

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

STEFAN SANDOR

Recherches axiomatiques sur le problème de Dirichlet

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 52 (1974), p. 329-356

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__52__329_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Recherches axiomatiques sur le problème de Dirichlet.

STEFAN SANDOR (*)

Introduction.

Le but de la présente note est une construction axiomatique ayant pour modèle un problème de Dirichlet très général pour l'équation elliptique non homogène du second ordre dans un domaine borné ou non borné. La construction suit celle de Brelot [4], [5] mais elle diffère de celle-ci dans deux points: l'inclusion du modèle de l'équation non homogène et le mode de formuler le problème de Dirichlet. Ajoutons qu'on utilise seulement des fonctions finies et continues et que l'espace de base n'est pas supposé connexe.

La formulation du problème de Dirichlet (définition 7.1) pourrait être considérée comme un développement des idées de Wiener [14], [15], [16] qui a remplacé les données de Dirichlet sur la frontière par un prolongement continu sur la fermeture du domaine considéré. Le théorème de Wiener [14] prouvant que la solution généralisée qu'il obtient est indépendante de la façon dont on a fait ce prolongement est, au juste, l'affirmation du fait que cette solution généralisée dépend de la h -classe de sortie engendrée par les données de Dirichlet, au sens de notre définition 2.4 (pour $h=1$). Dans les recherches ultérieures, cette « descente » de la frontière d'un domaine, dans le domaine lui-même a permis de beaucoup élargir le mode de poser le problème de Dirichlet. Mais, d'une façon ou d'une autre, on est toujours « remonté » sur une frontière, parfois idéale, [2], [4], [6], [7], [8], [11] établissant que la plus naturelle frontière est celle qu'on a appelée frontière de

(*) Indirizzo dell'A.: Facultatea de Instalatii, Institutul de Constructii, Bd. Republicii, 176 - Bucuresti, Romania.

Cet article a été préparé pendant un séjour que l'auteur a passé comme scientifique invité à l'Université de Montréal.

Wiener. La formulation du problème de Dirichlet que nous donnons dans la définition 7.1 est plus générale que celles citées, dans le sens précis qu'elle permet de considérer aussi les fonctions non bornées; il peut arriver que deux solutions d'une équation elliptique, non bornées, non h -équivalentes (donc solutions de deux problèmes de Dirichlet distinctes dans le sens de la définition 7.1) aient, sur toute sorte de frontière, des prolongements identiques (par exemple $u_1 = \ln r$ et $u_2 = 2 \ln r$ pour l'équation de Laplace dans $R^2 \setminus \{(0, 0)\}$). C'est la raison pour laquelle habituellement les données de Dirichlet sont, au juste, considérées finies. La définition 7.1 renonce à cette restriction; de même, l'introduction de la fonction surharmonique h dans la formulation du problème de Dirichlet, qui n'a pas été rencontrée par l'auteur dans la littérature, permet un certain soulagement des restrictions imposées habituellement [3], [4], [5] à h . h ne doit plus rester supérieure à une constante strictement positive.

Le théorème d'unicité 7.1 généralise non seulement le théorème classique d'unicité mais aussi les théorèmes d'unicité donnés dans [1], [9], [10], [12]. La plupart des résultats typiques est contenue dans le dernier paragraphe; les théorèmes 8.2, 8.3 et 8.4 ainsi que la proposition 8.4 se rapportent aux problèmes d'existence. Ce problème de Dirichlet ainsi que les résultats mentionés ci-dessus sont nouveaux même pour l'équation de Laplace.

Les axiomes sont échelonnés dans divers paragraphes; dans tous les énoncés on suppose la vérification des axiomes les précédant. Les axiomes ont un caractère «local» et leur remplissement est prouvé dans [3].

1. Les m -lattices linéaires.

Le premier paragraphe introduit une structure d'ordre nécessaire dans l'étude ultérieure et que l'auteur n'a pas rencontrée dans la littérature consultée; les quelques faits, d'ailleurs très simples, suivent l'exposé [13].

DÉFINITION 1.1. Un ensemble ordonné s'appelle m -lattice (respectivement m -lattice Dedekind complète) lorsque toute paire de ses éléments (respectivement toute partie de cet ensemble) si majorée possède un supremum, si minorée possède un infimum.

Maintes propriétés des lattices sont valables, avec certaines modifications naturelles, aussi pour les m -lattices.

PROPOSITION 1.1. Toute partie finie et majorée (minorée) d'une m -lattice, possède un supremum (infimum).

PROPOSITION 1.2. Soient X et Y deux ensembles ordonnés isomorphes. Lorsque X est une m -lattice (ou une m -lattice Dedekind complète) alors Y est aussi une m -lattice (respectivement une m -lattice Dedekind complète); la propriété d'une partie d'être majorée ou minorée est invariante par rapport à l'isomorphisme donné et les supremums et infimums se correspondent.

PROPOSITION 1.3. Un ensemble ordonné jouissant de la propriété que toute partie majorée possède un supremum (ou que toute partie minorée possède un infimum) est une m -lattice.

DÉFINITION 1.2. Un espace linéaire ordonné qui est à la fois une m -lattice (une m -lattice Dedekind complète) s'appelle m -lattice linéaire (respectivement m -lattice linéaire Dedekind complète).

Maintes propriétés des espaces de Riesz sont valables avec certaines modifications naturelles, aussi pour les m -lattices linéaires.

PROPOSITION 1.4. Soient X et Y deux espaces linéaires ordonnés isomorphes. Lorsque X est une m -lattice linéaire (m -lattice linéaire Dedekind complète) alors Y est aussi une m -lattice linéaire (respectivement une m -lattice linéaire Dedekind complète); la propriété d'une partie d'être minorée ou majorée est invariante par rapport à l'isomorphisme donné et les suprémums et infimums se correspondent.

PROPOSITION 1.5. Soit X un espace linéaire ordonné et $A \subset X$ telle que $\sup A$ (ou $\inf A$) existe. Alors:

- 1) $x \in X$ implique $\sup(x + A) = x + \sup A$ (respectivement $\inf(x + A) = x + \inf A$); e
- 2) $\lambda \in (0, +\infty)$ implique $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$ (respectivement $\inf(\lambda A) = \lambda \inf A$);
- 3) $\lambda \in (-\infty, 0)$ implique $\inf(\lambda A) = \lambda \sup A$ (respectivement $\sup(\lambda A) = \lambda \inf A$).

PROPOSITION 1.6. Soit X un espace linéaire ordonné. Alors les propriétés suivantes:

- 1) $\{x, y\} \subset X$ est majorée;
- 2) $\{x, y\} \subset X$ est minorée;

sont équivalentes et si X est une m -lattice linéaire, chacune d'elles implique $x \wedge y + x \vee y = x + y$ (ici $x \vee y = \sup\{x, y\}$ et $x \wedge y = \inf\{x, y\}$).

En effet, pour $x \leq a$, $y \leq a$ et $u = x + y - a$ on a $x - u = a - y \geq 0$ et $y - u = a - x \geq 0$ donc $x \geq u$ et $y \geq u$. Pour $v = x + y - x \vee y$, on déduit en utilisant la proposition 1.5 que $v = x + y + (-x) \wedge (-y) = x + (y - x) \wedge 0 = y \wedge x$.

DÉFINITION 1.3. Soit X une m -lattice linéaire et $x \in X$. Lorsque $\{x, 0\}$ est majorée (minorée) on appelle x un élément décomposable de X . Nous désignons par RX l'ensemble des éléments décomposables de X et nous l'appelons le noyau de Riesz de l'espace X . Pour $x \in RX$ nous désignons encore $x_+ = x \vee 0$, $x_- = (-x)_+$, $|x| = x_+ + x_-$.

THÉORÈME 1.1. Soient X une m -lattice linéaire et RX son noyau de Riesz. Alors:

- 1) pour tout $x \in RX$ on a $x = x_+ - x_-$;
- 2) RX coïncide avec l'ensemble des éléments $x \in X$ représentables sous la forme $x = y - z$ avec $y \geq 0$, $z \geq 0$; pour toute pareille représentation on a $y \geq x_+$, $z \geq x_-$.
- 3) RX est un sous-espace de X et un espace de Riesz ayant la propriété: $x_1, x_2 \in RX$ implique $(x_1 \vee x_2)_{RX} = (x_1 \vee x_2)_X$ et $(x_1 \wedge x_2)_{RX} = (x_1 \wedge x_2)_X$.

DÉMONSTRATION.

1) De $x_- = (-x)_+ = (-x) \vee 0 = -(x \wedge 0)$ à l'aide de la proposition 1.5 on déduit $x_+ - x_- = x \vee 0 + x \wedge 0 = x + 0 = x$.

2) Si $x \in RX$ on a $x = x_+ - x_-$ et $x_+ \geq 0$, $x_- \geq 0$; si $x = y - z$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ alors $x \leq y$ et $0 \leq y$ donc $x_+ \leq y$ et de même $x_- \leq z$.

3) Pour $x_1, x_2 \in RX$ et $\lambda \in R$ on a $x_i = y_i - z_i$, $y_i \geq 0$, $z_i \geq 0$ ($i = 1, 2$). Alors $x_1 + x_2 = (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)$ donc $x_1 + x_2 \in RX$. A l'aide de la proposition 1.5 on déduit que $(\lambda x_1) \vee 0$ et $(\lambda x_1) \wedge 0$ existent, donc que $\lambda x_1 \in RX$. De $x_i \leq (x_i)_+$ et $(x_i)_+ \geq 0$, ($i = 1, 2$) on déduit que $(x_1)_+ + (x_2)_+ \geq x_i$ ($i = 1, 2$); par conséquent $(x_1 \vee x_2)_X = y$ existe. On a de plus, $y \geq x_1 \geq -(x_1)_-$ et $0 \geq -(x_1)_-$ donc $\{y, 0\}$ est minorée c'est-à-dire $y \in RX$ ou $(x_1 \vee x_2)_X = (x_1 \vee x_2)_{RX}$.

PROPOSITION 1.7. Soit X une m -lattice linéaire, RX son noyau de Riesz et NX un sous-espace de X supplémentaire à RX . Alors toute paire d'éléments distincts de NX est nonmajorée et nonminorée; en particulier ces éléments ne sont pas comparables.

En effet, si $x, y \in NX$ et $z \in X$ est tel que $x \leq z$ et $y \leq z$, on déduit de $x - y = (z - x) - (z - y)$ que $u = x - y \in RX$; de $x = u + y$, $x = 0 + x$ et $x, y \in NX$ et $u, 0 \in RX$ on déduit que $u = 0$ et que $x = y$.

THÉORÈME 1.2. Soient A et B deux espaces linéaires ordonnés. (Ou m -lattices linéaires, ou encore m -lattices linéaires Dedekind complètes) et $C = A \oplus B$ leur somme directe munie de la relation $(a_1, b_1) \geq (a_2, b_2)$ si $a_1 \geq a_2$ et $b_1 \leq b_2$. Alors (C, \geq) est un espace linéaire ordonné (respectivement une m -lattice linéaire, respectivement une m -lattice linéaire Dedekind complète). La majoration, la minoration, le supremum, l'infimum dans C correspondent à ceux dans A et B .

DÉMONSTRATION. Le fait que (C, \geq) est un espace linéaire ordonné est évident. Soit I un ensemble d'indices, ayant deux ou un nombre quelconque d'éléments selon le fait que A et B sont m -lattices linéaires ou m -lattices linéaires Dedekind complètes. Soient $\{a_i; i \in I\} \subset A$, $\{b_i; i \in I\} \subset B$, $a \in A$, $b \in B$. Lorsque pour tout $i \in I$ $a_i \leq a$ et $b_i \geq b$, alors $(a_i, b_i) \leq (a, b)$ pour tout $i \in I$ et réciproquement. Lorsque $\alpha = \sup\{a_i; i \in I\}$ et $\beta = \inf\{b_i; i \in I\}$ existent, on a $(a_i, b_i) \leq (\alpha, \beta)$ pour tout $i \in I$. Si pour tout $i \in I$ on a $(a_i, b_i) \leq (a, b)$ alors, pour tout $i \in I$, $a_i \leq a$ et $b_i \geq b$ donc $a \geq \alpha$ et $b \leq \beta$ c'est-à-dire $(\alpha, \beta) \leq (a, b)$ ce qui prouve que $\sup\{(a_i, b_i); i \in I\} = (\alpha, \beta)$.

