sarà possibile fissare una successione ε_h con

$$\varepsilon_h > 0 \quad \text{e} \quad \sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_h < +\infty \tag{2.4}$$

e, in corrispondenza ad essa, una successione di insiemi E_h, di aperti $\Omega_h \subset R^n$, di sfere $B_{\varrho_h}(x_h)$ e una successione di funzioni $A_h(x)$ tali che E_h minimizza il funzionale $\mathfrak{J}_{A_h}(F)$ su Ω_h, $\bar{B}_{\varrho_h}(x_h) \subset \Omega_h$ e

$$\Gamma(E_h, \bar{B}_{\varrho_h}(x_h)) \leqslant \varepsilon_h\, \varrho_h^{n-1}\,; \qquad \varrho_h \leqslant \varepsilon_h^{2p/(p-n)} \tag{2.5}$$

$$\|A_h\|_{L^p(B_{\varrho_h}(x_h))} \leqslant A\,; \tag{2.6}$$

mentre:

$$\Gamma(E_h, \bar{B}_{\alpha\varrho_h}(x_h)) > \alpha^{(p-n)/2p}\, \varepsilon_h (\alpha\varrho_h)^{n-1}\,. \tag{2.7}$$

Considero ora in R^n una traslazione che porti x_h nell'origine e una rotazione che porti il vettore $\int_{\bar{B}_{\varrho_h}(x_h)} D\varphi_{E_h}$ nella rirezione dell'asse x_n. Indico con τ_h la composta di queste due applicazioni. Considero alfine una omotetia di rapporto ϱ_h e indico con $\tilde{F}$ il trasformato di F mediante le tre operazioni, cioè:

$$\tilde{F} = \{x \in R^n,\ \varrho_h x \in \tau_h(F)\}\,.$$

Allora valgono le relazioni:

$$\int_B |D\varphi_{E_h}| = \varrho_h^{n-1} \int_{\tilde{B}} |D\varphi_{\tilde{E}_h}| \tag{2.8}$$

$$\int_B D\varphi_{E_h} = \varrho_h^{n-1} \int_{\tilde{B}} D\varphi_{\tilde{E}_h} \tag{2.9}$$

$$\int_B \varphi_{E_h}(x)\, A_h(x)\, dx = \varrho_h^{n} \int_{\tilde{B}} \varphi_{\tilde{E}_h}(x)\, A_h(\tau_h^{-1}(\varrho_h x))\, dx\,, \tag{2.10}$$

dove B è un borel-limitato di Ω_h.

Da queste relazioni si vede subito che l'insieme $\tilde{E}_h$ minimizza il funzionale $\mathfrak{I}_{\tilde{A}_h}(F)$ sull'aperto $\tilde{\Omega}_h$, dove:

$$\tilde{A}_h(x) = \varrho_h A_h\big(\tau(\varrho_h^{-1}{}_h x)\big) . \tag{2.11}$$

Da (2.5) e (2.7) ricordando (2.8) e (2.9), ottengo:

$$\Gamma(\tilde{E}_h, \bar{B}_1) = \int_{\bar{B}_1} |D\varphi_{\tilde{E}_h}| - \int_{\bar{B}_1} D_n \varphi_{\tilde{E}_h} \leqslant \varepsilon_h \tag{2.12}$$

$$\Gamma(\tilde{E}_h, \bar{B}_\alpha) > \varepsilon_h \alpha^{n-\frac{1}{2}-n/2p} . \tag{2.13}$$

Ora dalla (2.11), tenendo presente che $\bar{B}_1 \subset \tilde{\Omega}_h$ per ogni $h \in N$, si ha che:

$$\|\tilde{A}_h\|_{L^p(B_1)} = \varrho_h^{1-n/p} \|A_h\|_{L^p(B_{\varrho_h}(x_h))} \tag{2.14}$$

e quindi dalla (1.2) e dalle ipotesi (2.5) e (2.6), possono scrivere:

$$\psi(\tilde{E}_h, \bar{B}_1) \leqslant \omega_n^{1-n/p} \varrho_h^{1-n/p} A \leqslant \omega_n^{1-n/p} A \varepsilon_h^2 , \tag{2.15}$$

e allora:

$$\lim_{h\to\infty} \varepsilon_h^{-1} \psi(\tilde{E}_h, \bar{B}_1) = 0 . \tag{2.16}$$

