Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

GIULIANO BRATTI

Caratterizzazione dei sistemi ipoellittici a coefficienti costanti, sovradeterminati, con il metodo della paramatrice

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 52 (1974), p. 265-273

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__52__265_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 52 (1974)

Caratterizzazione dei sistemi ipoellittici a coefficienti costanti, sovradeterminati, con il metodo della paramatrice.

GIULIANO BRATTI (*)

Introduzione.

1. Si useranno i simboli della Teoria delle Distribuzioni di [2]; in R^{m+n} la variabile sia (x, y): $x = (x_1, \dots, x_m)$ $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Si consideri il sistema di equazioni alle derivate parziali, a coefficienti costanti:

$$\sum_{i,j} P_{i,j}(D_x, D_y)\, u_j = f_j \tag{1}$$

dove: $u = (u_1, u_2, \dots, u_h)$ e $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ sono vettori le componenti dei quali sono distribuzioni in un aperto A di R^{m+n};

$$P_{i,j}(D_x, D_y) = \sum_{(\alpha,\beta)} a^{\alpha,\beta} D_x^\alpha D_y^\beta$$

con: $|\alpha| + |\beta| \leqslant M_{i,j}$, $a_{\alpha,\beta} \in C$, $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \dots D_{x_m}^{\alpha_m}$, $D_{x_p} = (1/i)(\partial/\partial x_p)$; analogamente per D_y^β.

DEFINIZIONE 1. *Il sistema* (1) *si dice ipoellittico se la distribuzione vettore u è in $C^\infty(A)$ in ogni aperto A di R^{m+n} in cui è in $C^\infty(A)$ la distribuzione vettore f,* [3].

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico - Via Belzoni, 3 - 35100 Padova.

DEFINIZIONE 2. *Il sistema* (1) *si dice parzialmente ipoellittico nella variabile x se la distribuzione vettore u è regolare* (*) *in x in ogni aperto A di R^{m+n} in cui è regolare in x la distribuzione vettore f,* [6].

Nel caso che $h \leqslant k$, (che il sistema (1) cioè sia sovradeterminato), in [3] ed in [6], si dà una caratterizzazione (algebrica) del sistema (1) affinchè soddisfi, rispettivamente la definizione 1) e la 2) (**).

Lo scopo di questo articolo è quello di dare un'altra caratterizzazione dei sistemi, a coefficienti costanti, che sono ipoellittici, mediante il metodo della paramatrice; una lieve modifica del metodo usato per i sistemi ipoellittici darà, immediatamente, una caratterizzazione anche dei sistemi parzialmente ipoellittici. Si otterrà il seguente:

TEOREMA. *Sia $\mathcal{T}(D) = \|P_{i,j}(D)\|$ la matrice differenziale del sistema* (1) *e $\mathcal{T}'(D)$ la sua trasposta.*

Il sistema (1) *è ipoellittico se e solo se esiste una matrice $\mathcal{F} = \|F_{i,j}\|$ di distribuzioni in R^{m+n} dello stesso tipo della $\mathcal{T}'(D)$, (h righe e k colonne), tale che:*

i) $F_{i,j} \in C^{\infty}(R^{m+n} \setminus \{0\})$;

ii) $\mathcal{T}'(D) \times \mathcal{F}$, *prodotto righe per righe, è la matrice quadrata di ordine h $\delta I + R$ dove: δ è la misura di Dirac concentrata nell'origine*

(*) Sia A un aperto di R^{m+n} e $f(x, y) \in \mathfrak{D}'(A)$. f si dice regolare in x se per ogni aperto A_1 di R^m ed ogni aperto A_2 di R^n tali che $A_1 \times A_2 \subset A$ e per ogni $g(y) \in \mathfrak{D}(A_2)$ la distribuzione $\langle f(x, y) \cdot g(y) \rangle$ è in $C^{\infty}(A_x)$, $A_x = \pi_{R^m}(A)$, dove π è la prima proiezione di R^{m+n} su R^m.