COROLLAIRE. Soient A un espace linéaire ordonné (ou une m -lattice linéaire, ou une m -lattice linéaire Dedekind complète), B un espace linéaire et $C = A \oplus B$ leur somme directe, munie de la relation $(a_1, b_1) \geq (a_2, b_2)$ si $a_1 \geq a_2$ et $b_1 = b_2$. Alors (C, \geq) est un espace linéaire ordonné (respectivement une m -lattice linéaire, respectivement une m -lattice linéaire Dedekind complète). La majoration, la minoration, le supremum, l'infimum correspondent à ceux de A et peuvent exister seulement pour les ensembles de la forme $\{(a, b), a \in A' \subset A, b \text{ fixé dans } B\}$.

En effet, l'égalité dans B est une relation d'ordre, par rapport à laquelle, B est une m -lattice linéaire Dedekind complète.

2. Les classes de sortie.

Les classes de sortie seront un élément essentiel pour pouvoir formuler le problème de Dirichlet.

Dans tout ce qui suit, X sera supposé un espace de Hausdorff,

localement compact, localement connexe et sans composantes ⁽¹⁾ compactes. Pour $A \subset X$, $\bar{A}(\partial A)$ désigne la fermeture (la frontière) de A . En l'absence d'autres mentions, ω sera toujours une partie ouverte quelconque de X . $C(\omega)$ est l'ensemble de fonctions réelles dans ω et, continues. « Réelle » implique toujours « finie ». Si u est une fonction réelle sur ω et $A \subset \omega$, u_A désigne la restriction de u à A .

On va fréquemment rencontrer deux particularités de certaines propriétés concernant des parties de X et des familles (quelquefois vides) de fonctions définies sur ces parties. On les appellera hérédité et divisibilité.

Une propriété P concernant un ouvert de X et une famille de fonctions définies dans cet ouvert est appelée:

a) *héréditaire* lorsque sont vérifiées les affirmations:

- 1) Une condition nécessaire pour que P soit vraie par rapport à ω et la famille \mathcal{F} est que P soit vraie par rapport à toute partie ouverte de ω et la famille des restrictions des fonctions de \mathcal{F} à cette partie.
- 2) Une condition suffisante pour que P soit vraie par rapport à ω et la famille \mathcal{F} est que tout $x \in \omega$ possède un voisinage ouvert tel que P soit vraie par rapport à ce voisinage et la famille des restrictions de fonction de \mathcal{F} à ce voisinage.

b) *divisible* lorsque sont équivalentes les affirmations:

- 1) P est vraie par rapport à ω et la famille \mathcal{F} .
- 2) P est vraie par rapport à toute composante de ω et la famille des restrictions des fonctions de \mathcal{F} à cette composante.

Il va sans dire qu'une propriété héréditaire est divisible. Toutes les propriétés présumées de X sont divisibles.

Pour ω ouvert de X nous désignons par ω^* l'ensemble des points d'Alexandroff des composantes de ω ; lorsque ω est un domaine, ω^* désignera même le point d'Alexandroff de ω . Pour u fonction réelle sur ω , $\liminf_{x \rightarrow \omega^*} u(x) = \inf_{\omega'} (\liminf_{x \rightarrow (\omega')^*} u(x))$, ω' parcourant l'ensemble des composantes de ω et on dira que $\lim_{x \rightarrow \omega^*} u(x) = 0$ si pour toute composante ω' de ω on a $\lim_{x \rightarrow (\omega')^*} u(x) = 0$. C'est évident que chacune des relations $\liminf_{x \rightarrow \omega^*} u(x) \geq 0$ et $\lim_{x \rightarrow \omega^*} u(x) = 0$ est divisible.

(1) « composantes » signifiera toujours « composante connexe ».

En l'absence d'autres mentions h désignera toujours une fonction réelle sur X , continue et strictement positive.

PROPOSITION 2.1. Pour, $u, v \in \mathcal{C}(\omega)$ la relation

$$\lim_{x \rightarrow \omega^*} \frac{u(x) - v(x)}{h(x)} = 0$$

est une relation d'équivalence et est divisible.

DÉFINITION 2.1. Lorsque

$$\lim_{x \rightarrow \omega^*} \frac{u(x) - v(x)}{h(x)} = 0$$

nous disons que u et v sont h -équivalentes et nous écrivons $u \overset{h}{\sim} v$. Les classes d'équivalence dans $\mathcal{C}(\omega)$ déterminées par la relation $\overset{h}{\sim}$ seront appelées h -classes de sortie de ω . Pour $u \in \mathcal{C}(\omega)$ nous désignons par $I^h u$ la h -classe de sortie de ω contenant u . Nous désignons par \mathfrak{J}_ω^h l'ensemble des h -classes de sortie de ω . Lorsque $I \in \mathfrak{J}_\omega^h$ et ω' est une composante de ω , alors la h -classe de sortie de ω' contenant les restrictions à ω des fonctions de I est désignée par $I_{\omega'}$ et appelée la restriction de I à ω' . Evidemment, pour $u \in I$ on a $I^h u_{\omega'} = I_{\omega'}$. Lorsque $h = 1$ il sera omis dans les notations.

PROPOSITION 2.2. Soient $I_i \in \mathfrak{J}_\omega^h$ et $u'_i, u''_i \in I_i$ ($i = 1, 2$). Alors

- 1) $u'_1 + u'_2 \overset{h}{\sim} u'_1 + u''_2$;
- 2) $\lambda \in R$ implique $\lambda u'_1 \sim \lambda u''_1$;
- 3) $\liminf_{x \rightarrow \omega^*} \frac{u'_1(x) - u'_2(x)}{h(x)} \geq 0$ implique $\liminf_{x \rightarrow \omega^*} \frac{u''_1(x) - u''_2(x)}{h(x)} \geq 0$.

DÉFINITION 2.2. Soient $I_1, I_2 \in \mathfrak{J}_\omega^h$ et $u_1 \in I_1, u_2 \in I_2$. La somme des classes I_1, I_2 est $I_1 + I_2 = I^h(u_1 + u_2)$. Si $\lambda \in R$, le produit entre λ et I_1 est $\lambda I_1 = I^h(\lambda u_1)$. Si

$$\liminf_{x \rightarrow \omega^*} \frac{u_1(x) - u_2(x)}{h(x)} \geq 0$$

nous disons que $I_1 \geq I_2$.

THÉOREME 2.1. \mathfrak{J}_ω^h est un espace de Riesz et $u \rightarrow I^h u$ est une application de $\mathcal{C}(\omega)$ dans \mathfrak{J}_ω^h linéaire, surjective, isotone et permutable avec le choix des infimums et supremums des parties finies de $\mathcal{C}(\omega)$. Les opérations et l'ordre dans \mathfrak{J}_ω^h sont divisibles. L'ordre dont il s'agit dans $\mathcal{C}(\omega)$ est l'ordre naturel.

DÉMONSTRATION. Le fait que \mathfrak{J}_ω^h est un espace de Riesz est une conséquence immédiate des définitions et des propriétés des limites et limites inférieures des fonctions réelles; de même les propriétés de linéarité, surjectivité et isotonie de l'application $u \rightarrow I^h u$ et les divisibilités mentionnées. Dans $\mathcal{C}(\omega)$ le supremum et l'infimum des parties finies sont les enveloppes supérieure et inférieure des fonctions de la partie considérée. Soient $u_i \in \mathcal{C}(\omega)$ pour tout $i \in I = \{1, \dots, n\}$ et $u(x) = \max\{u_1(x), \dots, u_n(x)\}$ pour tout $x \in \omega$, c'est-à-dire

$$u = \sup\{u_1, \dots, u_n\}.$$

Si $I_i = I^h u_i$ ($i = 1, \dots, n$) et $I = I^h u$, de $u \geq u_i$ on déduit $I \geq I_i$ ($i = 1, \dots, n$). Si $J \in \mathfrak{J}_\omega^h$, $J \geq I_i$, ($i = 1, \dots, n$) et $v \in J$, de

$$\liminf_{x \rightarrow \omega^*} \frac{v(x) - u_i(x)}{h(x)} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

on déduit

$$\liminf_{x \rightarrow \omega^*} \min \left[\frac{v(x) - u_1(x)}{h(x)}, \dots, \frac{v(x) - u_n(x)}{h(x)} \right] \geq 0$$

donc

$$\liminf_{x \rightarrow \omega^*} \frac{v(x) - u(x)}{h(x)} \geq 0;$$

il s'ensuit $J \geq I$ donc $I = \sup(I_1, \dots, I_n)$.

THÉOREME 2.2. Soient $u, v \in \mathcal{C}(\omega)$. La condition nécessaire et suffisante pour que $I^h u \geq I^h v$ (respectivement $u \stackrel{h}{\sim} v$) est que pour tout $\varepsilon > 0$ on puisse trouver $K \subset \omega$ compacte dans toute composante de ω , telle que pour tout $x \in \omega \setminus K$ on ait $u(x) - v(x) > -\varepsilon h(x)$ (respectivement $|u(x) - v(x)| < \varepsilon h(x)$).

DÉMONSTRATION. Soient $\varepsilon > 0$ et $I^h u \geq I^h v$ donc

$$\liminf_{x \rightarrow \omega^*} \frac{u(x) - v(x)}{h(x)} \geq 0.$$

Alors il y a un voisinage U de ω^* dans $\omega \cup \omega^*$ tel que pour tout $x \in U \setminus \omega^*$ on ait $u(x) - v(x) > -\varepsilon h(x)$. Si $K = \omega \setminus U$ et ω' est une composante de ω , $K \cap \omega' = \omega' \setminus U = (\omega' \cup (\omega')^*) \setminus U$ est compacte; de plus $\omega \setminus K = U \setminus \omega^*$ ce qui prouve la nécessité.

Si pour tout $\varepsilon > 0$ on trouve $K \subset \omega$ ayant les propriétés de l'énoncé, alors $U = (\omega \cup \omega^*) \setminus K$ est un voisinage ouvert de ω^* et pour $x \in U \setminus \omega^* = \omega \setminus K$ on a

$$\frac{u(x) - v(x)}{h(x)} > -\varepsilon; \quad \text{donc} \quad \liminf_{x \rightarrow \omega^*} \frac{u(x) - v(x)}{h(x)} \geq 0.$$

En tant que $u \stackrel{h}{\sim} v$ signifie $I^h u \geq I^h v$ et $I^h u \leq I^h v$, on sait que $u \stackrel{h}{\sim} v$ est équivalent à: pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $K_1, K_2 \subset \omega$ compactes dans toutes composantes de ω et telles que sur $\omega \setminus (K_1 \cup K_2)$ on ait $|u(x) - v(x)| < \varepsilon h(x)$.

COROLLAIRE 1. Deux fonctions de $\mathcal{C}(\omega)$, égales à l'extérieur d'une partie de ω compacte dans toute composante de ω , sont h -équivalentes.

COROLLAIRE 2. Soit $u \in \mathcal{C}(\omega)$. Lorsque $I^h u \geq I^h 0$ alors pour toute composante ω' de ω se réalise une des situations suivantes:

- 1) $u_{\omega'} > 0$;
- 2) $u_{\omega'}/h_{\omega'}$ atteint dans ω' sa borne inférieure.

En effet soit $x_0 \in \omega'$ tel que $u(x_0) \leq 0$. Si $u_{\omega'} \geq 0$ alors $u(x_0)/h(x_0) = 0 = \inf_{x \in \omega'} u(x)/h(x)$; si $u_{\omega'}$ possède des valeurs négatives, supposons que $u(x_0) < 0$ et soit $\varepsilon = -u(x_0)/h(x_0)$. L'application du théorème 2.2 dans ω' aboutit à l'assertion désirée.

Les deux propositions qui suivent préparent les définitions 2.3 et 2.4 lesquelles, de même que la définition 2.5, permettent la détermination des h -classes de sortie de ω à l'aide de certaines fonctions définies sur des ensembles autres que ω . Ces modes de détermination des h -classes de sortie de ω seront utilisés pour formuler certains types de problèmes de Dirichlet. La proposition 2.5 ainsi que ses corollaires sont de même liées à ces problèmes.

PROPOSITION 2.3. Soient $K \subset \omega$ compacte dans toute composante de ω et $v \in \mathcal{C}(\omega \setminus K)$. Il y a alors $K_1 \subset \omega$, compacte dans toute composante de ω et $u \in \mathcal{C}(\omega)$ telles que $u_{\omega \setminus K_1} = v_{\omega \setminus K_1}$.

