

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

## **Sulle soluzioni delle equazioni differenziali lineari ellittiche e con coefficienti analitici**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 52 (1974), p. 85-92

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1974\\_\\_52\\_\\_85\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__52__85_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Sulle soluzioni delle equazioni differenziali lineari ellittiche e con coefficienti analitici.

GIULIANO BRATTI (\*)

### Introduzione.

1. Il contenuto di questo lavoro è ricavato, principalmente, dai seguenti articoli: « *Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients* », di Lars Hormander [4], e: « *Pseudodifferential operators and Gevray classes* », di Louis Boutet de Monvel e Paul Kree [5].

È noto che: se  $P = P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a^\alpha(x) D^\alpha$  (\*\*), è un operatore differenziale su  $A$ , un aperto di  $R^n$ , ivi ellittico e con coefficienti analitici, allora  $P$  è analitico, cioè: se  $u$  e  $v \in \mathcal{D}'(A)$  e  $Pu = v$  in  $A$ ,  $u$  è analitica laddove lo è  $v$  [2], pag. 178, teor. 5.7.1.

Un notevole approfondimento di tale risultato è il teorema 5.4 di [4] pag. 687:

se  $P = P(x, D)$  ha coefficienti analitici su  $A$ ,  $\forall u \in \mathcal{D}'(A)$  si ha:  $WF_L(u) \subset WF_L(Pu) \cup \{(x, \xi) \in A \times R_n \setminus \{0\} : P_m(x, \xi) = 0\}$  (\*\*\*) .

Questo articolo vuol approfondire ulteriormente il risultato dell'ultimo teorema citato; si otterrà, infatti, il seguente:

---

(\*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico - Via Belzoni, 3 - I-35100 Padova.

(\*\*) Nella scrittura di  $P = P(x, D)$ :  $m \in N$ ;  $|\alpha| = \sum_k \alpha_k$  se  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in N^n$ ;  $D^{\alpha_k} = (1/i)^{\alpha_k} (\partial/\partial x_k)^{\alpha_k}$ ,  $i^2 = -1$ .

(\*\*\*) Per la definizione dei  $WF:(u)$ ,  $u \in \mathcal{D}'(A)$ , si veda: (4), pag. 676, o il n. 2 di questo lavoro nel quale è ricordata;  $P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a^\alpha(x) \xi^\alpha$ .

**TEOREMA.** Sia  $P = P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a^\alpha(x) D^\alpha$  un operatore differenziale su  $A$ , un aperto di  $R^n$ , ivi ellittico e con coefficienti analitici.  $\forall u \in \mathcal{D}'(A)$  si può individuare, in  $WF_L(u)$ , un sottoinsieme,  $mr_L(u)$ , (per la sua definizione si veda il seguente n. 3), tale che:  $mr_L(u) = mr_L(Pu)$ .

Nel n. 2 si ricordano definizioni e teoremi utili al seguito; nel n. 3 si costruisce qualche esempio di  $u \in \mathcal{D}'(A)$  con  $mr_L(u) \neq \emptyset$  e si dimostra il risultato enunciato.

**2. DEFINIZIONE 1.** Sia  $L = (L_k)$  una successione di numeri reali tale che:  $L_0 = 1$ ;  $k \leq L_k$ ,  $\forall k \in N$ ;  $L_{k+1} \leq CL_k$ , per qualche  $C \in R_+$ , (reali positivi). Se  $A$  è un aperto in  $R^n$  e  $u \in C^\infty(A)$ ,  $u \in C^L(A)$  se:  $\forall K \subset\subset A$ ,  $\exists C_k \in R_+$  con:  $|D^\alpha u| \leq C_k (C_k L_{|\alpha|})^{|\alpha|}$ .