Ne deriva che la successione $\tilde{E}_h$ verifica le ipotesi del Lemma 1.6; qui ne applichiamo i risultati con $\beta = \alpha^\gamma$ dove γ: $0 < \gamma < 1$, è una costante che sarà scelta in modo opportuno in seguito, e con $t \in (0, 1) - N_\beta$ tale che sia ancora: $\alpha \leqslant t\beta$. Alla successione L_h così ottenuta mediante il Lemma 1.6, si può applicare il Teorema 4.4 di [5] e quindi ottengo, ricordando anche la (1.24):

$$\max \lim_{h\to\infty} \varepsilon_h^{-1} \Gamma(\tilde{E}_h, B_{\beta t}) \leqslant \beta^{n+1} . \tag{2.17}$$

Quindi dalla (2.13) e dal fatto che $\alpha \leqslant \beta t$, deve essere:

$$\alpha^{n-\frac{1}{2}-n/2p} \leqslant \beta^{n+1} = \alpha^{\gamma(n+1)} \tag{2.18}$$

e questa relazione è falsa se io scelgo γ tale che:

$$\frac{n - \frac{1}{2} - n/2p}{n+1} < \gamma < 1 \tag{2.19}$$

$\big($per esempio $\gamma = (4np + p - n)/\big(4p(n+1)\big)\big)$.

Questa contraddizione mi assicura la validità del Lemma.

OSSERVAZIONE. Il Lemma di De Giorgi si può applicare ripetutamente; cioè se tutte le ipotesi sono verificate, da

$$\Gamma(E, \bar{B}_\varrho(x)) \leqslant \eta\varrho^{n-1} ; \qquad \eta \leqslant \sigma , \quad \varrho \leqslant \eta^{2p/(p-n)} ;$$

si ricava:

$$\Gamma(E, \bar{B}_{\alpha\varrho}(x)) \leqslant \alpha^{(p-n)/2p}\eta(\alpha\varrho)^{n-1} = \eta'(\alpha\varrho)^{n-1} .$$

Ora osservo che $\eta' \leqslant \sigma$ e che:

$$\alpha\varrho \leqslant \alpha\eta^{2p/(p-n)} = (\alpha^{(p-n)/2p}\eta)^{2p/(p-n)} = (\eta')^{2p/(p-n)} ,$$

e quindi il Lemma si può applicare ancora, ottengo:

$$\Gamma(E, \bar{B}_{\alpha^2\varrho}(x)) \leqslant \alpha^{(p-n)/2p}\eta'(\alpha^2\varrho)^{n-1} = \alpha^{2(p-n)/2p}\eta(\alpha^2\varrho)^{n-1} = \eta''(\alpha^2\varrho)^{n-1} .$$

e ancora $\eta'' \leqslant \sigma$ e:

$$\alpha^2\varrho \leqslant \alpha^2\eta^{2p/(p-n)} = (\alpha^{2(p-n)/2p}\eta)^{2p/(p-n)} = (\eta'')^{2p/(p-n)} .$$

Dopo h passi, si ottiene la relazione:

$$\Gamma(E, \bar{B}_{\varrho\alpha^h}(x)) \leqslant \alpha^{h(p-n)/2p}\eta(\alpha^h\varrho)^{n-1} . \tag{2.20}$$

LEMMA 2.2. *Sia E un insieme che minimizza il funzionale $\mathfrak{I}_A(F)$ su di un aperto Ω di R^n, $n \geqslant 2$. Se per $x \in \partial E \cap \Omega$, $p > n$, $0 < \varrho < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, $0 < \alpha < 1$ e $A > 0$, valgono le relazioni:*

$$\Gamma(E, \bar{B}_\varrho(x)) \leqslant \sigma(n, p, A, \alpha)\,\varrho^{n-1} , \qquad \varrho \leqslant \sigma^{2p/(p-n)} \tag{2.21}$$

e

$$\|A\|_{L^p(B_\varrho(x))} \leqslant A \ ; \tag{2.22}$$

allora $x \in \partial^* E \cap \Omega$ e, se pongo:

$$\nu_t(x) = \frac{\int_{B_t(x)} D\varphi_E}{\int_{B_t(x)} |D\varphi_E|} \qquad \text{e} \qquad \nu(x) = \lim_{t\to 0^+} \nu_t(x) , \tag{2.23}$$

si ha la maggiorazione, per $0<t<\varrho$.