En effet, si U et V sont dans $\omega \cup \omega^*$ des voisinages disjoints de

ω^* et K en choisissant $K_1 = \omega \setminus U$ et $u \in \mathcal{C}(\omega)$ prolongeant $v_{\omega \setminus V}$, on aboutit à l'assertion désirée.

DÉFINITION 2.3. Soient $K \subset \omega$ compacte dans toute composante de ω et $v \in \mathcal{C}(\omega \setminus K)$. Si K_1 et u sont ceux dont il s'agit dans la proposition 2.3, nous désignons par $I_\omega^h v$ et nous appelons h -classe de sortie de ω engendrée par v , la classe $I^h u$.

PROPOSITION 2.4. Soient $E \subset X$ fermée, $\partial\omega \subset E$, $\omega \setminus E$ relativement compacte dans toute composante de ω et $v \in \mathcal{C}(E)$. Alors toutes les restrictions à ω des fonctions de $\mathcal{C}(X)$ prolongeant v , sont h -équivalentes.

En effet, soient $v_1, v_2 \in \mathcal{C}(X)$ prolongeant v et u_1, u_2 leurs restrictions à ω . Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in E$ on peut trouver un voisinage ouvert de x , V_x dans lequel $|v_1 - v_2| < \varepsilon$. Si $V = \bigcup_{x \in E} V_x$ et $K = \omega \setminus V$ on peut appliquer le théorème 2.2.

Pour $E = \partial\omega$ on obtient le suivant.

COROLLAIRE. Si toutes les composantes de ω sont relativement compactes et $v \in \mathcal{C}(\partial\omega)$, alors les restrictions à ω des fonctions de $\mathcal{C}(X)$ prolongeant v sont toutes h -équivalentes.

DÉFINITION 2.4. Soient $E \subset X$ fermée, $\partial\omega \subset E$, $\omega \setminus E$ relativement compacte dans toute composante de ω , $v \in \mathcal{C}(E)$, u la restriction à ω d'une fonction de $\mathcal{C}(X)$ prolongeant v . Alors la h -classe de sortie de ω contenant u est appelée la h -classe de sortie de ω engendrée par v et elle est désignée par $I_\omega^h v$.

DÉFINITION 2.5. Soit $v \in \mathcal{C}(X)$. La h -classe de sortie de ω contenant v_ω (la restriction de v à ω) est appelée la h -classe de sortie de ω engendrée par v et elle est désignée par $I_\omega^h v$.

PROPOSITION 2.5. Soient $E \subset X$ fermée, $\partial\omega \subset E$, $v \in \mathcal{C}(E)$, $v_1 \in \mathcal{C}(X)$ et prolongeant v , v_2 la restriction de v_1 à ω , $I = I^h v_2$ et $u \in I$. Si w est une fonction égale à u sur ω et à v sur $E \setminus \omega$ alors $w \in \mathcal{C}(E \cup \omega)$.

En effet, la continuité de w dans les points de ω ainsi que dans les points de E extérieurs à ω est une conséquence du fait que la continuité est héréditaire. Pour $x \in \partial\omega$ on a $w(x) = v(x) = v_1(x)$. Soit U un voisinage de x tel qu'on ait, pour $y \in U$, $h(y) < M = 2h(x)$. Soit $\varepsilon > 0$. De façon que $u \stackrel{h}{\sim} v_2$, il y a $K \subset \omega$ compacte dans toute composante de ω telle que pour tout $y \in \omega \setminus K$ on ait $|u(y) - v_1(y)| < \varepsilon h(y)/2M$ donc $|w(y) - v_1(y)| < \varepsilon/2$. Soient V_1 et V_2 voisinages de x

tels que $V_2 \cap K = \emptyset$ et pour $y \in V_1$, on ait $|v_1(x) - v_1(y)| < \varepsilon/2$ donc $|w(x) - v_1(y)| < \varepsilon/2$. Pour $W = U \cap V_1 \cap V_2$ on obtient successivement $|w(x) - w(y)| < \varepsilon$ si $y \in W \cap \omega$ et si $y \in W \cap (E \setminus \omega)$.

COROLLAIRE 1. Soient $E \subset X$ fermée, $\partial\omega \subset E$, ω/E relativement compacte dans toute composante de ω , $v \in \mathcal{C}(E)$, $u \in I_\omega^h v$, $w_\omega = u$, $w_{E/\omega} = v$. Alors $w \in \mathcal{C}(U \cup \omega)$.

COROLLAIRE 2. Soient $v \in \mathcal{C}(X)$, $u \in I_\omega^h v$, $w_\omega = u$, $w_{X \setminus \omega} = v_{X \setminus \omega}$. Alors $w \in \mathcal{C}(X)$.

PROPOSITION 2.6. Soient $h' \in \mathcal{C}(X)$ et pour toute composante ω de X $\alpha_\omega, \beta_\omega \in (0, +\infty)$.

1) Lorsque pour tout composante ω de X on a $h'_\omega \geq \alpha_\omega h_\omega$ alors $I^h u \leq I^h v$ implique $I^{h'} u \leq I^{h'} v$ et $u \sim v$ implique $u \stackrel{h'}{\sim} v$.

2) Lorsque pour toute composante ω de X on a $\alpha_\omega h_\omega \leq h'_\omega \leq \beta_\omega h_\omega$, alors $I^h u \leq I^h v$ est équivalent à $I^{h'} u \leq I^{h'} v$ et $u \stackrel{h}{\sim} v$ est équivalent à $u \stackrel{h'}{\sim} v$.

En effet, c'est aisé de voir que le théorème 2.2 implique la première des affirmations et que celle-ci implique la deuxième.

3. F -faisceau (axiome 1).

Dans ce qui suit F est un espace vectoriel de fonctions réelles dans X , muni de la relation d'ordre \leq' qui sera tantôt \leq (l'ordre naturel) et tantôt $=$ (l'égalité). F_ω désigne l'espace vectoriel des restrictions à ω des fonctions de F . (F_ω, \leq') désigne F_ω muni de l'ordre \leq' (donc \leq ou $=$) et non pas de l'ordre induit. Pour tout ω partie ouverte de X , U_ω est un sous-espace de $\mathcal{C}(\omega)$ et L_ω une application linéaire de U_ω dans F_ω . Lorsque $f \in F$ et $f_\omega \in L_\omega(U_\omega)$, $U_{\omega,f} = L_\omega^{-1}(f_\omega)$. Les fonctions de $U_{\omega,0}$ sont les fonctions harmoniques dans ω .

Voici quelques propriétés immédiates;

PROPOSITION 3.1.

- 1) $U_{\omega,0}$ est un sous-espace de U_ω .
- 2) Lorsque $u \in U_{\omega,f}$, alors $u + U_{\omega,0} = U_{\omega,f}$.
- 3) Lorsque $f'_\omega = f''_\omega$, alors $U_{\omega,f'} = U_{\omega,f''}$.

Deux relations d'ordre sur U_ω seront utilisées.

DÉFINITION 3.1. — Soit $u, v \in U_\omega$. On écrit $u \geq' v$ lorsque $u \geq v$ (dans l'ordre naturel) et $L_\omega u \leq' L_\omega v$. Lorsque \leq' est $=$ on écrit \geq_s et lorsque \leq' est $<$ on écrit $>$. La relation $\geq_s (>)$ est appelée ordre sévère (spécifique) dans U_ω .

PROPOSITION 3.2. $\geq', >, \geq_s$ sont relations d'ordre dans U_ω compatibles avec sa structure d'espace vectoriel.

En effet, lorsqu'on identifie U_ω avec le sous-espace de $U_\omega \oplus F_\omega$ constitué des éléments ayant la forme $(u, L_\omega u)$ et U_ω, F_ω sont munis de l'ordre \geq respectivement \leq' , le théorème 1.2 permet d'aboutir à la conclusion désirée.

AXIOME 1. Pour toute ω , partie ouverte de X et pour tout $f \in F$ l'appartenance à $U_{\omega, f}$ est héréditaire (et a fortiori divisible).

L'espace F , la totalité des familles U_ω et la totalité des applications L_ω vérifiant l'axiome 1 constituent un F -faisceau dans X . Lorsque $F = \{0\}$ l'axiome 1 est au juste l'axiome 1 de Brelot [4] et le F -faisceau est au juste le faisceau des fonctions harmoniques (voir Brelot [5] et Constantinescu-Cornea [8]). D'ailleurs, pour F quelconque, la totalité des fonctions des familles $U_{\omega, 0}$ constitue le faisceau des fonctions harmoniques.

PROPOSITIONS 3.3. Soient $u \in U_\omega$ et $x \in \omega$. Alors $L_\omega u(x)$ dépend seulement des valeurs de u dans un voisinage de x . (C'est-à-dire l'application L_ω est « locale »).

En effet, si $u \in U_{\omega, f}$, $v \in U_{\omega', g}$, $x \in \omega'' \subset \omega' \cap \omega$ et $u_{\omega''} = v_{\omega''} = w$ selon l'axiome 1 on a $w \in U_{\omega', f}$ et $w \in U_{\omega'', g}$ donc

$$(L_\omega u)_{\omega''} = f_{\omega''} = L_{\omega'} w = g_{\omega''} = (L_{\omega'} v)_{\omega''}.$$

Une conséquence directe de l'axiome 1 et des définitions est la

PROPOSITION 3.4. Le fait de vérifier quelconques des relations $\geq', >, \geq_s$ est une propriété héréditaire (et a fortiori divisible).

4. Ensembles réguliers.

DÉFINITION 4.1. Lorsque toutes les composantes de ω sont relativement compactes et pour tout $\varphi \in C(\partial\omega)$ et tout $f \in F$ il y a $u \in I_\omega \varphi \cap U_{\omega, f}$ et de plus $\varphi \geq 0, f_\omega < 0$ impliquent $u \geq 0$ on dit que ω est un ensemble régulier. (Rappelons que $I_\omega \varphi = I'_\omega \varphi$).

PROPOSITION 4.1. Lorsque ω est un ensemble régulier, $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\omega)$ et $f \in F$ alors l'ensemble $I_{\omega\varphi} \cap U_{\omega,f}$ contient exactement un élément.

En effet, si $u, v \in I_{\omega\varphi} \cap U_{\omega,f}$ et $w = u - v$ on a $w \in I_{\omega 0}$ (théorème 2.1) et $w \in U_{\omega,0}$ (proposition 3.1). Selon la définition d'un ensemble régulier on déduit alors que $w \geq 0$ et, de même manière, que $-w \geq 0$.

DÉFINITION 4.2. Soient ω un ensemble régulier, $u \in \mathcal{C}(X)$, $f \in F$. On désigne par $u_{\omega,f}$ la fonction qui dans $X \setminus \omega$ est égale à u et dans ω est égale à l'élément unique de $I_{\omega u} \cap U_{\omega,f}$. On appelle $u_{\omega,f}$ la (ω, f) -rectifiée de u . Du corollaire 2 de la proposition 2.5 on déduit que $u_{\omega,f}$ est continue.

PROPOSITION 4.2. Soient $(\mathcal{C}(X), \geq)$, (F_{ω}, \leq) et ω un ensemble régulier. L'application $(u, f_{\omega}) \rightarrow u_{\omega,f}$ de $\mathcal{C}(X) \oplus F_{\omega}$ (avec l'ordre du théorème 1.2) dans $(\mathcal{C}(X), \geq)$ est linéaire (en particulier $(-u)_{\omega,-f} = -(u_{\omega,f})$) et isotone ($u \geq v$ et $f_{\omega} \leq g_{\omega}$ impliquent $u_{\omega,f} \geq v_{\omega,g}$).