(**) Ecco le caratterizzazioni di cui si parla:

sia $\mathcal{T}(\theta, \zeta) = \|P_{i,j}(\theta, \zeta)\|$, $(\theta, \zeta) \in C^{m+n}$, la matrice di polinomi associata al sistema (1) nel seguente modo: $D_x^{\alpha} D_y^{\beta} \to \theta^{\alpha} \zeta^{\beta}$; sia I l'ideale generato nell'anello dei polinomi $C[\theta, \zeta]$, dai determinati di tutti i minori di ordine h estratti dalla matrice $\mathcal{T}(\theta, \zeta)$, e V_I la varietà definita da I in C^{m+n}, $\left(V_I = \bigcap_{P \in I} Z(P)\right)$, dove $Z(P)$ è l'insieme degli zeri in C^{m+n} di P. Sia (ξ, η) la variabile di R_{m+n} e d la metrica in C^{m+n}. Il sistema (1) è ipoellittico se e solo se $d\left((\xi, \eta), V_I\right) \to +\infty$ quando $|(\xi, \eta)| \to +\infty$ [3].

Il sistema (1) è parzialmente ipoellittico nella variabile x se e solo se la varietà V_I soddisfa la seguente proprietà: se $(\theta, \zeta) \in V_I$ e $|\mathrm{Im}\,\theta| \leqslant M_1 < +\infty$ e $|\zeta| \leqslant M_2 < +\infty$ allora $|\mathrm{Re}\,\theta| \leqslant M_3 < +\infty$, sove Im sta per parte immaginaria e Re per parte reale [6]. (Per il caso $V_I = \Phi$ si veda [5] o [3], pag. 530).

di R^{m+n}, *I è la matrice identità di ordine* h, $R = \|R_{i,j}\|$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant h$ *con* $R_{i,j} \in C^{\infty}(R^{m+n})$.

Nel § 2 si dimostrerà il teorema citato di sopra attraverso la dimostrazione di un lemma, tuttaffatto generale, sugli ideali generati dai determinati di tutti i minori di ordine h di una matrice rettangolare, di tipo (h, k), $h \leqslant k$, con elementi in un anello commutativo con unità; per la dimostrazione di questo lemma l'Autore si è servito della dimostrazione del teorema di Binet, circa il prodotto righe per righe di due matrici rettangolari simili, di G. Scorza-Dragoni in *Elementi di Analisi Matematica*, Vol. 1°, n. 152, pag. 184. Nel § 3 si estenderà il teorema enunciato al caso dei sistemi, a coefficienti costanti, parzialmente ipoellittici.

2. Per la dimostrazione della condizione necessaria del teorema enunciato in § 1 è utile il seguente lemma:

Sia A un anello commutativo con unità e sia $M = \|a_{i,j}\|$ una matrice con elementi in A di tipo (h, k), $1 \leqslant i \leqslant h$, $1 \leqslant j \leqslant k$, e $h \leqslant k$.

Sia I l'ideale generato in A dai determinati di tutti i minori di ordine h estratti da M. Per ogni $a \in I$ esiste una matrice quadrata, $M' = \|b_{i,j}\|$ con elementi in A, di ordine $k + h$, tale che:

i) $b_{i,j} = a_{i,j}$ *se* $1 \leqslant i \leqslant h$ *e* $1 \leqslant j \leqslant k$; $b_{i,j} = 0$ *se* $1 \leqslant i \leqslant h$ *e* $j \geqslant k_k + 1$;

ii) $\det\{M'\} = a^h$.

Dimostrazione. La dimostrazione è condotta nel modo seguente:

nel caso che sia $h = 1$ e $k \geqslant 1$, o nel caso che sia $h = 2$ e $k \geqslant 2$ si dimostra il lemma direttamente; nel caso che sia $h > 2$ e $k \geqslant 3$ la dimostrazione è ricondotta al caso $h = 2$ e $k \geqslant 2$.

a) sia $M = \|a_{1,i}\|$ e sia $a = \sum_{1=i}^{k} h_{1,i}\, a_{1,i}$ un elemento di I. Si consideri la matrice quadrata di ordine $k + 1$ così fatta: $b_{1,i} = a_{1,i}$ se $1 \leqslant i \leqslant k$; $b_{1,k+1} = 0$; $b_{i,k+1} = h_{1,(i-1)}$ se $2 \leqslant i \leqslant k + 1$; la rimanente parte della matrice coincida con la matrice diagonale di ordine k con tutti gli elementi della sua diagonale principale eguali a -1. Risulta facile la verifica: il determinante della matrice costruita è a.