$$|\nu(x)-\nu_t(x)|\leqslant c(n,p,A,\alpha)\left(\frac{t}{\varrho}\right)^{(p-n)/4p}. \tag{2.24}$$

DIMOSTRAZIONE. Osservo, prima di tutto, che posso supporre:

$$\varrho<\left(\frac{\omega_{n-1}}{2c(n,p)A}\right)^{p/(p-n)} \tag{2.25}$$

dove $c(n,p)$ è data dalla (1.7), Infatti se così non fosse, scelgo $h\in N$ tale che $\varrho_1=\varrho\alpha^h$ verifichi (2.25). Per il Lemma 2.1, risulta:

$$\Gamma(E,\bar B_{\varrho_1}(x))\leqslant\alpha^{h(p-n)/2p}\,\sigma\varrho_1^{n-1}<\sigma\varrho_1^{n-1}\,.$$

Quindi ϱ_1 verifica tutte le ipotesi fatte su ϱ e, in più, per esso vale (2.25).

Per provare il Lemma, devo verificare che esista il $\lim\limits_{t\to0^+}\nu_t(x)=\nu(x)$ e $|\nu(x)|=1$. Comincio col dimostrare che la successione $\nu_{\varrho\alpha^h}(x)$ è una successione di Cauchy. Infatti, ricordando la (4.23) di [3], si ha:

$$\begin{aligned}|\nu_{\varrho\alpha^{h+k}}(x)-\nu_{\varrho\alpha^h}(x)|&\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}|\nu_{\varrho\alpha^{h+k-j-1}}(x)-\nu_{\varrho\alpha^{h+k-j}}(x)|\leqslant\\&\leqslant2\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{\Gamma(E,\bar B_{\varrho\alpha^{h+k-j-1}}(x))}{\int_{B\alpha^{h+k-j}(x)}|D\varphi_E|}\right)^{\frac12}.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Ora da (1.9) e (2.25):

$$\int_{B\varrho\alpha^{h+k-j}(x)}|D\varphi_E|\geqslant\frac{\omega_{n-1}}{2}\,\varrho^{n-1}\alpha^{(h+k-j)(n-1)} \tag{2.27}$$

e quindi, ricordando (2.26) e (2.20):

$$\begin{aligned}|\nu_{\varrho\alpha^{h+k}}(x)-\nu_{\varrho\alpha^h}(x)|&\leqslant2\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{\sigma\alpha^{(h+k-j-1)(n-\frac12-n/2p)}}{(\omega_{n-1}/2)\,\alpha^{(h+k-j)(n-1)}}\right)^{\frac12}\leqslant\\&\leqslant2\left(\frac{2\sigma}{\omega_{n-1}\,\alpha^{n-\frac12-n/2p}}\right)^{\frac12}\frac{\alpha^{(p-n)/4p}}{1-\alpha^{(p-n)/4p}}\,\alpha^{h(p-n)/4p}=c_1(n,p,A,\alpha)\,\alpha^{h(p-n)/4p}\,.\end{aligned} \tag{2.28}$$

Indicato con $\nu(x) = \lim_{h\to\infty} \nu_{\varrho\alpha^h}(x)$, da (2.28) si ottiene per $k \to \infty$:

$$|\nu(x) - \nu_{\varrho\alpha^h}(x)| \leqslant c_1(n, p, A, \alpha)\, \alpha^{h(p-n)/4p} . \tag{2.29}$$