En effet, soient $u, v \in \mathcal{C}(X)$; $\lambda, \mu \in R$; $f, g \in F$. Du théorème 2.1 on déduit que $I_{\omega}(\lambda u + \mu v) = \lambda I_{\omega}u + \mu I_{\omega}v$ et que $(\lambda u_{\omega,f} + \mu v_{\omega,g})_{\omega} \in I_{\omega}(\lambda u + \mu v)$. La linéarité de L_{ω} implique $L_{\omega}(\lambda u_{\omega,f} + \mu v_{\omega,g})_{\omega} = (\lambda f + \mu g)_{\omega}$. Par conséquent, $\lambda u_{\omega,f} + \mu v_{\omega,g} \in I_{\omega}(\lambda u + \mu v) \cap U_{\omega, \lambda f + \mu g}$, fait qui selon la proposition 4.1 prouve que $((\lambda u + \mu v)_{\omega, \lambda f + \mu g})_{\omega} = (\lambda u_{\omega,f} + \mu v_{\omega,g})_{\omega}$. Evidemment $((\lambda u + \mu v)_{\omega, \lambda f + \mu g})_{X \setminus \omega} = (\lambda u_{\omega,f} + \mu v_{\omega,g})_{X \setminus \omega}$ et alors, finalement $(\lambda u + \mu v)_{\omega, \lambda f + \mu g} = \lambda u_{\omega,f} + \mu v_{\omega,g}$. Pour $\lambda = -1$, $\mu = 0$ on déduit $(-u)_{\omega,-f} = -(u_{\omega,f})$. Lorsque $u \geq v$ et $f_{\omega} \leq g_{\omega}$ on a $(u - v)_{\partial\omega} \geq 0$ et $(f - g)_{\omega} \leq 0$ et selon la définition d'un ensemble régulier $((u - v)_{\omega, f - g})_{\omega} \geq 0$. Alors $u_{\omega,f} - v_{\omega,g} = (u - v)_{\omega, f - g} \geq 0$.

La proposition 4.2 a des conséquences immédiates que nous formulons ci-dessous :

PROPOSITION 4.3. Soient $f, f_1, \dots, f_n \in F$ et ω un ensemble régulier.

1) Lorsque $u \leq u_{\omega,f}$ ($u \geq u_{\omega,f}$) alors $-u \geq (-u)_{\omega,-f}$ (respectivement $-u \leq (-u)_{\omega,-f}$) et réciproquement.

2) Lorsque $u \leq u_{\omega,f}$ ($u \geq u_{\omega,f}$) et $\lambda \in (0, +\infty)$ alors $\lambda u \leq (\lambda u)_{\omega, \lambda f}$ (respectivement $\lambda u \geq (\lambda u)_{\omega, \lambda f}$) et réciproquement.

3) Lorsque pour $i = 1, \dots, n$ on a $u_i \leq (u_i)_{\omega, f_i}$ ($u_i \geq (u_i)_{\omega, f_i}$) et $f = f_1 + \dots + f_n$, $u = u_1 + \dots + u_n$ alors $u \leq u_{\omega,f}$ (respectivement $u \geq u_{\omega,f}$).

4) Lorsque $u_1 \leq (u_1)_{\omega, f_1}$ et $u_2 \geq (u_2)_{\omega, f_2}$ ($u_1 \geq (u_1)_{\omega, f_1}$ et $u_2 \leq (u_2)_{\omega, f_2}$) alors $u_1 - u_2 \leq (u_1 - u_2)_{\omega, f_1 - f_2}$ (respectivement $u_1 - u_2 \geq (u_1 - u_2)_{\omega, f_1 - f_2}$).

5) Lorsque pour $i = 1, \dots, n$ on a $u_i \leq (u_i)_{\omega, f_i}$ ($u_i \geq (u_i)_{\omega, f_i}$) et $u = \sup\{u_1, \dots, u_n\}$ (respectivement $u = \inf\{u_1, \dots, u_n\}$) alors $u \leq u_{\omega,f}$ (respectivement $u \geq u_{\omega,f}$).

6) Lorsque $u \leq u_{\omega, f_1}$ ($u \geq u_{\omega, f_2}$) et $f_1 \geq f_2$ alors $u \leq u_{\omega, f_2}$ (respectivement $u \geq u_{\omega, f_1}$).

Cette dernière assertion a pour conséquence la

PROPOSITION 4.4. Soient $u \in C(X)$, $f \in F$, ω un ensemble régulier et $u_\omega \in U_\omega$. Lorsque $L_\omega u_\omega \geq f_\omega$ ($L_\omega u_\omega \leq f_\omega$) alors $u \leq u_{\omega, f}$ (respectivement $u \geq u_{\omega, f}$).

En effet, si $L_\omega u_\omega = g_\omega$, $g \in F$ on a $g_\omega \geq f_\omega$ et $u_\omega \in I_\omega u \cap U_{\omega, g}$ donc $u = u_{\omega, g}$ et par conséquent $u \leq u_{\omega, f}$.

5. L'axiome 2.

AXIOME 2. Pour tout domaine $\omega \subset X$, l'enveloppe supérieure d'une famille ordonnée filtrante croissante de fonctions de $(U_{\omega, s})$ est égale à $+\infty$ dans ω ou bien, elle est la borne supérieure de cette famille.

Lorsque $F = \{0\}$, l'axiome 2 est justement l'axiome 3 de Brelot [4], [5].

Deux conséquences immédiates de l'axiome 2 suivent ci-dessous.

PROPOSITION 5.1. Soient ω une partie ouverte de X et ω' une composante de ω .

1) La restriction à ω' de l'enveloppe supérieure d'une famille ordonnée filtrante croissante de fonctions de $(U_{\omega, s})$ est égale à $+\infty$ dans ω' ou bien elle est la borne supérieure des restrictions à ω' des fonctions de cette famille.

2) Lorsque $u, v \in U_\omega$ et $u \geq_s v$ alors $u_{\omega'} = v_{\omega'}$ ou bien $u_{\omega'} > v_{\omega'}$.

En effet, si la première assertion est évident, la deuxième s'ensuit lorsqu'on considère la famille $\{n(u - v); n \in N\}$ selon un procédé classique [4].

PROPOSITION 5.2. Soient ω un ensemble régulier et $e = (1)_{\omega, 0}$. Alors pour toute composante ω' de ω on a $0 < \inf_{x \in \omega'} e(x) \leq \sup_{x \in \omega'} e(x) < +\infty$.

En effet $e_\omega \geq_s 0$ et si $x_0 \in \omega'$ et $e(x_0) = 0$ on déduit à l'aide de la proposition 5.1 que $e_{\omega'} = 0$ donc $e_{\partial\omega'} = 0$, fait absurde car $e_{\partial\omega} = 1$ et $\partial\omega' \subset \partial\omega$. Alors $\overline{\omega'}$ est un compact de X , $e_{\overline{\omega'}} > 0$ et $e_{\overline{\omega'}} \in C(\overline{\omega'})$.

PROPOSITION 5.3. Soient ω, ω' ensembles réguliers, $f \in F$, $u \in C(X)$ et $v = u_{\omega, f}$. Lorsque $u \leq u_{\omega, f}$ et $u \leq u_{\omega', f}$ ($u \geq u_{\omega, f}$ et $u \geq u_{\omega', f}$) alors $v \leq v_{\omega', f}$ (respectivement $v \geq v_{\omega', f}$).

Dans $X \setminus \omega'$ on a $v_{\omega', f} = v$. Dans $\omega' \setminus \omega$, $v = u \leq u_{\omega', f} \leq v_{\omega', f}$. Donc si $\omega'' = \omega' \cap \omega$, on a dans $X \setminus \omega''$ $v \leq v_{\omega', f}$. Soit $w = (v_{\omega', f})_{\omega''} - v_{\omega''}$; on a $w_{\partial \omega''} \geq 0$ donc $I_{\omega''} w \geq I 0$. Soit $e = (1)_{\omega, 0}$; pour toute composante ω''' de ω'' $\inf_{x \in \omega''} e(x) = \alpha_{\omega''} > 0$ donc $e_{\omega''} \geq 1 \cdot \alpha_{\omega''}$, et par suite de la proposition 2.6 on obtient $I_{\omega''}^e w \geq I^e 0$. S'il y aurait $x_0 \in \omega''$ tel que $w(x_0) < 0$, il y aurait, selon le corollaire 2 du théorème 2.2, $x_1 \in \omega''$ tel que $(w(x_1)/e(x_1)) = \beta = \inf_{x \in \omega''} (w(x)/e(x)) < 0$. Si $s = w_{\omega''} - \beta e_{\omega''}$ on a $s \geq 0$ et $s(x_1) = 0$; soit ω''' la composante de ω'' contenant x_1 ; la proposition 5.1 implique $s_{\omega''} = 0$ c'est-à-dire $w_{\omega''} = \beta e_{\omega''}$ donc $w_{\partial \omega''} = \beta e_{\partial \omega''}$ ce qui est absurde car $\partial \omega''' \subset \partial \omega''$. La contradiction obtenue prouve que $w \geq 0$ donc qu'aussi dans ω'' on a $v \leq v_{\omega', f}$.

6. Axiome 3.

AXIOME 3. Il existe une base \mathcal{B} d'ensembles réguliers pour la topologie de X .

On verra (proposition 6.4) que lorsque $F = \{0\}$ l'axiome 3 est justement l'axiome 2 de Brelot [4].

DÉFINITION 6.1. Soit $f \in F$. Nous désignons par \bar{f} (respectivement par \underline{f}) l'ensemble des fonctions $u \in C(X)$ telles que pour tout $\omega \in \mathcal{B}$ on ait $u \geq u_{\omega, f}$ (respectivement $u \leq u_{\omega, f}$). \underline{f} et \bar{f} généralisent les familles des fonctions sousharmoniques et superharmoniques finies et continues.

Une conséquence immédiate de la proposition 4.4 est la

PROPOSITION 6.1. Soient $u \in C(X)$ et $f \in F$. Lorsque pour tout $\omega \in \mathcal{B}$ on a $u_{\omega} \in U_{\omega}$ et $L_{\omega} u_{\omega} \geq f_{\omega}$ (respectivement $L_{\omega} u_{\omega} \leq f_{\omega}$) alors $u \in \underline{f}$ (respectivement $u \in \bar{f}$).

A l'aide de cette proposition et de l'axiome 1 on obtient aisément la

PROPOSITION 6.2. Soit $f \in F$. Alors $\underline{f} \cap \bar{f} = U_{X, f}$.

Une suite de propriétés simples mais utiles, conséquences directes propositions 4.3 et 5.3, constitue la

PROPOSITION 6.3. Soient $f, f_1, \dots, f_n \in F$. Alors

$$1) \quad -\underline{f} = (\overline{-f}) \text{ et } -\bar{f} = (\underline{-f}),$$

$$2) \quad \text{pour tout } \lambda \in (0, +\infty) \text{ on a } \lambda \underline{f} = (\underline{\lambda f}) \text{ et } \lambda \bar{f} = (\overline{\lambda f}),$$

- 3) $\underline{f}_1 + \dots + \underline{f}_n \subset \overline{(f_1 + \dots + f_n)}$ et $\bar{f}_1 + \dots + \bar{f}_n \subset \overline{(f_1 + \dots + f_n)}$,
 4) $\underline{f}_1 - \bar{f}_2 \subset \overline{(f_1 - f_2)}$ et $\bar{f}_1 - \underline{f}_2 \subset \overline{(f_1 - f_2)}$,
 5) $u_1, \dots, u_n \in \underline{f} (u_1, \dots, u_n \in \bar{f})$ implique $\sup\{u_1, \dots, u_n\} \in \underline{f}$ (respectivement $\inf\{u_1, \dots, u_n\} \in \bar{f}$),
 6) $f_1 \geq f_2$ implique $\underline{f}_1 \subset \underline{f}_2$ et $\bar{f}_1 \supset \bar{f}_2$,
 7) $u \in \underline{f} (u \in \bar{f})$ et $\omega \in \mathfrak{B}$ impliquent $u_{\omega, f} \in \underline{f}$ (respectivement $u_{\omega, f} \in \bar{f}$).

Un lemme topologique sera nécessaire en ce qui suit.

LEMME 6.1. Soit A un espace topologique localement connexe et sans composantes compactes. Soit B une partie non vide, fermée de A ayant de plus la propriété suivante: tout point de B possède un système fondamental de voisinages ouverts dont les frontières sont des parties B . Alors B est une réunion de composantes de A .

Soient $x_0 \in B$ et C la composante de A contenant x_0 . Nous prouvons que $C \subset B$. Si $C \setminus B \neq \emptyset$ et D une composante de $C \setminus B$, alors D est une partie ouverte et non vide de C mais différente de C et par conséquent non fermée, quoique fermée dans $C \setminus B$. Si $x_1 \in \partial D$ on a $x_1 \notin C \setminus B$ donc $x_1 \in B \cap C$. Soit $x_2 \in D$ et ω un voisinage de x_1 ouvert, ayant la frontière dans B et tel que $\omega \subset C \setminus \{x_2\}$. Mais $D \setminus \omega = D \setminus \bar{\omega}$ est alors une partie ouverte de D , ainsi que $D \cap \omega$; les deux étant non vides, on aboutit à une contradiction qui prouve le lemme.