b) sia $M = \|a_{i,j}\|$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, $1 \leqslant j \leqslant k$, $2 \leqslant k$ e sia:

$$a = \sum_{1=i}^{\binom{k}{2}} l_i d_i$$

con: $l_k \in A$, e d_k il valore del determinante della k-esima matrice di ordine 2 estratta da M, un elemento dell'ideale I generato in A dai d_k. Se si sviluppa la k-esima matrice rispetto: primo agli elementi della prima riga di M e poi rispetto agli elementi della seconda riga di M si otterrà:

$$a = \sum_{i=1}^{k} h_{1,i} a_{1,i} = \sum_{i=1}^{k} h_{2,i} a_{2,i} .$$

Si consideri la matrice $M'' = \|l_{i,j}\|$, $1 \leqslant i \leqslant 2$ e $1 \leqslant j \leqslant k$ con $l_{i,j} = h_{i,j}$; dimostriamo che: il prodotto, righe per righe, di M per M'' è la matrice quadrata di ordine 2 diagonale tale che gli elementi della diagonale coincidono con a. Infatti:

$$a = \sum_{2=J}^{k} l'_{1,j} \det \left\{ \begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,j} \\ a_{2,1} & a_{2,j} \end{Vmatrix} \right\} + \sum_{3=J}^{k} l'_{2,j} \det \left\{ \begin{Vmatrix} a_{1,2} & a_{1,j} \\ a_{2,2} & a_{2,j} \end{Vmatrix} \right\} + \ldots +$$
$$+ l'_{k-1,k} \det \left\{ \begin{Vmatrix} a_{1,k-1} & a_{1,k} \\ a_{2,k-1} & a_{2,k} \end{Vmatrix} \right\}$$

così che:

$$h_{1,1} = \sum_{2=j}^{k} l'_{1,j} a_{2,j} ; \qquad h_{1,2} = \sum_{3=j}^{k} l'_{2,j} a_{2,j} - l'_{1,2} a_{1,2} ;$$

$$h_{1,3} = \sum_{4=j}^{k} l'_{3,j} a_{2,j} - l'_{1,3} a_{2,1} - l'_{2,3} a_{2,2} ;$$

$$h_{1,k} = l'_{k-1,1} a_{2,k-1} - l'_{1,k} a_{2,1} - \ldots - l'_{k-2,k} a_{2,k-2} .$$

Semplici verifiche danno: $\sum_{1}^{k} h_{1,i} a_{2,i} = 0$. Ragionando in modo analogo a sopra, si ottiene pure: $\sum_{1=i}^{k} h_{2,i} a_{1,i} = 0$. La matrice cercata, $M' = \|b_{i,j}\|$, è allora la seguente: $b_{i,j} = a_{i,j}$ se $1 \leqslant i \leqslant 2$ e $1 \leqslant j \leqslant k$; $b_{i,k+1} = b_{i,k+2} = 0$ se $1 \leqslant i \leqslant 2$; $b_{i,k+1} = h_{1,(i-2)}$ e $b_{i,k+2} = h_{2,(i-2)}$ se $3 \leqslant i \leqslant k+2$; la rimanente parte di M' sia la matrice diagonale di ordine k con tutti gli elementi della diagonale eguali a -1.

c) Sia $M = \|a_{i,j}\|$, $1 \leqslant i \leqslant h$, $1 \leqslant j \leqslant k$, $2 < h \leqslant k$ e sia, come sopra,

$$a = \sum_{1}^{\binom{k}{h}} l_i d_i \in I \,.$$

Sviluppando la i-esima matrice rispetto: agli elementi della prima riga di M, agli elementi della seconda riga di $M, \ldots,$ agli elementi dell'ultima riga di M, si ottiene:

$$a = \sum_{1=i}^{k} h_{1.i} a_{1.i} = \sum_{1=i}^{k} h_{2.i} a_{2.i} = \ldots = \sum_{1=i}^{k} h_{h.i} a_{h.i}$$