Se la successione  $L = (L_k)$  è tale che:  $L_k = k$ ,  $\forall k \in N$ ,  $C^L(A)$  è la classe delle funzioni analitiche su  $A$ ; in questo caso si pone:  $C^L(A) = C_A(A)$ . Il seguente teorema caratterizza in termini di trasformata di Fourier le distribuzioni  $u \in \mathcal{D}'(A)$  tali che  $u \in C^L(U)$  per qualche aperto  $U$  in  $A$ ;

**TEOREMA 1.** Sia  $u \in \mathcal{D}'(A)$  e  $x_0 \in A$ .  $u \in C^L$  su qualche intorno di  $x_0$  se si può trovare un intorno  $U$  di  $x_0$  in  $A$  ed una successione limitata,  $u_N$ , in  $\mathcal{S}'(A)$  tale che:

- i)  $u = u_N$  in  $U$ ;
- ii)  $|\hat{u}_N(\xi)| \leq C(CL_N/|\xi|)^N$ , per qualche  $C \in R_+$  (\*).

**DEFINIZIONE 2.** Sia  $x_0 \in A$ ;  $\xi^0 \in R_n \setminus \{0\}$ ;  $u \in \mathcal{D}'(A)$ .  $P_0 = (x_0, \xi^0) \notin WF_L(u)$  se:

- a) esistono: un intorno di  $x_0$  in  $A$ ,  $U$ , ed un intorno conico,  $\Gamma$ , di  $\xi^0$  in  $R_n$ ;
- b) esiste una successione limitata,  $u_N$ , in  $\mathcal{S}'(A)$ , tale che:
  - i)  $\forall N, u = u_N$  in  $U$ ;
  - ii)  $|\hat{u}_N(\xi)| \leq C(CL_N/|\xi|)^N$ , in  $\Gamma$

La proiezione di  $WF_L(u)$  su  $A$  ha come complementare il più grande sottoinsieme aperto di  $A$  su cui  $u$  è in  $C^L$ . Nel caso che:  $L_k = k$ ,  $\forall k \in N$ , si pone:  $WF_L(u) = WF_A(u)$ .

**TEOREMA 2.** Sia  $u \in \mathcal{D}'(A)$  e  $P = P(x, D)$  un operatore differenziale su  $A$  con coefficienti ivi di classe  $C^L$ ; risulta:  $WF_L(Pu) \subset WF_L(u)$ .

---

(\*) Si indica con  $\hat{u}(\xi)$  la trasformata di Fourier di  $u$ .

**TEOREMA 3.** *Sia  $u \in \mathcal{D}'(A)$  e  $P = P(x, D)$  un operatore differenziale su  $A$  con coefficienti ivi analitici; risulta:  $WF_L(u) \subset WF_L(Pu) \cup \{(x, \xi) \in A \times R_n \setminus \{0\} : P_m(x, \xi) = 0\}$ .*

Per ciò che riguarda il secondo articolo citato nel n. 1 sarà sufficiente, per il seguito, ricordare: la definizione 1.1, pag. 302; la definizione 2.1, pag. 308; il teorema 2.9, pag. 314; e la proposizione 2.13, pag. 322: nell'ordine:

**DEFINIZIONE 2.** *Il simbolo  $(p) = \sum p_k(x, \xi)$  è di classe  $s \geq 1$  se per ogni  $K \subset\subset A$  esistono le costanti  $c$  ed  $A_0$  in  $R_+$  tali che:  $\forall k \in N, \forall x \in K$  e  $(\alpha, \beta) \in N^n \times N^n$  con:*

$$|(\partial/\partial x)^\alpha (\partial/\partial \xi)^\beta p_k(x, \xi)| \leq c A_0^{k+|\alpha+\beta|} |\xi|^{r-k-|\beta|} (k + |\alpha|)!^s \beta! (*).$$

**DEFINIZIONE 3.** *Sia  $P = P(x, D)$  un operatore pseudodifferenziale su  $A$  con simbolo  $(p) = \sum p_k(x, \xi)$  e grado  $r$ . Si dice che  $P$  è strettamente di classe  $s$  se:  $K \subset\subset A$  esistono le costanti  $c$  ed  $A_0 \in R_+$ , tali che:*

$\forall x \in K$  e  $(\alpha, \beta) \in N^n \times N^n$ , e  $\forall N \in N$ :

$$|(\partial/\partial x)^\alpha (\partial/\partial \xi)^\beta (p - \sum_{k=0}^{N-1} p_k(x, \xi))| \leq c A_0^{N+|\alpha+\beta|} |\xi|^{r-N-|\beta|} (k + |\alpha|)!^s \beta!$$