Si verifica facilmente che $|\nu(x)| = 1$, infatti:

$$1 - |\nu_{\varrho\alpha^h}(x)| = \frac{\Gamma(E, B_{\varrho\alpha^h}(x))}{\int\limits_{B_{\varrho\alpha^h}(x)} |D\varphi_E|} \tag{2.30}$$

e da (2.20), (1.9), (2.25):

$$1 - |\nu_{\varrho\alpha^h}(x)| \leqslant \alpha^{h(n-\frac{1}{2}-n/2p)}\sigma/(\omega_{n-1}/2)\,\alpha^{h(n-1)} = \frac{2\sigma}{\omega_{n-1}}\,\alpha^{h(p-n)/2p} \tag{2.31}$$

e quindi $|\nu(x)| = \lim_{h\to\infty} |\nu_{\varrho\alpha^h}(x)| = 1$.

Sia ora $0 < t < \varrho$ e sia $h \in N$ tale che:

$$\varrho\alpha^{h+1} \leqslant t < \varrho\alpha^h \tag{2.32}$$

Allora:

$$|\nu(x) - \nu_t(x)| \leqslant |\nu(x) - \nu_{\varrho\alpha^h}(x)| + |\nu_{\varrho\alpha^h}(x) - \nu_t(x)| \tag{2.33}$$

e dalla (4.23) di [3]:

$$|\nu_{\varrho\alpha^h}(x) - \nu_t(x)| \leqslant 2\left(\frac{\Gamma(E, B_{\varrho\alpha^h}(x))}{\int\limits_{B_{\varrho\alpha^{h+1}}} |D\varphi_E|}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\left(\frac{2\sigma}{\omega_{n-1}\alpha^{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha^{h(p-n)/4p} \tag{2.34}$$

quindi, ricordando (2.29):

$$|\nu(x) - \nu_t(x)| \leqslant c_2(n, p, A, \alpha)\, \alpha^{h(p-n)/4p} .$$

E infine da (2.32):

$$|\nu(x) - \nu_t(x)| \leqslant c_2(n, p, A, \alpha)\left(\frac{t}{\varrho}\right)^{(p-n)/4p} \alpha^{(n-p)/4p} = \tag{2.35}$$

$$= c_3(n, p, A, \alpha)\left(\frac{t}{\varrho}\right)^{(p-n)/4p}$$

e questo conclude la dimostrazione del Lemma.

Dai due Lemmi precedenti, seguono i risultati di regolarità annunciati. In particolare vale il:

TEOREMA 2.1. *Sia E un insieme che minimizza il funzionale $\mathfrak{J}_A(F)$ su di un aperto Ω di R^n, $n \geqslant 2$. Se per $x \in \partial E \cap \Omega$, $0 < \varrho <$ dist $(x, \partial\Omega)$. $0 < \alpha < 1$, $p > n$, $A > 0$, valgono le relazioni*:

$$\Gamma(E, \bar{B}_\varrho(x)) \leqslant \sigma(n, p, A, \alpha)\, \varrho^{n-1}, \qquad \varrho \leqslant \sigma^{2p/(p-n)}, \tag{2.36}$$

$$\| A \|_{L^p(B_\varrho(x))} \leqslant A ; \tag{2.37}$$

allora esiste un numero positivo δ tale che:

$$\partial E \cap B_\delta(x) = \partial^* E \cap B_\delta(x) \tag{2.38}$$

e inoltre $\partial E \cap B_\delta(x)$ è una ipersuperficie regolare di classe $C^{1,\gamma}$ con $\gamma = (p-n)/4p$.

DIMOSTRAZIONE. Indico con $\delta' = \varrho\alpha^k(1-\alpha)$ dove k è un intero positivo che sarà determinato in seguito. Se ora $y \in \partial E \cap B_{\delta'}(x)$ ho che:

$$B_{\varrho\alpha^{k+1}}(y) \supset B_{\varrho\alpha^k}(x) . \tag{2.39}$$

Quindi, per il Lemma 2.1 e la monotonia della funzione Γ rispetto alla inclusione insiemistica, ottengo:

$$\begin{aligned}\Gamma(E, \bar{B}_{\varrho\alpha^{k+1}}(y)) &\leqslant \Gamma(E, \bar{B}_{\varrho\alpha^k}(x)) \leqslant \\ &\leqslant \alpha^{(k/2)(p-n)-n+1}\, \sigma(\varrho\alpha^{k+1})^{n-1} \leqslant \sigma(\varrho\alpha^{k+1})^{n-1}\end{aligned} \tag{2.40}$$

qualora si abbia:

$$\frac{k(p-n)}{2p} + 1 - n > 0 .$$

Ora da (2.39) e (2.40) si ha che il punto y verifica le ipotesi del Lemma 2.2 con $\varrho_1 = \varrho\alpha^{k+1}$ e quindi $y \in \partial^* E \cap B_{\delta'}(x)$. Se ne deduce che $\partial E \cap B_{\delta'}(x) = \partial^* E \cap B_{\delta'}(x)$.

Siano ora $y, z \in B_{\delta'}(x)$ e $h, m \in N$, si ha:

$$|\nu(y) - \nu(z)| \leqslant |\nu(y) - \nu_{\varrho\alpha^h}(y)| + |\nu_{\varrho\alpha^h}(y) - \nu_{\varrho\alpha^{h+m}}(z)| + |\nu_{\varrho\alpha^{h+m}}(z) - \nu(z)| \tag{2.41}$$

Ragionando come nella dimostrazione del Lemma 2.2, usando la (2.40) in luogo della (2.36), si ottiene per $h \geqslant k+1$:

$$|\nu(y) - \nu(_{\varrho\alpha^h}y)| \leqslant c_4(n, p, A, \alpha)\, \alpha^{h(p-n)/4p} \tag{2.42}$$

$$|\nu(z) - \nu_{\varrho\alpha^{h+m}}(z)| \leqslant c_4(n, p, A, \alpha)\, \alpha^{(h+m)(p-n)/4p} \tag{2.43}$$

Per maggiorare il termine $|\nu_{\varrho\alpha^h}(y) - \nu_{\varrho\alpha^{h+m}}(z)|$, suppongo che: $B_{\varrho\alpha^{h+m}}(z) \subset \subset B_{\varrho\alpha^h}(y)$, cioè che:

$$|y - z| \leqslant \varrho\alpha^h(1 - \alpha^m) \tag{2.44}$$

e uso la (4.23) di [3]. Supposta valida la (2.25), per $h \geqslant k+1$, ottengo:

$$\begin{aligned} |\nu_{\varrho\alpha^h}(y) - \nu_{\varrho\alpha^{h+m}}(y)| &\leqslant 2\left(\frac{\sigma\alpha^{((h-k-1)/2)(p-n)/p)}}{(\omega_{n-1}/2)\,\alpha^{m(n-1)}}\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= 2\left(\frac{2\sigma\alpha^{(-(k+1)(p-n))/2p}}{\omega_{n-1}\alpha^{m(n-1)}}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha^{h(p-n)/4p} = c_5(n, p, A, \alpha, m)\, \alpha^{h(p-n)/4p}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Ora m sia fissato in modo che, per ogni h, valga:

$$\varrho\alpha^{h+1} < \varrho\alpha^h(1 - \alpha^m) \tag{2.46}$$

cioè $m > (\lg(1-\alpha))/\lg\alpha$ (e quindi dipende solo da α). Allora, posto:

$$\delta = \tfrac{1}{2}\min\{\delta', \varrho\alpha^{k+1}(1 - \alpha^m)\} \tag{2.47}$$

ottengo che, se $y, z \in B_\delta(x)$ e $y \neq z$, esiste $h \geqslant k+1$, tale che:

$$\varrho\alpha^{h+2} < |y - z| \leqslant \varrho\alpha^h(1 - \alpha^m) \tag{2.48}$$

e quindi da (2.41), (2.42), (2.43), (2.45) e (2.48), si ha:

$$|\nu(y) - \nu(z)| \leqslant c_6(n, p, A, \alpha)\left(\frac{|y - z|}{\varrho}\right)^{(p-n)/4p}. \tag{2.49}$$

Per il Teorema 5.8 di [4], si può concludere allora che $\partial E \cap B_\delta(x)$ è una ipersuperficie di classe $C^{1,(p-n)/4p}$.