Si consideri la matrice $M'' = \|1_{i,j}\|$ con $1_{i,j} = h_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant h$, $1 \leqslant j \leqslant k$, e dimostriamo che il prodotto righe per righe di M per M'' è la matrice quadrata di ordine h, diagonale, con tutti gli elementi della sua diagonale eguali ad a. Infatti: supponiamo che un elemento, $c_{i,j}$, $i \neq j$ della matrice prodotto $M \times M''$ sia diverso da 0. Allora la matrice di tipo $(2, k)$ formata con le sole i e j-esima righe di M sarebbe tale che: nell'ideale I generato in A dai determinanti di tutti i suoi minori di ordine 2 c'è l'elemento a.

Posto che:

$$a = \sum_{(s.t)} l_{s.t} \det \left\{ \begin{Vmatrix} a_{i.s} & a_{i.t} \\ a_{j.s} & a_{j.t} \end{Vmatrix} \right\},$$

sviluppando quest'ultima scrittura rispetto alla i-esima riga e poi rispetto alla j-esima riga, si ha, ancora:

$$a = \sum_{1=n}^{k} h_{i.n} a_{i.n} = \sum_{1=n}^{k} h_{j.n} a_{j.n} \,.$$

Ci si è così ricondotti al caso $h = 2$ così che: $c_{i,j}$ deve essere 0. La dimostrazione del lemma è conclusa.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA ENUNCIATO IN § 1.

Condizione sufficiente: si supponga che esista una paramatrice $\mathcal{F} = \|F_{j,i}\|$ per il sistema (1) e che u sia una soluzione di (1) con

$f \in C^\infty(A)$, A aperto di R^{m+n}. Sia z_0 un punto di A e $\alpha(x) \in \mathfrak{D}(A)$ con $\alpha(x) = 1$ in un intorno conveniente di z_0; dimostriamo che u è in C^∞ in un intorno di z_0. Infatti:

$$(2) \qquad \sum_{1=j}^{k} P_{j,1}(D_x, D_y) F_{j,1}(x, y) = \delta + R_{1,1} \text{ e } \sum_{1=j}^{k} P_{j,i}(D_x, D_y) F_{j,1}(x, y) = R$$

se $2 \leqslant i \leqslant h$. Si considerino le distribuzioni a supporto compatto αu_i, $1 \leqslant i \leqslant h$, e si faccia il prodotto di convoluzione di αu_i per la i-esima identità delle (2); sommando i risultati così ottenuti per colonne:

$$\sum_{1=j}^{k} F_{j,1} * \left(\sum_{1=i}^{h} P_{j,i}(D_x, D_y) \alpha u_i \right) = \alpha u_1 + \sum_{2=i}^{h} R_{i,1} * \alpha u_i$$

poichè $\sum_{1\,i}^{h} P_{j,i}(D_x, D_y) \alpha u_i = g_i$ è in C^∞ in un intorno conveniente di z_0, così come è in C^∞ la funzione $\sum_{2\,i}^{h} R_{i,1} * \alpha u_i$, la dimostrazione che u_1 in un intorno di z_0 è in C^∞ è rincondotta alla dimostrazione della proposizione 7.1 di [7], pag. 401.

Condizione necessaria: applicando la tesi del lemma precedente si ha: se il sistema (1) è ipoellittico esiste una matrice quadrata di ordine $k + h$, $\|Q_{j,i}(\xi, \eta)\|$ tale che: $Q_{j,i}(\xi, \eta) = P_{j,i}(\xi, \eta)$, se $1 \leqslant i \leqslant h$ e $1 \leqslant j \leqslant k$; $Q_{j,i}(\xi, \eta) = 0$ se $1 \leqslant i \leqslant h$ e $k + 1 \leqslant j \leqslant k + h$ ed inoltre:

$$\det \{ \|Q_{j,i}(\xi, \eta)\| \} = Q(\xi, \eta) , \qquad \text{polinomio ipoellittico (*)} .$$