**TEOREMA 4.** *Sia  $(p) = \sum p_k(x, \xi)$  un simbolo di classe  $s \geq 1$  su  $A$ . Esiste un operatore pseudodifferenziale su  $A$  di classe  $s$  e simbolo  $(p)$ .*

**PROPOSIZIONE 1.** *Sia  $P$  un operatore pseudodifferenziale ellittico su  $A$  e di classe  $s$ . Esiste un operatore pseudodifferenziale  $E$  di classe  $s$  tale che:  $E \circ P - I$  e  $P \circ E - I$  hanno nuclei di classe  $s$ .*

(Si può trovare in [4], pag. 687, una costruzione del simbolo inverso di un simbolo analitico ( $s = 1$ ) ed ellittico).

**3.** Sembra naturale, almeno per l' $A$ ., porre la seguente:

**DEFINIZIONE 1.** *Sia  $u \in \mathcal{D}'(A)$  e  $P_0 = (x_0, \xi^0) \in WF_L(u)$ .  $P_0 \in mr_L(u)$  se:*

- a) *esiste una successione di intorni,  $U_N$ , di  $x_0$  in  $A$ ;*
- b) *esiste una successione di intorni conici di  $\xi_0$ ,  $\Gamma_N$ , in  $R_n$ ;*
- c) *esiste una successione,  $u_N$ , in  $\mathcal{E}'(A)$ , ivi limitata, tale che:*

---

(\*)  $p_k(x, \xi) \in C^\infty(A \times R_n \setminus \{0\})$  ed è omogenea di grado  $r - k$  in  $\xi$ .

i)  $u = u_N$  in  $U_N$ ;

ii)  $|\hat{u}_N(\xi)| \leq C(CL_N/|\xi|)^N$ , per ogni  $\xi \in \Gamma_N$ , e per qualche costante  $C \in R_+$ .

Se  $L' \leq L''$ , (cioè se  $L'_k \leq L''_k$ ,  $\forall k \in N$ ), risulta:  $WF(u) \subset WF_{L'}(u) \subset WF_{L''}(u) \subset WF_A(u)$ , (\*); ne segue:  $mr_{L'}(u) \cap WF_{L''}(u) \subset mr_{L''}(u)$ , di facile dimostrazione.

Si ha, inoltre,  $mr_L(u) \cap WF(u) \subset mr(u)$ . Infatti: sia  $u_N$  la successione limitata in  $\mathcal{E}'(A)$  con:  $u = u_N$  in  $U_N$  e  $|\hat{u}_N(\xi)| \leq C(CL_N/|\xi|)^N$  per ogni  $\xi \in \Gamma_N$ . È sufficiente far vedere che  $u_N \in H_{loc}^{N'(N)}((U_N \times \Gamma_N)^*)$  con  $N'(N) \rightarrow +\infty$ , (\*\*). Sia allora  $g(x, \xi) \in C_c^\infty(U_N \times \Gamma_N)$  e  $a(x) \in C_c^\infty(U_N)$ ;

$$g(x, D)(au)(x) = (2\pi)^{-n} \int \exp[ix\xi] g_a(x, \xi) b_{\Gamma_N}(\xi) \hat{u}_N(\xi) d\xi,$$

se  $b_{\Gamma_N}(\xi)$  è la funzione caratteristica di  $\Gamma_N$  e  $g_a(x, \xi)$  è il simbolo del pseudodifferenziale composto:  $g(x, D) \circ a(x)$ , (\*\*\*)). Poichè le distribuzioni  $v_N \in \mathcal{S}'(R^n)$  definite dalla relazione:  $v_N(\xi) = b_{\Gamma_N}(\xi) \hat{u}_N(\xi)$  sono in  $H^{N'(N)}$ , se  $N'(N)$  è conveniente, ne segue che  $u_N \in H_{loc}^{N'(N)}((U_N \times \Gamma_N)^*)$  così che la  $u$  ha la medesima proprietà. Visto poi che  $P_0 = (x_0, \xi_0) \in mr(u)$  risulta:  $P_0(x_0, \xi_0) \in mr(u)$ .