Se E minimizza il funzionale $\mathfrak{J}_A(F)$ su di un aperto Ω di R^n, $n \geqslant 2$ con $A(x) \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p > n$, allora tutti i punti di $\partial^* E \cap \Omega$ verificano le ipotesi del Teorema 2.1. Ne deriva che $\partial^* E \cap \Omega$ è una varietà $(n-1)$-dimensionale di classe $C^{1,(p-n)/4p}$.

3. È noto che esistono insiemi che minimizzano un funzionale del tipo $\mathfrak{J}_A(F)$ su tutto R^n e che presentano sulla frontiera dei punti singoli (vedi [1]). Questo però non può verificarsi se la dimensione n è piccola. Cioè vale il:

TEOREMA 3.1. *Sia E un insieme che minimizza il funzionale $\mathfrak{J}_A(F)$ su di un aperto Ω di R^n, $n \geqslant 2$ e sia $A(x) \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p > n$. Se $n \leqslant 7$, allora $\partial E \cap \Omega$ è una ipersuperficie di classe $C^{1,\gamma}$ con $\gamma = (p-n)/4p$.*

DIMOSTRAZIONE. Suppongo che esista un punto singolare x in $\partial E \cap \Omega$. A meno di operare una traslazione, posso supporre $x = 0$. Allora se pongo: $d = \operatorname{dist}(0, \partial\Omega)$ e $A = \|A\|_{L^p(B_{d/2})}$, per il Teorema 2.1 se $0 < \alpha < 1$ e

$$0 < \varrho < \min\left\{\frac{d}{2}, \sigma(n, p, A, \alpha)^{2p/(p-n)}\right\} \tag{3.1}$$

deve essere:

$$\Gamma(E, \bar{B}_\varrho) > \sigma \varrho^{n-1}\,. \tag{3.2}$$

Se ora ϱ_h è una successione di numeri positivi, verificanti (3.1), tale che: $\lim_{h\to\infty} \varrho_h = 0$, posto $E_h = \{x \in R^n, \varrho_h x \in E\}$ si ottiene una successione di insiemi che minimizzano il funzionale $\mathfrak{J}_{A_h}(F)$ su $\Omega_h = \{x \in R^n, \varrho_h x \in \Omega\}$ dove $A_h(x) = \varrho_h A(\varrho_h x)$. Tenendo presente che, per $t > 0$, se $t\varrho_h < d/2$, valgono le relazioni:

$$\|A_h\|_{L^p(B_t)} \leqslant \varrho_h^{1-n/p} A \tag{3.3}$$

$$\int_{B_t} |A_h(y)|\, dy \leqslant \omega_n^{1-1/p} t^{n-n/p} \varrho_h^{1-n/p} A \tag{3.4}$$

e ragionando come nella dimostrazione del Teorema 5.1 di [3], si ha che, dalla successione E_h, può estrarsi una sottosuccessione che converge in $L^1_{\mathrm{loc}}(R^n)$ ad un cono M di frontiera orientata di misura minima in R^n. Dalla (3.2), si ottiene che $0 \in \partial M - \partial^* M$. L'esistenza di tale cono per $n \leqslant 7$, contrasta con un risultato di Simons [6].

Nel caso di dimensione n qualunque, comincio col provare il seguente Lemma:

LEMMA 3.1. *Sia E_h una successione di insiemi minimizzanti il funzionale $\mathfrak{J}_{A_h}(F)$ su di un aperto Ω di R^n, $n \geq 2$ e sia $A_h(x) \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, $p > n$; suppongo che:*

$$A_h \to 0 \quad \textit{in } L^1_{\text{loc}}(\Omega) \,, \tag{3.5}$$

$$\varphi_{E_h} \to \varphi_E \quad \textit{in } L^1_{\text{loc}}(\Omega) \,, \tag{3.6}$$

e che, per ogni compatto $K \subset \Omega$ esista una costante $\gamma(K)$, tale che:

$$\|A_h\|_{L^p(K)} \leq \gamma(K) \quad \textit{per ogni } h \in N. \tag{3.7}$$

Allora, per ogni compatto K di Ω:

$$\varphi^k_\infty((\partial E - \partial^* E) \cap K) \geq \max\lim_{h\to\infty} \varphi^k_\infty((\partial E_h - \partial^* E_h) \cap K) \,. \tag{3.8}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia V un aperto contenente $(\partial E - \partial^* E) \cap K$, se esiste h_V tale, per ogni $h > h_V$, V contiene $(\partial E_h - \partial^* E_h) \cap K$, allora (3.8) è provata. Se un tale indice non esistesse, si potrebbe trovare una sottosuccessione di E_h: E'_h e una successione di punti x_h con

$$x_h \in (\partial E'_h - \partial^* E'_h) \cap K \quad \text{e} \quad x_h \to x \in K - V \,. \tag{3.9}$$

Posto $d = \text{dist}\,(K, \partial\Omega)$, $K_{d/2} = \{x \in \Omega,\ \text{dist}(x, K) \leq d/2\}$ e $A = \gamma(K_{d/2})$, da (3.9), se $0 < \alpha < 1$ e $0 < s < \min\{d/2, \sigma(n, p, A, \alpha)^{2p/(p-n)}\}$, si ha:

$$\Gamma(E'_h, \bar{B}_s(x_h)) > \sigma s^{n-1} \,. \tag{3.10}$$

D'altra parte, da (3.5), si ottiene che, per quasi tutti gli r: $0 < r < d/2$:

$$\Gamma(E, \bar{B}_r(x)) = \lim_{h\to\infty} \Gamma(E'_h, \bar{B}_r(x)) \,. \tag{3.11}$$

Infine, se $0 < s < r < \min\{d/2, \sigma^{2p/(p-n)}\}$ e se h è sufficientemente grande, si ha: $B_s(x_h) \subset B_r(x)$ e quindi, da (3.10) e (3.11), per quasi tutti tali r:

$$\Gamma(E, \bar{B}_r(x)) \geq \max\lim_{h\to\infty} \Gamma(E'_h, \bar{B}_s(x_h)) \geq \sigma s^{n-1} \,. \tag{3.12}$$

Data l'arbitrarietà di s: $0 < s < r$, si conclude che, per quasi tutti gli r: $0 < r < \min\{d/2, \sigma^{2p/(p-n)}\}$:

$$\Gamma(E, \bar{B}_r(x)) \geqslant \sigma r^{n-1} . \tag{3.13}$$

Quindi $x \in (\partial E - \partial^* E) \cap (K - V)$ e questo contrasta con l'ipotesi che $(\partial E - \partial^* E) \cap K \subset V$.

Ragionando come in [3], siamo ora in grado di provare il:

TEOREMA 3.2. *Sia E un insieme che minimizza il funzionale $\mathfrak{J}_A(F)$ su di un aperto Ω di R^n, $n \geqslant 8$ e sia $A(x) \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p > n$. Allora esiste un aperto $W \subset \Omega$ tale che $\partial E \cap W$ è una varietà $(n-1)$-dimensionale di classe $C^{1,\gamma}$, $\gamma = (p-n)/4p$, $\partial^* E \cap \Omega \subset \partial E \cap W$ e $H_s(\Omega - W) = 0$ per ogni $s \in R$, $s > n - 8$.*

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BOMBIERI - E. DE GIORGI - E. GIUSTI, *Minimal cones and Bernstein problem*, Inv. Math. (1969).

[2] E. DE GIORGI, *Frontiere orientate di misura minima*, Sem. Mat. Sc. Norm. Sup. Pisa (1960-61).

[3] U. MASSARI, *Esistenza e regolarità delle ipersuperfici di curvatura media assegnata in R^n* (in corso di stampa in Archive R.M.A.).

[4] M. MIRANDA, *Distribuzioni aventi derivate misure ed insiemi di perimetro localmente finito*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (1964).

[5] M. MIRANDA, *Sul minimo dell'integrale del gradiente di una funzione*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (1965).

[6] J. SIMONS, *Minimal varieties in Riemannian manifold*, Ann. of Math. (1968).

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 maggio 1974.