

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

**Caratterizzazione dei sistemi ipoellittici a
coefficienti costanti, sovradeterminati, con
il metodo della paramatrice**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 52 (1974), p. 265-273

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__52__265_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Caratterizzazione dei sistemi ipoellittici a coefficienti costanti, sovradeterminati, con il metodo della paramatrice.

GIULIANO BRATTI (*)

Introduzione.

1. Si useranno i simboli della Teoria delle Distribuzioni di [2]; in R^{m+n} la variabile sia $(x, y): x = (x_1, \dots, x_m) \ y = (y_1, \dots, y_n)$.

Si consideri il sistema di equazioni alle derivate parziali, a coefficienti costanti:

$$(1) \quad \sum_{i,j} P_{i,j}(D_x, D_y) u_j = f_i$$

dove: $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ sono vettori le componenti dei quali sono distribuzioni in un aperto A di R^{m+n} ;

$$P_{i,j}(D_x, D_y) = \sum_{(\alpha, \beta)} a_{\alpha, \beta}^{i,j} D_x^\alpha D_y^\beta$$

con: $|\alpha| + |\beta| \leq M_{i,j}$, $a_{\alpha, \beta} \in \mathbb{C}$, $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \dots D_{x_m}^{\alpha_m}$, $D_{x_p} = (1/i) (\partial / \partial x_p)$; analogamente per D_y^β .

DEFINIZIONE 1. *Il sistema (1) si dice ipoellittico se la distribuzione vettore u è in $C^\infty(A)$ in ogni aperto A di R^{m+n} in cui è in $C^\infty(A)$ la distribuzione vettore f , [3].*

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico - Via Belzoni, 3 - 35100 Padova.

DEFINIZIONE 2. Il sistema (1) si dice *parzialmente ipoellittico nella variabile x* se la distribuzione vettore u è regolare (*) in x in ogni aperto A di R^{m+n} in cui è regolare in x la distribuzione vettore f , [6].

Nel caso che $h \leq k$, (che il sistema (1) cioè sia sovradeterminato), in [3] ed in [6], si dà una caratterizzazione (algebrica) del sistema (1) affinché soddisfi, rispettivamente la definizione 1) e la 2) (**).

Lo scopo di questo articolo è quello di dare un'altra caratterizzazione dei sistemi, a coefficienti costanti, che sono ipoellittici, mediante il metodo della paramatrice; una lieve modifica del metodo usato per i sistemi ipoellittici darà, immediatamente, una caratterizzazione anche dei sistemi parzialmente ipoellittici. Si otterrà il seguente:

TEOREMA. Sia $\mathcal{F}(D) = \|P_{i,j}(D)\|$ la matrice differenziale del sistema (1) e $\mathcal{F}'(D)$ la sua trasposta.

Il sistema (1) è ipoellittico se e solo se esiste una matrice $\mathcal{F} = \|F_{i,j}\|$ di distribuzioni in R^{m+n} dello stesso tipo della $\mathcal{F}'(D)$, (h righe e k colonne), tale che:

- i) $F_{i,j} \in C^\infty(R^{m+n} \setminus \{0\})$;
- ii) $\mathcal{F}'(D) \times \mathcal{F}$, prodotto righe per righe, è la matrice quadrata di ordine $h \delta I + R$ dove: δ è la misura di Dirac concentrata nell'origine

(*) Sia A un aperto di R^{m+n} e $f(x, y) \in \mathcal{D}'(A)$. f si dice regolare in x se per ogni aperto A_1 di R^m ed ogni aperto A_2 di R^n tali che $A_1 \times A_2 \subset A$ e per ogni $g(y) \in \mathcal{D}(A_2)$ la distribuzione $\langle f(x, y) \cdot g(y) \rangle$ è in $C^\infty(A_x)$, $A_x = \pi_{R^m}(A)$, dove π è la prima proiezione di R^{m+n} su R^m .