Si vuol costruire, ora, un esempio di  $u \in \mathcal{D}'(A)$  tale che:  $mr_L(u) \neq \emptyset$ , per ogni successione  $L = (L_k)$  con le proprietà indicate nella def. 1) del n. 2. Per questo è sufficiente costruire una  $u \in \mathcal{D}'(A)$  con  $WF(u) \cap mr_A(u) \neq \emptyset$ , dove, come per i precedenti casi, si è posto:  $mr_L(u) = mr_A(u)$  se  $L = (L_k)$  e  $L_k = k$ ,  $\forall k \in N$ . Risulta infatti, con le formule di sopra,  $WF(u) \cap mr_A(u) \subset mr_L(u)$ . Tale esempio è una modifica di quello al seguito della definizione 1 del n. 2 di [1]; eccolo:

in  $R^2$  si consideri la successione di corone circolari,  $\Gamma_N$ , di centri in  $(0, 0)$  e raggi, rispettivamente,  $(1/N, 1/N + 1)$ . In  $(R^2)$  si scelga una successione,  $u_N$ , soddisfacente le seguenti proprietà:

---

(\*) La dimostrazione di quelle inclusioni è nella dimostrazione del teorema 3.4 di [4], pag. 678. Per la definizione e le proprietà di  $WF(u)$  e di  $mr(u)$  si vedano, rispettivamente, [4] e [1].

(\*\*) Per la definizione di  $H_{loc}^s(O^*)$ , o aperto in  $S^*(A)$ , la cosfera fibrata di base  $A$ , si veda [1].

(\*\*\*) Per il calcolo del simbolo composto si veda [3].

- i)  $u_N \in \mathcal{E}'(I_N) \cap H^N$ ;
- ii)  $u_N \notin H^{N+1}$ ;
- iii)  $\|u_N\|_N = 1/N^2$ ;
- iv)  $L_N = \sup_{\xi \in R_2} (1 + |\xi|^2)^{N/2} \{|\hat{u}_N(\xi)|\} < +\infty, \forall N \in N, (*)$ .

Verificheremo in seguito la possibilità di una tale scelta.

$\forall N \in N$ , si ponga:  $v_N = u_N / \max(L_N, 1)$ ; risulta: in  $H^N$  la serie  $\sum_{N \leq k} v_k$  è convergente verso una  $V_N$ . Se si considera le successione delle  $V_N$  in  $\mathcal{E}'(R^2)$  si vede che:

- a)  $\|V_N\|_0 \leq \|V_N\|_N \leq \sum_{N \leq k} 1/k^2 \leq c$ , così che tale successione è limitata in  $\mathcal{E}'(R^2)$ ;
- b) se  $U_N = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 \leq 1/N, V = V_N \text{ in } U_N, \text{ posto che } V = \sum_k v_k\}$ .

È facile vedere che  $(0, 0) \in \text{suppsing } V$ ; sicchè  $\exists \xi \in R_2$  con  $(0, 0, \xi)$  in  $WF(V)$ . Dimostriamo ora che:  $(0, 0, \xi) \in mr_A(V)$ . Infatti: con la trasformata di Fourier si ha:

$$(1 + |\xi|^2)^{N/2} V_N(\xi) = \sum_{N \leq k} v_k(\xi) (1 + |\xi|^2)^{k/2} (1 + |\xi|^2)^{k/2 - N/2}.$$

Se  $|\xi| \neq 0$  la serie converge, puntualmente assolutamente, verso  $1/(1 - 1/(1 + |\xi|^2)^{1/2})$ ; ne segue, se  $|\xi| \geq 1$ ,

$$(1 + |\xi|^2)^{N/2} |v_N(\xi)| \leq \sqrt{2}/(\sqrt{2} - 1),$$

come è facile verificare.