THÉORÈME 6.1. Soient ω' une composante de ω et $u \in \overline{0_{F_\omega}}$ (respectivement $u \in 0_{F_\omega}$). (0_{F_ω} est l'élément zéro de F_ω).

1) Lorsque $u \geq 0$ (respectivement $u \leq 0$) alors $u_{\omega'} > 0$ (respectivement $u_{\omega'} < 0$) ou bien $u_{\omega'} = 0$.

2) Lorsque $h \in \overline{0_{F_\omega}}$, et $h > 0$ alors $u_{\omega'}/h > \inf_{x \in \omega'} (u(x)/h(x))$ (respectivement $u_{\omega'}/h < \sup_{x \in \omega'} (u(x)/h(x))$) ou bien $u_{\omega'}/h = \text{const.}$

3) lorsque $h \in \overline{0_{F_\omega}}$, $h > 0$ et $I^h u \geq I^h 0$ (respectivement $I^h u \leq I^h 0$) alors $u_{\omega'} > 0$ (respectivement $u_{\omega'} < 0$) ou bien $u_{\omega'} = 0$.

DÉMONSTRATION.

1) Soient $x_0 \in \omega'$, $u(x_0) = 0$, $B = \{x \in \omega; u(x) = 0\}$. B est alors une partie fermée et non vide de ω . Soient $x_1 \in B$, $\omega'' \in \mathfrak{B}$, $\omega'' \subset \omega$,

$\omega' \in x_1$ et ω'' la composante de ω' contenant x_1 ; les ensembles tels que ω'' forment un système fondamental de voisinages ouverts de x_1 . On a $u_{\omega''} \geq 0$ donc $(u_{\omega'',0})_{\omega''} \geq 0$ et par conséquent $(u_{\omega'',0})_{\omega''} \geq 0$, $u_{\omega'',0} \leq u$, $u(x_1) = 0$. Alors $u_{\omega'',0}(x_1) = 0$ et la proposition 5.1 implique $(u_{\omega'',0})_{\omega''} = 0$ donc $(u_{\omega'',0})_{\partial\omega''} = u_{\partial\omega''} = 0$ donc $\partial\omega'' \subset B$. Le lemme 6.1 conduit alors à la conclusion que $\omega' \subset B$ donc que $u_{\omega'} = 0$.

2) Lorsque $\beta = \inf_{x \in \omega'} (u(x)/h(x)) = u(x_1)/h(x_1)$, $x_1 \in \omega'$, $w = u_{\omega'} - \beta h$ on déduit $w \geq 0$, $w(x_1) = 0$, $w \in \overline{0_{F\omega'}}$ (proposition 6.3). Par conséquence de l'assertion 1 prouvée ci-dessus on a $w = 0$ donc $u_{\omega'} = \beta h$.

3) Lorsque $x_0 \in \omega'$ et $u(x_0) \leq 0$, selon le corollaire 2 du théorème 2.2, il existe $x_1 \in \omega'$ tel que $u(x_1)/h(x_1) = \inf_{x \in \omega'} (u(x)/h(x)) = \beta \leq 0$. L'assertion 2 montre alors que $u_{\omega'}/h_{\omega'} = \beta \leq 0$; de $I^h u \geq I^h 0$ on déduit, en utilisant le théorème 2.1 que $I_{\omega'}^h u \geq I_{\omega'}^h 0$ donc que $\beta \geq 0$. Cela prouve que $\beta = 0$ et $u_{\omega'} = 0$.

PROPOSITION 6.4.

1) La propriété de régularité est divisible.

2) Pour tout $f \in F$, l'appartenance à f ainsi que celle à \bar{f} sont divisibles.

DÉMONSTRATION.

1) Soient ω un ensemble régulier, ω' une composante de ω , $\varphi' \in \mathcal{C}(\partial\omega')$, $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\omega)$ prolongeant φ' , $f \in F$, $u \in I_{\omega} \varphi \cap U_{\omega',f}$, $v = u_{\omega'}$. C'est aisé de voir que $v \in I_{\omega'} \varphi' \cap U_{\omega',f}$. Lorsque $\varphi' \geq 0$ et $f_{\omega'} \leq 0$ on peut choisir $\varphi \geq 0$. Soient $w \in I_{\omega} \varphi \cap U_{\omega,0}$ et $t = w_{\omega'}$. Evidemment $w \geq 0$, $t \in I_{\omega'} \varphi' \cap U_{\omega',0}$ et $t \geq 0$. Mais $I(t-v) = I_{\omega'} 0$ (théorème 2.1), $v \in \overline{0_{F\omega'}}$ (proposition 6.1), $t \in U_{\omega',0} \subset \overline{0_{F\omega'}}$ (proposition 6.2) et alors $t-v \in \overline{0_{F\omega'}}$ (proposition 6.3). Le théorème 6.1 implique $t-v \leq 0$ donc $0 \leq t \leq v$ ce qui achève la démonstration de la régularité de ω' .

2) L'appartenance à \underline{f} ainsi que celle à \bar{f} s'exprime à l'aide de la régularité, des inégalités entre fonctions réelles, de la l'appartenance à $U_{X,f}$ et de l'appartenance à certaines h -classes de sortie; toutes ces propriétés sont divisibles.

THÉORÈME 6.2. Soient G un ensemble d'indices, $\underline{f} \in F$, $\{f_{\gamma}; \gamma \in G\} \subset F$.

1) Lorsque A est une partie ordonnée filtrante croissante de \underline{f} (décroissante de \bar{f}), fermée par rapport à l'application $u \rightarrow u_{\omega,f}$ pour

tout $\Omega \subset \mathfrak{B}$ et a est l'enveloppe supérieure (inférieure) des fonctions de la famille A , alors pour toute composante ω de X on a $a_\omega = +\infty$ (respectivement $a_\omega = -\infty$) ou bien $a_\omega \in U_{\omega, f}$.

2) Lorsqu'il existe, dans (F, \leq') , $f = \bigwedge_{\gamma \in G} f_\gamma$ ($f = \bigvee_{\gamma \in G} f_\gamma$) et $u \in \bar{f}$ ($u \in \underline{f}$) pour tout $\gamma \in G$ on a $\bar{f} \ni u \geq u_\gamma \in \underline{f}_\gamma$ ($\underline{f} \ni u \leq u_\gamma \in \bar{f}_\gamma$) alors dans l'ensemble des majorantes appartenant à \bar{f} (minorantes appartenant à \underline{f}) de la famille $\{u_\gamma; \gamma \in G\}$ il existe un plus petit (grand) élément et celui-ci appartient à $U_{X, f}$.

3) Lorsque $u \in \bar{f}$ ($u \in \underline{f}$) et pour tout $\gamma \in G$ on a $u \geq u_\gamma \in \underline{f}$ ($u \leq u_\gamma \in \bar{f}$) alors on a la conclusion de l'assertion 2 (ci-dessus).

4) (U_X, \geq_s) est une m -lattice linéaire Dedekind complète.

5) Lorsque (F, \leq) est une m -lattice linéaire (m -lattice linéaire Dedekind complète), alors $(U_X, >)$ est une m -lattice linéaire (m -lattice linéaire Dedekind complète).

DÉMONSTRATION.

1) Soient $x_0 \in \omega$, $\omega' \in \mathfrak{B}$, $\omega' \subset \omega$, $\omega' \ni x_0$ et $B = \{(u_{\omega', f})_{\omega'}; u \in A\}$. On a $u_{\omega'} \leq (u_{\omega', f})_{\omega'} \leq a_\omega$, fait qui prouve que $a_{\omega'}$ est l'enveloppe supérieure des fonctions de la famille B . On vérifie aisément que B est ordonnée filtrante croissante dans $(U_{\omega'}, \geq_s)$. Lorsque ω'' est la composante de ω' contenant x_0 et $a(x_0) \leq +\infty$ on déduit (proposition 5.1) que $a_{\omega''} \in U_{\omega'', f}$. Il s'en suit que l'ensemble $C = \{x \in \omega; a(x) < +\infty\}$ est ouvert et que $a_C \in U_{C, f}$ (axiome 1); lorsque $a(x_0) = +\infty$ on a (proposition 5.1) $a_{\omega''} = +\infty$ ce qui prouve que $\omega \setminus C$ est aussi un ensemble ouvert. Par conséquent ω coïncide avec C (et alors $a_\omega \in U_{\omega, f}$) ou bien avec $\omega \setminus C$ et alors $a_\omega = +\infty$.

2) Soit A la famille des majorantes appartenant à \bar{f} , de la famille $\{u_\gamma; \gamma \in G\}$. A l'aide de la proposition 6.3 on peut vérifier que A remplit toutes les conditions pour prouver appliquées l'assertion 1. Si w est l'enveloppe inférieure des fonctions de la famille A on déduit alors que $w \in U_{X, f}$; mais $w \geq u_\gamma$ pour tout $\gamma \in G$ et $U_{X, f} \subset \bar{f}$, donc $w \in A$.

3) Se déduit de 2 pour $f_\gamma = f$, \leq' étant $=$.

4) et 5). Supposons que G possède deux (ou un nombre quelconque) d'éléments et que (F, \leq') est une m -lattice linéaire (respectivement m -lattice linéaire Dedekind complète). Lorsque $\{u_\gamma; \gamma \in G\} \subset U_X$ est majorée dans (U_X, \geq') par u et $L_X u_\gamma = f_\gamma$, $L_X u = g$ alors pour

tout $\gamma \in G$ on a $u_\gamma \leq u$ et $f_\gamma \geq' g$. Donc il existe $\bigwedge_{\gamma \in G} f_\gamma = f \geq' g$ et $u \in \bar{f}$ (proposition 6.1). On peut alors utiliser l'assertion 2 et l'élément de $U_{x,f}$ trouvé est évidemment la borne supérieure de $\{u_\gamma; \gamma \in G\}$ dans (U_x, \geq') . La proposition 1.3 est maintenant applicable.

7. Le problème de Dirichlet.

En tout ce qui suit H désignera l'ensemble des fonctions appartenant à la classe $\overline{0_F}$ (surharmoniques) strictement positives, c'est-à-dire $H = \{h \in \overline{0_F}; h > 0\}$.

DÉFINITION 7.1. Soient $h \in H, I \in \mathcal{J}_\omega^h, f \in F$. On appelle $p = (I, f_\omega)$ un h -problème de Dirichlet dans ω ; résoudre le problème p , veut dire, trouver une fonction $u \in I \cap U_{\omega,f}$. Alors $\mathcal{J}_\omega^h \oplus F_\omega$ est l'ensemble des h -problèmes de Dirichlet dans ω et nous le désignons par \mathcal{D}_ω^h . Le sous-ensemble des problèmes de Dirichlet qui possèdent au moins une solution est désigné par $\mathcal{D}_\omega^h \mathcal{S}$. Pour tout $p \in \mathcal{D}_\omega^h$ nous désignons par Sp l'ensemble des solutions du problème $p, Sp = I \cap U_{\omega,f}$, même si cet ensemble est vide. Lorsque Sp possède un seul élément nous désignons cet élément même toujours par Sp . Dans \mathcal{D}_ω^h on considère l'ordre \geq' du théorème 1.2: $(\mathcal{D}_\omega^h, \geq') = (\mathcal{J}_\omega^h, \geq) \oplus (F_\omega, \leq')$. Lorsque \leq' est $=$ (respectivement \leq) nous écrivons $\underset{s}{\geq}$ (respectivement \geq) au lieu de \geq' et nous l'appelons ordre sévère (respectivement ordre naturel) dans \mathcal{D}_ω^h . IL_ω^h désigne l'application $u \rightarrow (I^h u, L_\omega u)$ de U_ω dans $\mathcal{D}_\omega^h \mathcal{S}$.

Résoudre le problème $p = (I, f_\omega)$ revient donc à trouver une fonction $u \in U_\omega$ telle que $L_\omega u = f_\omega$ et que $I^h u = I$. Les formulations traditionnelles sont incluses. Lorsqu'il s'agit d'un ensemble relativement compact, la classe de sortie est celle de la définition 2.4; lorsqu'il s'agit du problème de Dirichlet extérieur, la classe de sortie est toujours celle de la définition 2.4, engendrée cependant par une fonction égale sur la frontière avec les données de Dirichlet et nulle à l'extérieur d'un voisinage de la frontière. Le fait que la solution au sens de la définition 7.1 est solution au sens traditionnel est une conséquence du corollaire 1 de la proposition 2.5, conjointement — pour le problème extérieur — avec le théorème 2.2; bien entendu ici $h = 1$.