Sia $\mathcal{F}' = \|F_{i,j}\|$ la paramatrice del sistema quadrato ipoellittico:

$$\sum_{1=i}^{h+k} Q_{j,i}(D_x, D_y) u_i = f_j , \qquad 1 \leqslant i \leqslant h + k,\ 1 \leqslant j \leqslant h + k \text{ (**)} ;$$

(*) Nell'ideale I generato da tutti i minori di ordine h estratti dalla matrice $\|P_{j,i}(\xi, \eta)\|$ vi è un polinomio ipoellittico [4]. Si fissi quello come elemento $a \in I$ e si completi la matrice, secondo la dimostrazione del lemma; con le notazioni di sopra sarà: $Q(\xi, \eta) = P(\xi, \eta)^h$, se $P(\xi, \eta) = a$.

(**) Se con $q^{i,j}(D)$ si indica il polinomio differenziale che ha come simbolo il completamento algebrico di $Q_{j,i}(\xi, \eta)$ nella matrice $\|Q_{j,i}(\xi, \eta)\|$,

$$F_{j,i}(x, y) = (2\pi)^{-(m+n)} q^{i,j}(D) \int \exp\left[i \langle x\xi + y\eta \rangle \right] g(\xi, \eta) / Q(\xi, \eta)\, d(\xi, \eta)$$

se si considera la matrice $\mathcal{F} = \|F_{j,i}\|$, di tipo (h, k), ottenuta trasponendo le prime h colonne della ed eliminando, prima della trasposizione, la k-esima riga, ..., la $k+h$-esima riga, si ha:

$$\mathcal{T}'(D) \times \mathcal{F} = \delta I + R$$

con il medesimo significato dei simboli che nell'enunciato del teorema. La dimostrazione di quest'ultimo, allora, è completamente terminata.

3) Sia $P(D_x, D_y)$ un operatore differenziale, a coefficienti costanti, parzialmente ipoellittico nella variabile x e sia $P(\xi, \eta)$ il polinomio ad esso associato $(D_x^\alpha D_y^\beta \to \xi^\alpha \eta^\beta)$. Dalla caratterizzazione (algebrica), [5], [2], [7], dei polinomi differenziali parzialmente ipoellittici risulta: se $|\eta|a$, $a \in R_+$, e $|\xi| \to +\infty$, esiste $c \in R_+$ con $|P(\xi, \eta)| \geqslant c$.

Ne segue che gli zeri reali di $P(\xi, \eta)$ sono localizzati nell'insieme $\{(\xi, \eta): |\xi| < b, |\eta| \geqslant a\}$, per qualche $b \in R_+$. Si scelgano le funzioni $g(\xi)$ e $h(\eta)$ rispettivamente nel modo seguente: $g(\xi) \in C^\infty(R^m)$, $g(\xi) = 0$ se $|\xi| \leqslant b$ e $g(\xi) = 1$ se $|\xi| \geqslant b + 1$; $h(\eta) \in C^\infty(R^n)$ con

$$\operatorname{supp} h(\eta) = \{\eta \in R^n: |\eta| \leqslant a\}.$$

Si consideri la distribuzione:

$$F = F(x, y) = (2\pi)^{-(m+n)} \int \exp[i\langle x\xi + y\eta\rangle](g(\xi) h(\eta))/P(\xi, \eta)\, d(\xi, \eta);$$

F soddisfa le seguenti proprietà:

i) $P(D_x, D_y) F(x, y) = \delta(x) \otimes G(y) + H(x, y)$ con $G(y) \in C^\infty(R^n)$ e $H(x, y) \in C^\infty(R^{m+n})$;

ii) $F(x, y) \in C^\infty(R^{m+n} \setminus \{0\} \times R^n)$, dove con $\{0\}$ si è indicata l'origine di R^m. Infatti:

$$P(D_x, D_y) F(x, y) = (2\pi)^{-(m+n)} \int \exp[i\langle x\xi + y\eta\rangle] g(\xi) h(\eta)\, d(\xi, \eta),$$