(**) Ecco le caratterizzazioni di cui si parla:

sia $\mathcal{F}(\theta, \zeta) = \|P_{i,j}(\theta, \zeta)\|$, $(\theta, \zeta) \in C^{m+n}$, la matrice di polinomi associata al sistema (1) nel seguente modo: $D_x^\alpha D_y^\beta \rightarrow \theta^\alpha \zeta^\beta$; sia I l'ideale generato nell'anello dei polinomi $C[\theta, \zeta]$, dai determinanti di tutti i minori di ordine h estratti dalla matrice $\mathcal{F}(\theta, \zeta)$, e V_I la varietà definita da I in C^{m+n} , $(V_I = \bigcap_{P \in I} Z(P))$, dove $Z(P)$ è l'insieme degli zeri in C^{m+n} di P . Sia (ξ, η) la variabile di R_{m+n} e d la metrica in C^{m+n} . Il sistema (1) è ipoellittico se e solo se $d((\xi, \eta), V_I) \rightarrow +\infty$ quando $|(\xi, \eta)| \rightarrow +\infty$ [3].

Il sistema (1) è parzialmente ipoellittico nella variabile x se e solo se la varietà V_I soddisfa la seguente proprietà: se $(\theta, \zeta) \in V_I$ e $|\operatorname{Im} \theta| \leq M_1 < +\infty$ e $|\zeta| \leq M_2 < +\infty$ allora $|\operatorname{Re} \theta| \leq M_3 < +\infty$, sove Im sta per parte immaginaria e Re per parte reale [6]. (Per il caso $V_I = \emptyset$ si veda [5] o [3], pag. 530).

di R^{m+n} , I è la matrice identità di ordine h , $R = \|R_{i,j}\|$, $1 \leq i, j \leq h$ con $R_{i,j} \in C^\infty(R^{m+n})$.

Nel § 2 si dimostrerà il teorema citato di sopra attraverso la dimostrazione di un lemma, tutt'affatto generale, sugli ideali generati dai determinati di tutti i minori di ordine h di una matrice rettangolare, di tipo (h, k) , $h \leq k$, con elementi in un anello commutativo con unità; per la dimostrazione di questo lemma l'Autore si è servito della dimostrazione del teorema di Binet, circa il prodotto righe per righe di due matrici rettangolari simili, di G. Scorza-Dragoni in *Elementi di Analisi Matematica*, Vol. 1º, n. 152, pag. 184. Nel § 3 si estenderà il teorema enunciato al caso dei sistemi, a coefficienti costanti, parzialmente ipoellittici.

2. Per la dimostrazione della condizione necessaria del teorema enunciato in § 1 è utile il seguente lemma:

Sia A un anello commutativo con unità e sia $M = \|a_{i,j}\|$ una matrice con elementi in A di tipo (h, k) , $1 \leq i \leq h$, $1 \leq j \leq k$, e $h \leq k$.

Sia I l'ideale generato in A dai determinati di tutti i minori di ordine h estratti da M . Per ogni $a \in I$ esiste una matrice quadrata, $M' = \|b_{i,j}\|$ con elementi in A , di ordine $k + h$, tale che:

i) $b_{i,j} = a_{i,j}$ se $1 \leq i \leq h$ e $1 \leq j \leq k$; $b_{i,j} = 0$ se $1 \leq i \leq h$ e $j \geq k + 1$;

ii) $\det \{M'\} = a^h$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è condotta nel modo seguente:

nel caso che sia $h = 1$ e $k \geq 1$, o nel caso che sia $h = 2$ e $k \geq 2$ si dimostra il lemma direttamente; nel caso che sia $h > 2$ e $k \geq 3$ la dimostrazione è ricondotta al caso $h = 2$ e $k \geq 2$.

a) sia $M = \|a_{1,i}\|$ e sia $a = \sum_{i=1}^k h_{1,i} a_{1,i}$ un elemento di I . Si consideri la matrice quadrata di ordine $k + 1$ così fatta: $b_{1,i} = a_{1,i}$ se $1 \leq i \leq k$; $b_{1,k+1} = 0$; $b_{i,k+1} = h_{1,(i-1)}$ se $2 \leq i \leq k + 1$; la rimanente parte della matrice coincida con la matrice diagonale di ordine k con tutti gli elementi della sua diagonale principale eguali a -1 . Risulta facile la verifica: il determinante della matrice costruita è a .