THÉORÈME 7.1. Soit $h \in H$.

- 1) Tout h -problème de Dirichlet admet au plus une solution.

2) Lorsque $p, q \in \mathcal{D}_\omega^h \mathcal{S}$ et $p \geq q$ alors $\mathcal{S}p \geq \mathcal{S}q$ (ici le premier signe \geq est dans le sens de la définition 7.1 tandis que le deuxième est dans le sens de la définition 3.1).

DÉMONSTRATION. Soient $p, q \in \mathcal{D}_\omega^h \mathcal{S}$, $p \geq q$, $p = (I, f_\omega)$, $q = (J, g_\omega)$. Alors $I \geq J$ et $f_\omega \leq' g_\omega$. Lorsque $u \in \mathcal{S}p$ et $v \in \mathcal{S}q$ donc $u \in I \cap U_{\omega, f}$ et $v \in J \cap U_{\omega, g}$ on déduit que $L_\omega u \leq' L_\omega v$ donc $u - v \in \overline{0}_F$ et que

$$I^h(u - v) = I - J \geq I^h 0.$$

Le théorème 6.1 implique alors $u \geq v$. Pour prouver l'assertion 1, de $u, v \in \mathcal{S}p$ on déduit $u \geq v$ et $u \leq v$ donc $u = v$. L'assertion 2 s'ensuit de l'assertion 1 et du fait établi ci-dessus.

THÉORÈME 7.2. Soit $h \in H$.

1) IL_ω^h est une application linéaire et isotone de (U_ω, \geq') dans $(\mathcal{D}_\omega^h, \geq')$ ayant pour ensemble des valeurs $\mathcal{D}_\omega^h \mathcal{S}$ (donc $\mathcal{D}_\omega^h \mathcal{S}, \geq')$ est un sous-espace de $(\mathcal{D}_\omega^h, \geq')$.

2) $IL_\omega^h: U_\omega \rightarrow \mathcal{D}_\omega^h \mathcal{S}$ a pour invrse \mathcal{S} et les deux applications sont des isomorphismes entre les deux espaces linéaires ordonnés.

3) $(\mathcal{D}_\omega^h \mathcal{S}, \geq)$ est une m -lattice linéaire Dedekind complète.

4) Lorsque (F_ω, \leq) est une m -lattice linéaire (m -lattice linéaire Dedekind complète) alors $(\mathcal{D}_\omega^h \mathcal{S}, \geq)$ est une m -lattice (respectivement m -lattice linéaire Dedekind complète).

DÉMONSTRATION.

1. C'est aisé de voir que l'application IL_ω^h est linéaire (à l'aide du théorème 2.1 et de la linéarité de L_ω); elle est aussi injective à raison du théorème 7.1; le fait que $IL_\omega^h U_\omega = \mathcal{D}_\omega^h \mathcal{S}$ est trivial. Lorsque $u, v \in U_\omega$ et $u \geq' v$ alors $u \geq v$ et $L_\omega u \leq L_\omega v$; selon le théorème 2.1 on a $I^h u \geq I^h v$, donc $(I^h u, L_\omega u) \geq' (I^h v, L_\omega v)$ c'est-à-dire $IL_\omega^h u \geq' IL_\omega^h v$.

2) Le fait que $\mathcal{S} = IL_\omega^{h-1}$ est évident. Soient $p, q \in \mathcal{D}_\omega^h \mathcal{S}$ et $u = \mathcal{S}p$, $v = \mathcal{S}q$. Lorsque $p \geq' q$, donc $(I^h u, L_\omega u) \geq' (I^h v, L_\omega v)$ alors $I^h(u - v) \geq I^h 0$ et $L_\omega(u - v) \leq 0$, donc $u - v \in \overline{0}_F$ (proposition 6.1). Alors, selon le théorème 6.1, on déduit que $u \geq v$ et de plus, $L_\omega u \leq L_\omega v$ implique alors $u \geq v$.

3) et 4) Sont conséquences de l'assertion 2, du théorème 6.1 et de la proposition 1.4.

DÉFINITION 7.2. Soient $h \in H$, $p = (I, f) \in \mathcal{D}_X^h$. Nous désignons par \underline{p} (\overline{p}) l'ensemble des fonctions u de \underline{f} (\overline{f}) ayant la propriété que $I^h u \leq I$ (respectivement $I^h u \geq I$).

PROPOSITION 7.1. Soient $h \in H$ et $p = (I, f) \in \mathcal{D}_X^h$. Alors $\underline{p} \cap \overline{p} = Sp$.

En effet, de la proposition 6.2 on déduit que $\underline{p} \cap \overline{p} \subset U_{X,f}$; de plus, si $u \in \underline{p} \cap \overline{p}$ on a $I^h u \geq I \geq I^h u$ donc $u \in I$ ce qui implique $\underline{p} \cap \overline{p} \subset Sp$, L'inclusion $Sp \subset \underline{p} \cap \overline{p}$ est immédiate.

PROPOSITION 7.2. Soient $h \in H$; $p, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{D}_X^h$; $p = (I, f)$; $p_i = (I_i, f_i)$ pour $i = 1, \dots, n$.

- 1) $-\underline{p} = \overline{(-p)}$ et $-\overline{p} = \underline{(-p)}$,
- 2) lorsque $\lambda > 0$, alors $\lambda \underline{p} = \underline{(\lambda p)}$ et $\lambda \overline{p} = \overline{(\lambda p)}$,
- 3) $\underline{p}_1 + \dots + \underline{p}_n \subset \underline{(p_1 + \dots + p_n)}$ et $\overline{p}_1 + \dots + \overline{p}_n \subset \overline{(p_1 + \dots + p_n)}$,
- 4) $\underline{p}_1 - \overline{p}_2 \subset \underline{(p_1 - p_2)}$ et $\overline{p}_1 - \underline{p}_2 \subset \overline{(p_1 - p_2)}$,
- 5) $u_1, \dots, u_n \in \underline{p}$ ($u_1, \dots, u_n \in \overline{p}$) impliquent $\sup \{u_1, \dots, u_n\} \in \underline{p}$ (respectivement $\inf \{u_1, \dots, u_n\} \in \overline{p}$),
- 6) $p_1 \leq p_2$ implique $\underline{p}_1 \subset \underline{p}_2$ et $\overline{p}_1 \supset \overline{p}_2$,
- 7) $u \in \underline{p}$ ($u \in \overline{p}$) et $\omega \in \mathfrak{B}$ impliquent $u_{\omega, f} \in \underline{p}$ (respectivement $u_{\omega, f} \in \overline{p}$),
- 8) $u \in p$, $v \in \overline{p}$ impliquent $u \leq v$ et $u - v \in \mathbf{0}_F$.

En effet, les assertions 1, 2, 3, 5 et 6 découlent du théorème 2.1 et de la proposition 6.3. L'assertion 4 est une conséquence des assertions 1 et 3. L'assertion 7 s'ensuit de la proposition 6.3 et du fait que $\overline{\omega}$ étant compact dans toute composante de X , on peut appliquer le corollaire 1 du théorème 2.2. Finalement on déduit l'assertion 8 de la proposition 6.3 et du théorème 6.1.

Une conséquence immédiate des propositions 2.1 et 6.4 est la

PROPOSITION 7.3. Soient $h \in H$ et $p \in \mathcal{D}_X^h$. L'appartenance à \underline{p} ainsi que celle à \overline{p} , sont divisibles.

PROPOSITION 7.4. Soient $h \in H$ et $u, v \in \mathcal{C}(X)$; alors les quatre

situations suivantes sont équivalentes :

- 1) $u - v \in \overline{0_{\mathcal{D}_X^h}}$;
- 2) $u - v \in \overline{0_F}$ et $I^h u \geq I^h v$;
- 3) $u - v \in \overline{0_F}$ et $u \geq v$;
- 4) $u - v \in \overline{0_F}$ et dans toute composante de ω on a $u_\omega = v_\omega$ ou bien $u_\omega > v_\omega$.

En effet, les implications $4 \Rightarrow 3$, $1 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 1$ sont triviales. Le théorème 2.1 prouve que $3 \Rightarrow 2$ et le théorème 6.1 prouve que $2 \Rightarrow 4$.

8. Solution minimale, solution maximale, solution généralisée.

DÉFINITION 8.1. Soient $h \in H$ et $p \in \mathcal{D}_X^h$. Soient \underline{p} (respectivement \tilde{p}) l'enveloppe supérieure (respectivement inférieure) des fonctions de la famille \underline{p} (respectivement \tilde{p}) lorsque cette famille est non vide et $\underline{p} = -\infty$ (respectivement $\tilde{p} = +\infty$) dans le cas contraire. On appelle \underline{p} (respectivement \tilde{p}) la solution minimale (respectivement maximale) du problème p . Lorsque $\underline{p} = \tilde{p}$ et les deux ont valeurs finies, leur valeur commune est appelée solution généralisée du problème p . On désigne par $\mathcal{D}_X^h \text{SG}$ l'ensemble des h -problèmes de Dirichlet dans X qui possèdent solution généralisée et par $\text{SG}p$ la solution généralisée du problème $p \in \mathcal{D}_X^h \text{SG}$.

Une première suite de propriétés est la conséquence immédiate de la proposition 7.2.

PROPOSITION 8.1. Soient $h \in H$, $p_i = (I_i, f_i) \in \mathcal{D}_X^h$ ($i = 1, 2$) et $\lambda \in (0, +\infty)$. Alors

- 1) $\underline{p}_1 + \underline{p}_2 \leq (\underline{p}_1 + \underline{p}_2)$ et $\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 \geq (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)$,
- 2) $\lambda \underline{p}_1 = (\lambda \underline{p}_1)$ et $\lambda \tilde{p}_1 = (\lambda \tilde{p}_1)$,
- 3) $-\underline{p}_1 = (\widetilde{-p_1})$ et $-\tilde{p}_1 = (\underline{-p_1})$.

THÉORÈME 8.1. Soient $h \in H$ et $p = (I, f) \in \mathcal{D}_X^h$. Alors

- 1) $\underline{p} \leq \tilde{p}$;
- 2) $\underline{p} = -\infty$ ou dans toute composante ω de X on a $\underline{p}_\omega = +\infty$ ou bien $\underline{p}_\omega \in U_{\omega, f}$;

- 3) $\tilde{p} = +\infty$ ou dans toute composante ω de X on a $\tilde{p}_\omega = -\infty$ ou bien $\tilde{p}_\omega \in U_{\omega, f}$.

DÉMONSTRATION.

1) Lorsque $\bar{p} = \emptyset$ ou $\underline{p} = \emptyset$ l'inégalité est triviale. Soient $u \in \underline{p}$ et $v \in \bar{p}$; de $u \leq v$ (proposition 7.2) il s'ensuit $\underline{p} \leq \bar{p}$.

2) (et par analogie 3)) Lorsque $\underline{p} = \emptyset$ on a $\underline{p} = -\infty$; lorsque la famille \underline{p} est non vide, étant partie de \underline{f} , ordonnée filtrante supérieure (proposition 7.2), fermée par rapport à l'application $u \rightarrow u_{\omega, f}$ pour tout $\omega \in \mathcal{B}$ (proposition 7.2) on peut appliquer le théorème 6.2.

PROPOSITION 8.2. Soient $h \in H$ et $p_i = (I_i, f_i) \in \mathcal{D}_X^h$ ($i = 1, 2$).

1) Lorsque $\underline{p}_1 \leq' \underline{p}_2$ alors $\underline{p}_1 \leq \underline{p}_2$ et $\tilde{p}_1 \leq \tilde{p}_2$; on peut remplacer \leq par \leq' chaque fois que les deux membres de l'inégalité ont valeurs réelles.

2) Lorsque (F, \leq') est une m -lattice linéaire, \underline{p}_1 et \underline{p}_2 (ou \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2) ont valeurs réelles et admettent dans (U_X, \geq') un minorant (respectivement majorant) commun, alors $(\underline{p}_1 \wedge \underline{p}_2)_{(U_X, \geq')} = \underline{(p_1 \wedge p_2)}$ (respectivement $(\tilde{p}_1 \vee \tilde{p}_2)_{(U_X, \geq')} = \overline{(p_1 \vee p_2)}$).

DÉMONSTRATION.