Se  $|\xi| < 1$ , supposto che sia  $|V(\xi)| \leq A_0$ , risulta  $|V_N(\xi)| \leq A_0 + N$  così che:  $(1 + |\xi|^2)^{N/2} |V_N(\xi)| \leq 2^N (A_0 + N)$  sempre che  $|\xi| < 1$ ; e, quindi, per qualche  $C \in R_+$ ,  $|V_N(\xi)| \leq C(CN)^N / (1 + |\xi|^2)^{N/2} \leq C(CN/|\xi|)^N$ . Ciò implica:  $(0, 0, \xi) \in mr_A(V)$ .

Rimane da verificare la possibilità della scelta delle  $u_N$  come sopra.

Scelte le  $u_N$  come da i) e ii) sia  $a_N \in C_c^\infty(I_N)$  tale che  $a_N u_N$  soddisfi ancora a i) e ii).

---

(\*)  $H^s$  indica lo spazio di Sobolev di esponente  $s$ ;  $\|\cdot\|^s$  la sua norma hilbertiana.

$(a_N u_N)^\wedge(\xi) = \int \hat{a}_N(\xi - \eta) \hat{u}_N(\eta) d\eta$ , e, con la diseguglianza di Peetre:

$$(1 + |\xi|^2)^{N/2} |(a_N u_N)^\wedge(\xi)| \leq \\ \leq k \int (1 + |\xi - \eta|^2)^{N/2} |\hat{a}_N(\xi - \eta)| (1 + |\eta|^2)^{N/2} |\hat{u}_N(\eta)| d\eta .$$

Per il fatto che  $a_N \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ , fissato  $q \in \mathbb{N}$  tale che  $|\hat{a}_N(\xi)| \leq k/(1 + |\xi|^2)^q$  e  $1/(1 + |\xi|^2)^q \in L^2$ , (ciò è possibile per il teorema di Paley-Wiener); si ha:

$$(1 + |\xi|^2)^{N/2} |(a_N u_N)^\wedge(\xi)| \leq k \int (1 + |\xi - \eta|^2)^{-q} (1 + |\eta|^2)^{N/2} |\hat{u}_N(\eta)| d\eta ,$$

che è una convoluzione di funzioni di  $L^2$  e quindi una funzione limitata. Per l'esempio basterà allora scegliere  $a_N \in C_c^\infty(\Gamma_N)$  così che:  $\|a_N u_N\|_N = 1$ , e le  $v_N = a_N u_N / N^2 \max(L_N, 1)$ , se  $L_N = \sup_{\xi \in \mathbb{R}_2} (1 + |\xi|^2)^{N/2} |(a_N u_N)^\wedge(\xi)|$ .

Infine si vuol costruire un esempio di  $u \in \mathcal{D}'(A)$  con:  $P_0 = (x_0, \xi_0) \in \text{mr}_A(u)$  e  $P_0 = (x_0, \xi_0) \notin WF(u)$ . Sia la successione delle  $\Gamma_N$  scelta come sopra e si scelgano le  $a_N(x) \in C_c^\infty(\Gamma_N)$  in modo tale che la successione  $a_N$  sia limitata in  $C_c^\infty(B)$  dove  $B$  è il cerchio unitario in  $\mathbb{R}^2$ . Si ha, immediatamente:

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}_2} ((1 + |\xi|^2)^{N/2} |\hat{a}_N(\xi)|) = L_N < +\infty, \quad \forall N \in \mathbb{N};$$

si ponga:  $b_N(x) = a_N(x) / N^2 \max(L_N, 1)$ . La serie  $\sum_k b_k(x)$  è convergente in  $C_c^\infty(B)$  verso una  $b(x)$ . Evidentemente  $b(x)$ , che è in  $C^\infty$  in un intorno di  $(0, 0)$ , non può essere analitica in  $(0, 0)$  poiché su  $\Gamma_N$  coincide, essenzialmente, con  $a_N(x) \in C_c^\infty(\Gamma_N)$ ; ne deriva:  $\exists \xi_0 \in \mathbb{R}_2$  con  $(0, 0, \xi_0) \in WF_A(b)$ . Se  $c_N(x) = \sum_{N \leq k} b_k(x) b(x) = c_N(x)$  in  $U_N$ , dove  $U_N$  è il cerchio di centro  $(0, 0)$  e raggio  $1/N$ ; con ragionamenti analoghi ai precedenti,  $|\hat{c}_N(\xi)| \leq C(CN)^N \setminus \setminus (|\xi|^2)^N \xi \in \mathbb{R}_2 \setminus \{0\}$ , e per qualche  $C \in \mathbb{R}_+$ .