---

dove: $g(\xi, \eta)$ è in $C^\infty(R_{m+n})$ con la proprietà: se gli zeri di $Q(\xi, \eta)$ sono nell'insieme: $\{(\xi, \eta) \in R_{m+n}: |(\xi, \eta)| < M g(\xi, \eta) = 0$ in quell'insieme e $g(\xi, \eta) = 1$ se $|(\xi, \eta)| > M + 1$. Si veda: [7] e anche [1].

sicchè, posto $g(\xi) = 1 + g_1(\xi)$, $(\operatorname{supp} g_1(\xi) = \{\xi \in R^m\colon |\xi| < b + 1)$ risulta:

$$P(D_x, D_y)F(x, y) = (2\pi)^{(m+n)}\Big(\int \exp[i\langle x\xi + y\eta\rangle]1(\xi)h(\eta)\,d(\xi, \eta) + \\ + \int \exp[i\langle x\xi + y\eta\rangle],\ g_1(\xi)h(\eta)\,d(\xi, \eta)\Big), \qquad \text{da cui i)}.$$

Per ii) si osservi che: $x_k P(D_x, D_y)F(x, y) \in C^\infty(R^{m+n})$ se $1 \leqslant k \leqslant m$.

D'altra parte l'esistenza di una distribuzione $F(x, y) \in \mathcal{D}'(R^{m+n})$ con le proprietà i) e ii) rispetto all'operatore $P(D_x, D_y)$ garantisce la sua parziale ipoellitticità, rispetto alla variabile x, come si può dedurre facilmente tenendo presente il lemma 8.1 di [7] pag. 451 (*). L'estensione del teorema enunciato in § 1, e dimostrato in § 2, al caso di sistemi parzialmente ipoellittici del tipo (1), $(h \leqslant k)$, è allora la seguente:

TEOREMA. *Il sistema* (1) *è parzialmente ipoellittico nella variabile* x *se e solo se esiste una matrice di distribuzioni,* $\mathcal{F} = \|F_{j,i}\|$, *dello stesso tipo della* $\mathcal{T}'(D)$, (h *righe e* k *colonne*), *tale che*:

i) $F_{j,i}(x, y) \in C^\infty(R^{m+n} \setminus \{0\} \times R^n)$, *dove* $\{0\}$ *indica l'origine di* R^m;

ii) $\mathcal{T}'(D) \times \mathcal{F}$, *prodotto righe per righe, è la matrice quadrata di ordine* h, $(\delta(x) \otimes G(y))I + R$ *dove*, $\delta(x)$ *è la misura di Dirac concentrata in* $\{0\}$ *di* R^m; $G(y) = \|G_{j,i}(y)\|$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant h$, $G_{j,i}(y) \in C^\infty(R^n)$; I *è la matrice diagonale unitaria*; $R = \|R_{j,i}(x, y)\|$ *con* $R_{j,i}(x, y) \in C^\infty(R^{m+n})$.

DIMOSTRAZIONE. Stessa tecnica che per la dimostrazione del teorema enunciato in 1).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. AVANTAGGIATI, *Sulle matrici fondamentali principali per una classe di sistemi differenziali ellittici ed ipoellittici*, Ann. di Mat. (1964).

[2] L. HORMANDER, *Linerar partial differential operators*, Springer-Verlag, 1969.

[3] L. HORMANDER, *Differentiability properties of systems of differential equations* Ark. for Math., **50**, no. 3 (1958).

(*) La caratterizzazione degli operatori parzialmente ipoellittici con il metodo di sopra non è presente in nessuno dei lavori consultati dell'Autore.

[4] C. LECH, *A metric result about the zeros of complex polinomial ideal*, Ark. for Math., **52**, no. 3 (1958).
[5] L. GARDING - B. MALGRANGE, *Opérateur differéntiels partiellement hypoelliptiques et partiellement elliptiques*, Mat. Scad., **9** (1961).
[6] S. MATSUURA, *Partially hypoelliptic and partially elliptic systems of differential operators with constant coefficients*, J. Math. Kyoto Univ., 1-2 (1962).
[7] F. TREVES, *Linear partial differential equations with constant coefficients*, Gordon and Breach, 1966.

Manoscritto pervenuto in redazione il 4 giugno 1974.