1) De $\underline{p}_1 \leq' \underline{p}_2$ on déduit (proposition 7.2) que $\underline{p}_1 \subset \underline{p}_2$ et $\bar{p}_1 \supset \bar{p}_2$ donc $\underline{p}_1 \leq \underline{p}_2$ et $\tilde{p}_1 \leq \tilde{p}_2$. Lorsque \underline{p}_1 et \underline{p}_2 ont valeurs réelles, selon le théorème 8.1 on a $L_X \underline{p}_1 = f_1 \geq' f_2 = L_X \underline{p}_2$ donc $\underline{p}_1 \leq' \underline{p}_2$.

2) Lorsque $\underline{p}_i \leq' u \in U_X$ ($i = 1, 2$), alors selon le théorème 6.2 il existe $v = (\underline{p}_1 \wedge \underline{p}_2)_{(U_X, \geq')}$. On a $v \leq' \underline{p}_i$ donc $L_X v \geq' f_i$ et $v \leq \underline{p}_i$ ($i = 1, 2$) Soient $u_i \in \underline{p}_i$ ($i = 1, 2$) et $w = v + u_1 - \underline{p}_1 + u_2 - \underline{p}_2$. En utilisant plusieurs fois la proposition 6.3 on déduit successivement $\underline{p}_i \in \bar{f}_i$, $u_i - \underline{p}_i \in \underline{0}_F$, $v \in \underline{f}_i \vee \underline{f}_2$, $w \in \underline{(f_1 \vee f_2 + 0_F + 0_F)} = \underline{(f_1 \vee f_2)}$. C'est aisé de voir que $w \leq u_1$ et $w \leq u_2$; donc $I^h w \leq I_1 \wedge I_2$. Alors $w \in \underline{p}_1 \wedge \underline{p}_2$ donc $w \leq \underline{(p_1 \wedge p_2)}$. Mais $\underline{p}_i \geq' \underline{p}_1 \wedge \underline{p}_2$ et alors, selon l'assertion 1, $\underline{p}_i \geq w$ ($i = 1, 2$). Donc $\underline{(p_1 \wedge p_2)}$ est à valeurs réelles et

$$v = (\underline{p}_1 \wedge \underline{p}_2)_{(U_X, \geq')} \geq \underline{(p_1 \wedge p_2)} \geq v .$$

PROPOSITION 8.3. Soient $h \in H$ et $p = (I, f) \in \mathcal{D}_X^h$.

1) Les assertions a e b sont équivalentes et chacune d'elles implique l'assertion c

- a) $p \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}$;
- b) $p \cap \bar{p} \neq \emptyset$;
- c) $\mathcal{S}p = \underline{p} = \tilde{p}$.

2) Lorsque $\tilde{p} \in \underline{p}$ (ou $\underline{p} \in \bar{p}$) alors elle est l'élément maximal (respectivement minimal) du respectif ensemble et $\underline{p} = \tilde{p}$ (donc $p \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}\mathcal{S}$).

3) Lorsque $\underline{p} \neq \emptyset$ et $\bar{p} \neq \emptyset$ mais $p \notin \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}\mathcal{S}$ alors $I^h \tilde{p} > I^h \underline{p}$.

4) Lorsque \underline{p} et $\bar{p} \cap I$ (ou \bar{p} et $\underline{p} \cap I$) sont non vides alors $p \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}\mathcal{S}p$ est l'élément maximal dans \underline{p} (respectivement minimal dans \bar{p}).

DÉMONSTRATION.

1) Du fait que $\underline{p} \cap \bar{p} = \mathcal{S}p$ on déduit que $\bar{p} \cap \underline{p} \neq \emptyset$ implique $p \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}$ et que $p \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}$ implique $p \cap \bar{p} \neq \emptyset$. Lorsque $p \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}$ alors $\mathcal{S}p \in \bar{p}$ et $\mathcal{S}p \in \underline{p}$ donc $\mathcal{S}p \leq \underline{p} \leq \tilde{p} \leq \mathcal{S}p$ (théorème 8.1).

2) Lorsque $\tilde{p} \in \underline{p}$ on déduit $\tilde{p} \leq \underline{p} \leq \tilde{p}$ donc $\tilde{p} = \underline{p} \in \underline{p}$ ce qui prouve à la fois que $p \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}\mathcal{S}$ et que \tilde{p} est l'élément maximal de \underline{p} .

3) Lorsque $\underline{p} \neq \emptyset$ et $\bar{p} \neq \emptyset$ alors $\underline{p} \leq \tilde{p}$ et sont à valeurs réelles donc $\underline{p}, \tilde{p} \in U_{X,f}$ (théorème 8.1 et axiome 1) et $I^h \tilde{p} \geq I^h \underline{p}$.

Lorsque $I^h \tilde{p} = J = I^h \underline{p}$ alors $\tilde{p}, \underline{p} \in J \cap U_{X,f}$ donc selon le théorème 7.1 $\tilde{p} = \underline{p}$. Mais $\tilde{p} \neq \underline{p}$ donc $I^h \tilde{p} > I^h \underline{p}$.

4) Soient $u \in \underline{p}$ et $v \in \bar{p} \cap I$. Alors $u \leq \underline{p} \leq \tilde{p} \leq v$ donc \tilde{p} est à valeurs réelles et par conséquent $\tilde{p} \in U_{X,f}$; mais $I^h \tilde{p} \leq I^h v = I$ et alors $\tilde{p} \in p$. La conclusion désirée s'obtient maintenant à l'aide de l'assertion 2.

THÉORÈME 8.2. Soient $h \in H$ et $p = (I, f) \in \mathcal{D}_X^h$. La condition nécessaire et suffisante pour que

1) $p \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}$ est que $\underline{p} \cap I \neq \emptyset \neq \bar{p} \cap I$;

2) $p \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}$ est que pour tout $\varphi \in I$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $K \subset X$ compact dans toute composante de X tel que pour tout $x \in X \setminus K$ on puisse trouver $u \in \underline{p}$ et $v \in \bar{p}$ de façon que $v(x) - \varepsilon h(x) < \varphi(x) < u(x) + \varepsilon h(x)$;

3) $p \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}\mathcal{S}$ est que toute composante ω de X contienne un point x_ω de façon que pour tout $\varepsilon > 0$ il existent $u \in \underline{p}$ et $v \in \bar{p}$ telles que $v(x_\omega) - u(x_\omega) < \varepsilon$;

4) $p \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}\mathcal{G}$ est qu'il existe $p_1 \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}\mathcal{G}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ on puisse trouver $P_2 \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}\mathcal{G}$ de façon qu'on ait $P_2 - \varepsilon P_1 \leq p \leq P_2 + \varepsilon P_1$.

DÉMONSTRATION.

1) Lorsque $p \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}$ alors $\mathcal{S}p \in \underline{p} \cap \bar{p} \cap I$. Selon la proposition 8.3, de $\bar{p} \cap I \neq \emptyset = I \cap \underline{p}$ on déduit que $p \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}\mathcal{G}$, $\mathcal{S}\mathcal{G}p \in \underline{p}$, $\mathcal{S}\mathcal{G}p \in \bar{p}$ donc $\underline{p} \cap \bar{p} \neq \emptyset$ et alors $p \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}$.

2) Lorsque $p \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}$ alors $\mathcal{S}p \in \underline{p} \cap \bar{p} \cap I$. Du théorème 2.2 il suit que il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, $K \subset X$ compact dans toute composante de X , tel que pour tout $x \in X \setminus K$ on ait $\mathcal{S}p(x) - \varepsilon h(x) < \varphi(x) < \mathcal{S}p(x) + \varepsilon h(x)$. Pour $u = v = \mathcal{S}p$ on déduit le caractère de nécessité. Supposons maintenant que la condition est remplie; alors $u \leq p \leq \tilde{p} < v$ donc $\underline{p}, \tilde{p} \in U_{x,f}$; on déduit encore que $\tilde{p}(x) - \varepsilon h(x) < \varphi(x) < \underline{p}(x) + \varepsilon h(x)$, fait qui implique $\tilde{p}(x) - \underline{p}(x) < 2\varepsilon h(x)$. Mais alors $\underline{p} = \tilde{p} = \mathcal{S}\mathcal{G}p$ et $\mathcal{S}\mathcal{G}p(x) - \varepsilon h(x) < \varphi(x) < \mathcal{S}\mathcal{G}p(x) + \varepsilon h(x)$ c'est-à-dire

$$|\mathcal{S}\mathcal{G}p(x) - \varphi(x)| < \varepsilon h(x).$$

Le théorème 2.2 prouve que $\mathcal{S}\mathcal{G}p \in I$ et par conséquent $p \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}$.

3) Lorsque $p \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}\mathcal{G}$ alors dans tout $x_0 \in X$ on a $\tilde{p}(x_0) = \underline{p}(x_0)$; pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $u \in \underline{p}$ et $v \in \bar{p}$ telles qu'on ait $u(x_0) > \underline{p}(x_0) - \varepsilon/2$ et $v(x_0) < \tilde{p}(x_0) - \varepsilon/2$; donc $v(x_0) - u(x_0) < \tilde{p}(x_0) - \underline{p}(x_0) + \varepsilon = \varepsilon$. Lorsque la condition est remplie, pour tout x_ω on a $\tilde{p}(x_\omega) - \underline{p}(x_\omega) < \varepsilon$ donc $\tilde{p}(x_\omega) = \underline{p}(x_\omega)$; le théorème 8.1 et la proposition 5.1 prouvent alors que $\underline{p}_\omega = \tilde{p}_\omega$ et alors il s'ensuit que $\tilde{p} = \underline{p}$ donc que $p \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}\mathcal{G}$.

4) Lorsque $p \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}\mathcal{G}$ alors $P_1 = (I^h 0, O_f)$ et $P_2 = p$ vérifient la condition. Supposons la condition vérifiée; de $(P_2 - \varepsilon P_1) \geq \underline{P}_2 + (-\varepsilon P_1) = \underline{P}_2 - \widetilde{(\varepsilon P_1)} = \underline{P}_2 - \varepsilon \tilde{P}_1 = \mathcal{S}\mathcal{G} P_2 - \varepsilon \mathcal{S}\mathcal{G} P_1$ et de $(\tilde{P}_2 + \varepsilon P_1) \leq \mathcal{S}\mathcal{G} P_2 + \varepsilon \mathcal{S}\mathcal{G} P_1$ (inégalités impliquées par la proposition 8.1), ainsi que de $(P_2 - \varepsilon P_1) \leq \underline{p}$ et de $\tilde{p} \leq \widetilde{(P_2 + \varepsilon P_1)}$ (proposition 8.2) on déduit que $\mathcal{S}\mathcal{G} P_2 - \varepsilon \mathcal{S}\mathcal{G} P_1 \leq \underline{p} \leq \tilde{p} \leq \mathcal{S}\mathcal{G} P_2 + \varepsilon \mathcal{S}\mathcal{G} P_1$ et alors $\tilde{p} - \underline{p} \leq 2\varepsilon \mathcal{S}\mathcal{G} P_1$; mais P_1 est fixe et $\varepsilon > 0$ est arbitraire donc $\tilde{p} = \underline{p}$.

PROPOSITION 8.4. Soient $h \in H, f \in F, u \in \underline{f}, v \in \tilde{f}, I^h u \leq I^h v, p = (I^h u, f), q = (I^h v, f)$. Alors

- 1) $p, q \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}\mathcal{G}$;
- 2) $u \leq \mathcal{S}\mathcal{G}p \leq \mathcal{S}\mathcal{G}q \leq v$;

3) $\mathbb{S}\mathbb{G}p$ (respectivement $\mathbb{S}\mathbb{G}q$) est le plus petit majorant de u dans \underline{f} (respectivement le plus grand minorant de v dans \underline{f}) est par conséquent, aussi dans $U_{x,f}$.

En effet, $u \in \underline{p} \cap I^h u$, $v \in \bar{p}$, $v \in \bar{q} \cap I^h v$, $u \in \underline{q}$ et alors de la proposition 8.3 on déduit $p, q \in \mathcal{D}_X^h \mathbb{S}\mathbb{G}$ et $\mathbb{S}\mathbb{G}p \in \bar{p}$, $\mathbb{S}\mathbb{G}q \in \underline{q}$ donc la maximalité et la minimalité de l'énoncé. De plus $p \leq q$ implique $\underline{p} \leq \underline{q}$ (proposition 8.2) donc $\mathbb{S}\mathbb{G}p \leq \mathbb{S}\mathbb{G}q$; les inégalités $u \leq \mathbb{S}\mathbb{G}p$ et $\mathbb{S}\mathbb{G}p \leq v$ sont triviales.