Dimostriamo ora il teorema enunciato; per ciò è utile ricordare i seguenti lemmi, (rispettivamente: 2.3, pag. 675 e 3.3, pag. 677 di [4]):

a) Sia  $u \in C^L(A)$  e si scelgano le  $c_N(x)$  in  $C_c^\infty(A)$  così che:  $|D^\alpha c_N| \leq C(CN)^{|\alpha|}$ ,  $|\alpha| \leq N$ . Esiste  $C \in \mathbb{R}_+$  con  $|c_N^\wedge u(\xi)| \leq C(CL_N / (L_N + |\xi|)^N$  in  $\mathbb{R}_n$

b) Sia  $u = u_N$  in  $U$  con:  $u_N$  successione limitata in  $\mathcal{E}'(A)$  e  $|\hat{u}_N(\xi)| \leq C(CL_N / |\xi|)^N$  in intorno conico  $\Gamma$  del semiraggio di direzione  $\xi_0$  in  $\mathbb{R}_n$ : Scelte le  $c_N$  in  $C_c^\infty(U)$  con  $c_N = 1$  in  $K \subset\subset U$  e  $|D^{\alpha+\beta} c_N| \leq C(CL_N)^{|\beta|}$ ,  $|\beta| \leq N$ , la successione  $c_N u$  è limitata in  $\mathcal{E}'(A)$  e  $|c_N^\wedge u(\xi)| \leq C(CL_N / |\xi|)^N$  ancora in  $\Gamma$ .

PROPOSIZIONE 1. Sia  $P_0 = (x_0, \xi^0) \in mr_L(u)$ ,  $u \in \mathcal{D}'(A)$ . Se  $P$  è un operatore ellittico su  $A$  con coefficienti ivi analitici,  $P_0 \in mr_L(Pu)$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $u = u_N$  in  $U_N$  intorno di  $x_0$  con:  $u_N$  successione limitata in  $\mathcal{E}'(A)$  e  $|\hat{u}_N(\xi)| \leq C(CL_N/|\xi|)^N$  in  $\Gamma_N$  intorno conico del semiraggio di direzione  $\xi^0$  in  $R_n$ .

Si ha:  $Pu = c_N Pu_N$  in  $U_N$ . Si scelgano le  $c_N$  come nel lemma b) di sopra; si ha, ancora,  $Pu = c_N Pu_N$  in  $U_N = U_N \cap K$ . La proposizione sarà allora dimostrata se si dimostrerà che:  $c_N(x) a^\alpha(x) D^\alpha u_N$  è una successione limitata in  $\mathcal{E}'(A)$  con  $|(c_N a^\alpha D^\alpha u_N)^\wedge(\xi)| \leq C(CL_N/|\xi|)^N$  in  $\Gamma_N$ . Ora: la prima proprietà è evidente; posto, per semplicità,  $b_N = c_N a^\alpha$ , poichè  $a^\alpha(x) \in C_A(A)$  si ha, (lemma a):  $|b_N(\xi)| \leq C(CL_N/(L_N + |\xi|))^N$  in  $R_n$ .  $D^\alpha u_N$  è una successione che soddisfa, essenzialmente, stesse proprietà della successione  $u_N$ , ( $|\alpha| \leq m$ ); allora basterà applicare la stessa dimostrazione del lemma b) per avere la conclusione.