THÉORÈME 8.3. Soient $h \in H$. Alors

- 1) $\mathcal{D}_X^h \mathbb{S}\mathbb{G}$ est un sous-espace de $\mathcal{D}_X^h \mathcal{S}$;
- 2) $p \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{G}p$ est une application linéaire et isotone de $(\mathcal{D}_X^h \mathbb{S}\mathbb{G}, \geq')$ sur (U_X, \geq') prolongeant \mathbb{S} ;
- 3) $p \rightarrow Pp = IL_X^h(\mathbb{S}\mathbb{G}p)$ est un projecteur isotone $(\mathcal{D}_X^h \mathbb{S}\mathbb{G}, \geq')$ sur $(\mathcal{D}_X^h \mathcal{S}, \geq')$ et $SP = \mathbb{S}\mathbb{G}$, $\mathbb{S}\mathbb{G}P = \mathbb{S}\mathbb{G}$.

DÉMONSTRATION.

1) Soient $p_1, p_2 \in \mathcal{D}_X^h \mathbb{S}\mathbb{G}$ et $p = p_1 + p_2$. De la proposition 8.1 et du théorème 8.1. on déduit

$$\mathbb{S}\mathbb{G}p_1 + \mathbb{S}\mathbb{G}p_2 = \underline{p}_1 + \underline{p}_2 \leq \underline{p} \leq \tilde{p} \leq \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = \mathbb{S}\mathbb{G}p_1 + \mathbb{S}\mathbb{G}p_2$$

donc que $p \in \mathcal{D}_X^h \mathbb{S}\mathbb{G}$ et que $\mathbb{S}\mathbb{G}p = \mathbb{S}\mathbb{G}p_1 + \mathbb{S}\mathbb{G}p_2$. Soient $\lambda \in (0, +\infty)$ $p \in \mathcal{D}_X^h \mathbb{S}\mathbb{G}$; de même façon on déduit que $\lambda \cdot \mathbb{S}\mathbb{G}p = \lambda \underline{p} = (\lambda \underline{p}) \leq (\lambda \tilde{p}) = \lambda \tilde{p} = \lambda \mathbb{S}\mathbb{G}p$ donc que $\lambda p \in \mathcal{D}_X^h \mathbb{S}\mathbb{G}$ et que $\mathbb{S}\mathbb{G}(\lambda p) = \lambda \mathbb{S}\mathbb{G}\tilde{p}$. Lorsque $\lambda \in (-\infty, 0)$ et $p \in \mathcal{D}_X^h \mathbb{S}\mathbb{G}$ on a $\lambda \mathbb{S}\mathbb{G}p = \lambda \tilde{p} = -\lambda(-\underline{p}) = (\lambda \underline{p}) \leq (\lambda \tilde{p}) = -\lambda(-\tilde{p}) = \lambda \underline{p} = \lambda \mathbb{S}\mathbb{G}p$.

2) la linéarité a été prouvée ci-dessus. Lorsque $p \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}$ alors (proposition 8.3) $\mathbb{S}p = \underline{p} = \tilde{p} = \mathbb{S}\mathbb{G}p$; donc $\mathbb{S}\mathbb{G}$ prolonge \mathbb{S} . Lorsque $p_1, p_2 \in \mathcal{D}_X^h \mathbb{S}\mathbb{G}$ et $p_1 \geq' p_2$ alors (proposition 8.2) $\underline{p}_1 \geq' \underline{p}_2$ donc $\mathbb{S}\mathbb{G}p_1 \geq' \mathbb{S}\mathbb{G}p_2$.

3) Tenant compte du fait que $IL_X^h: U_X \rightarrow \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}$ et encore du fait que $\mathbb{S}\mathbb{G}: \mathcal{D}_X^h \mathbb{S}\mathbb{G} \rightarrow U_X$, les deux applications étant linéaires, surjectives, et isotones, on déduit que $P = IL_X^h \cdot \mathbb{S}\mathbb{G}$ est une application linéaire, surjective et isotone de $\mathcal{D}_X^h \mathbb{S}\mathbb{G}$ dans $\mathcal{D}_X^h \mathcal{S}$. Pour $p \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}$ on a $IL_X^h \mathbb{S}\mathbb{G}p = IL_X^h \mathbb{S}p = p$ (théorème 7.2) donc $Pp = p$; c'est-à-dire P est un projecteur. Finalement $\mathbb{S} \cdot p = \mathbb{S} \cdot IL_X^h \cdot \mathbb{S}\mathbb{G} = \mathbb{S} \cdot \mathbb{S}^{-1} \cdot \mathbb{S}\mathbb{G} = \mathbb{S}\mathbb{G}$ et $\mathbb{S}\mathbb{G} \cdot P = \mathbb{S} \cdot P \cdot P = \mathbb{S} \cdot P = \mathbb{S}\mathbb{G}$.

THÉORÈME 8.4. Soit $h \in H$.

1) $(\mathcal{D}_X^h \mathcal{S}\mathcal{G}, \geq)$ est une m -lattice linéaire.

2) Lorsque $(F, <)$ est une m -lattice linéaire, alors $(\mathcal{D}_X^h \mathcal{S}\mathcal{G}, \geq)$ est une m -lattice linéaire.

3) Dans chacune des deux situations présentées ci-dessus, pour $p_1, p_2 \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}\mathcal{G}$ on a :

a) lorsque $\{p_1, p_2\}$ possède une borne supérieure dans $\mathcal{D}_X^h \mathcal{S}\mathcal{G}$ par rapport à l'ordre respectif, alors cette borne coïncide avec la borne correspondante dans \mathcal{D}_X^h .

b) lorsque $\{p_1, p_2\}$ est, dans \mathcal{D}_X^h , majorée (ou minorée) par p et $\bar{p} \neq \emptyset$ (respectivement $\underline{p} \neq \emptyset$), alors $\{p_1, p_2\}$ est majorée et minorée aussi dans $\mathcal{D}_X^h \mathcal{S}\mathcal{G}$, bien entendu par rapport à l'ordre correspondant.

DÉMONSTRATION. Supposons que (F, \leq') est une m -lattice linéaire et que $p_1, p_2 \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}\mathcal{G}$, $p \in \mathcal{D}_X^h$, $\bar{p} \neq \emptyset$, $p_1 <' p$, $p_2 <' p$, $q = p_1 \vee p_2$. Alors $p_i < q < p$ et à l'aide de la proposition 8.2 on déduit que $\underline{p}_i < \underline{q} < \underline{\tilde{p}}$. Mais $\underline{p}_i = \mathcal{S}\mathcal{G}p_i$ et $\bar{p} \neq \emptyset$ implique $\tilde{p} < +\infty$ donc les fonctions de l'inégalité précédente sont réelles; la proposition 8.2 implique alors que $\mathcal{S}\mathcal{G}p_i <' \underline{q}$ donc il existe $u = (\mathcal{S}\mathcal{G}p_1 \vee \mathcal{S}\mathcal{G}p_2)_{(\sigma_x, \geq)}$ (théorème 6.2); en utilisant de nouveau la proposition 8.2 on déduit $\mathcal{S}\mathcal{G}p_i < \underline{q} < \underline{\tilde{q}} = (\tilde{p}_1 \vee \tilde{p}_2)_{(\sigma_x, \geq)} = u$ ($i = 1, 2$) et alors $u < \underline{q} < \underline{\tilde{q}} < u$ donc $q \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}\mathcal{G}$ et $\gamma \mathcal{S}q = u$.

PROPOSITION 8.5. Soit $h \in H$. Lorsque (F, \leq') est une m -lattice linéaire et $p_1, p_2 \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}$ constituent une paire majorée (minorée) par $p \in \mathcal{D}_X^h$ et $\bar{p} \neq \emptyset$ (respectivement $\underline{p} \neq \emptyset$) alors $p_1 \vee p_2 <' P(p_1 \vee p_2)$ et de même $p_1 \wedge p_2 \geq' P(p_1 \wedge p_2)$.

DÉMONSTRATION. Soient $p_i = (I_i, f_i)$ $i = 1, 2$. Du théorème 8.4 il s'ensuit que $p_1 \wedge p_2 \in \mathcal{D}_X^h \mathcal{S}\mathcal{G}$. Mais $I^h \mathcal{S}p_i = I_i \leq I_1 \vee I_2$ et $L_X \mathcal{S}p_i = f_i \geq f_1 \wedge f_2$ prouvent que $\mathcal{S}p_i \in \underline{(p_1 \vee p_2)}$ et à l'aide de la proposition 7.2 on déduit $\sup\{\mathcal{S}p_1, \mathcal{S}p_2\} \in \underline{(p_1 \vee p_2)}$. De $I^h \mathcal{S}p_i = I_i$, on peut conclure à l'aide du théorème 2.1 que $I^h \sup\{\mathcal{S}p_1, \mathcal{S}p_2\} = I_1 \vee I_2$; par conséquent $\sup\{\mathcal{S}p_1, \mathcal{S}p_2\} \in (I_1 \vee I_2) \cap \underline{(p_1 \vee p_2)}$ ce qui implique (proposition 8.3) $\mathcal{S}\mathcal{G}(p_1 \vee p_2) \in \underline{(p_1 \vee p_2)}$ donc $I^h \mathcal{S}\mathcal{G}(p_1 \vee p_2) \geq I_1 \vee I_2$: Mais

$$P(p_1 \vee p_2) = IL_X^h(\mathcal{S}\mathcal{G}(p_1 \vee p_2)) = (I^h \mathcal{S}\mathcal{G}(p_1 \vee p_2), L_X \mathcal{S}\mathcal{G}(p_1 \vee p_2)) \geq' \\ \geq' (I_1 \vee I_2, f_1 \wedge f_2) = p_1 \vee p_2 .$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. AMERIO, *Teoremi di esistenza per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico nei domeni illimitati*, Rend. della reale Acc. d'Italia, serie VII, **4** (1943), 287-298.
- [2] N. BOBOC - C. CONSTANTINESCU - A. CORNEA, *On the Dirichlet problem in the axiomatic theory of harmonic functions*, Nagoya Math. J., **23** (1963), 73-79.
- [3] N. BOBOC - P. MUSTATA, *Espace harmonique associés aux opérateurs différentiels linéaires du second ordre du type elliptique*, (Lecture Notes in Math., **68**), Berlin, Heidelberg, New York, 1968.
- [4] M. BRELOT, *Lectures on potential theory*, Tata Institute, Bombay, 1960 (reissued 1967).
- [5] M. BRELOT, *Axiomatique des fonctions harmoniques*, Le presses de l'Université de Montréal, 1967.
- [6] C. CONSTANTINESCU - A. CORNEA, *Ideale Ränder riemannscher Flächen*, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1963.
- [7] C. CONSTANTINESCU - A. CORNEA, *Compactification of harmonic spaces*, Nagoya Math. J., **25** (1965), 1-57.
- [8] C. CONSTANTINESCU - A. CORNEA, *Potential theory on harmonic spaces*, New York, Heidelberg, Berlin, 1972.
- [9] M. KRZYZANSKI, *Sur le problème de Dirichlet pour l'équation linéaire du type elliptique dans un domaine non borné*, Rend. Acc. Lincei, **4**, 4 (1948), 408-416.
- [10] TAKASI KUSANO, *On bounded solution of exterior boundary value problems for linear and quasilinear elliptic differential equations*, Japanese J. of Math., **35**, 1 (1965), 31-59.
- [11] C. MEGHEA, *Compactification des espaces harmoniques* (Lecture Notes in Math., **222**), Berlin, Heidelberg, New York, 1971.
- [12] S. SIMODA - M. NAGUMO, *Sur la solution bornée de l'équation aux dérivées partielles du type elliptique*, Proc. of the Japan Acad., **27** (1951), 334-339.
- [13] B. Z. VULIKH, *Introduction to the theory of partially ordered spaces*, Gröningen, 1967.
- [14] N. WIENER, *Certain notions in potential theory*, Journ. of Math. and Phys. M.I.T., **3** (1924), 24-51.
- [15] N. WIENER, *The Dirichlet problem* Journ. of Math. and Phys. M.I.T., **3** (1924), 127-146.
- [16] N. WIENER, *Note on a paper of O. Perron*, Journ. of Math. and Phys. M.I.T., **4** (1925), 21-32.

Manoscritto pervenuto in redazione il 19 settembre 1973.