PROPOSIZIONE 2. Sia  $P_0 = (x_0, \xi^0) \in mr_L(Pu)$ ,  $u \in \mathcal{D}'(A)$  Se  $P$  è un operatore ellittico su  $A$  con coefficienti ivi analitici,  $P_0 \in mr_L(u)$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $Pu = Pu_N$  in  $U_N$  intorno di  $x_0$  con:  $u_N$  successione limitata in  $\mathcal{E}'(A)$  e  $|\hat{u}_N(\xi)| \leq C(CL_N/|\xi|)^N$  in  $\Gamma_N$  intorno conico del semiraggio di direzione  $\xi^0$  in  $R_n$ .

Sia  $A = A(x, D)$  il pseudodifferenziale su  $A$  tale che  $A \circ P - I = R$  dove  $R$  ha nucleo analitico su  $A \times A$ . Risulta: in  $U'_N \subset U_N$ ,  $Au_N = u + Ru$  e  $P_0 \notin WF'_A(Ru)$  per l'analiticità di  $R$ . Si scelgano ancora le  $c_N$  in  $C_c^\infty(A)$  come nel lemma b);  $u = c_N Au_N$  in  $U'_N \cap K$ . sia  $\sigma_A(x, \xi)$  il simbolo di  $A(x, D)$ ; risulta:

$$|(c_N Au_N)^\wedge(\xi)| \leq K \int |c_N^\wedge \sigma_A(\xi - \eta, \eta)| |\hat{u}_N(\eta)| d\eta;$$

osservando che:  $\sigma_A(x, \xi) \in C_A(A) \widehat{\otimes} O_M$ , per il lemma a) si ha:

$$|c_N \sigma^\wedge(\theta, \eta)| \leq C(CL_N/(|\theta| + L_N))^N (1 + |\eta|)^{-m},$$

se  $m$  è il grado di  $P$  e per ogni  $\theta \in R_n$ . Ancora la stessa dimostrazione del lemma b) conclude la proposizione (\*).

---

(\*) Si è indicato con  $O_M$  lo spazio degli operatori di moltiplicazione  $u \mathcal{S}$ . Se  $\sigma_A(x, \xi)$  indica il simbolo del pseudodifferenziale  $A(x, D)$ , per verificare che: se  $\sigma_A(x, \xi) = 0$  se  $x \notin K$  compatto in  $A$  si ha:

$$(A(x, D)u)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{-n} \int \sigma_A((\xi - \eta, \eta) \hat{u}(\eta) d\eta, \quad u \in \mathcal{E}'(A),$$



Si ottiene così il

**TEOREMA:**  $\forall u \in \mathcal{D}'(A)$ , se  $P = P(x, D)$  è operatore differenziale con coefficienti analitici su  $A$  ed ivi ellittico,  $mr_{\mathcal{L}}(Pu) = mr_{\mathcal{L}}(u)$ .

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] G. BRATTI, *Sul comportamento degli operatori differenziali ipoellittici, a coefficienti costanti, sopra i wave front sets*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **51** (1973), 105-111.
- [2] L. HORMANDER, *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, 1969.
- [3] L. HORMANDER, *Fourier Integral Operators*, Acta Math., **127** (1971).
- [4] L. HORMANDER, *Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients*, Com. on Pure and Appl. Math., **24** (1971), 671-704.
- [5] L. BOUTET DE MONVEL - P. KREE, *Pseudodifferential Operators and Gevrey classes*, Ann. Inst. Fourier, **17** (1967), 295-323.
- [6] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.

Manoscritto pervenuto in redazione il 22 gennaio 1974 e in forma revisionata il 7 marzo 1974.

---

è sufficiente tener presente che: se  $b_N(x) \in C_c^\infty(A)$  è una successione che converge in  $H_c^s(A)$  verso  $u$ , in  $L^2$  la funzione  $(1 + |\xi|^2)^{s-m/2} (2\pi)^{-n} \int \sigma_A(\xi - \eta, \eta) \hat{u}(\eta) d\eta$  è il limite della successione:  $(1 + |\xi|^2)^{s-m/2} (2\pi)^{-n} \int \sigma_A(\xi - \eta, \eta) b_N(\eta) d\eta$ ; ciò si ottiene con una applicazione della disuguaglianza di Peetre.

Altre verifiche inerenti la dimostrazione della proposizione 2) sono immediate.