b) sia $M = \|a_{i,j}\|$, $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq k$, $2 \leq k$ e sia:

$$a = \sum_{i=1}^{\binom{k}{2}} l_i d_i$$

con: $l_k \in A$, e d_k il valore del determinante della k -esima matrice di ordine 2 estratta da M , un elemento dell'ideale I generato in A dai d_k . Se si sviluppa la k -esima matrice rispetto: primo agli elementi della prima riga di M e poi rispetto agli elementi della seconda riga di M si otterrà:

$$a = \sum_{i=1}^k h_{1,i} a_{1,i} = \sum_{i=1}^k h_{2,i} a_{2,i}.$$

Si consideri la matrice $M'' = \|l_{i,j}\|$, $1 \leq i \leq 2$ e $1 \leq j \leq k$ con $l_{i,j} = h_{i,j}$; dimostriamo che: il prodotto, righe per righe, di M per M'' è la matrice quadrata di ordine 2 diagonale tale che gli elementi della diagonale coincidono con a . Infatti:

$$a = \sum_{2=j}^k l'_{1,j} \det \left\{ \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,j} \\ a_{2,1} & a_{2,j} \end{vmatrix} \right\} + \sum_{3=j}^k l'_{2,j} \det \left\{ \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,j} \\ a_{2,2} & a_{2,j} \end{vmatrix} \right\} + \dots +$$

$$+ l'_{k-1,k} \det \left\{ \begin{vmatrix} a_{1,k-1} & a_{1,k} \\ a_{2,k-1} & a_{2,k} \end{vmatrix} \right\}$$

così che:

$$h_{1,1} = \sum_{2=j}^k l'_{1,j} a_{2,j}; \quad h_{1,2} = \sum_{3=j}^k l'_{2,j} a_{2,j} - l'_{1,2} a_{1,2};$$

$$h_{1,3} = \sum_{4=j}^k l'_{3,j} a_{2,j} - l'_{1,3} a_{2,1} - l'_{2,3} a_{2,2};$$

$$h_{1,k} = l'_{k-1,1} a_{2,k-1} - l'_{1,k} a_{2,1} - \dots - l'_{k-2,k} a_{2,k-2}.$$

Semplici verifiche danno: $\sum_{i=1}^k h_{1,i} a_{2,i} = 0$. Ragionando in modo analogo a sopra, si ottiene pure: $\sum_{i=1}^k h_{2,i} a_{1,i} = 0$. La matrice cercata, $M' = \|b_{i,j}\|$, è allora la seguente: $b_{i,j} = a_{i,j}$ se $1 \leq i \leq 2$ e $1 \leq j \leq k$; $b_{i,k+1} = b_{i,k+2} = 0$ se $1 \leq i \leq 2$; $b_{i,k+1} = h_{1,(i-2)}$ e $b_{i,k+2} = h_{2,(i-2)}$ se $3 \leq i \leq k+2$; la rimanente

parte di M' sia la matrice diagonale di ordine k con tutti gli elementi della diagonale eguali a -1 .

c) Sia $M = \|a_{i,j}\|$, $1 \leq i \leq h$, $1 \leq j \leq k$, $2 < h \leq k$ e sia, come sopra,

$$a = \sum_1^{(k)} l_i d_i \in I.$$

Sviluppando la i -esima matrice rispetto: agli elementi della prima riga di M , agli elementi della seconda riga di M , ..., agli elementi dell'ultima riga di M , si ottiene:

$$a = \sum_{1=i}^k h_{1,i} a_{1,i} = \sum_{1=i}^k h_{2,i} a_{2,i} = \dots = \sum_{1=i}^k h_{h,i} a_{h,i}$$

Si consideri la matrice $M'' = \|1_{i,j}\|$ con $1_{i,j} = h_{i,j}$, $1 \leq i \leq h$, $1 \leq j \leq k$, e dimostriamo che il prodotto righe per righe di M per M'' è la matrice quadrata di ordine h , diagonale, con tutti gli elementi della sua diagonale eguali ad a . Infatti: supponiamo che un elemento, $c_{i,j}$, $i \neq j$ della matrice prodotto $M \times M''$ sia diverso da 0. Allora la matrice di tipo $(2, k)$ formata con le sole i e j -esima righe di M sarebbe tale che: nell'ideale I generato in A dai determinanti di tutti i suoi minori di ordine 2 c'è l'elemento a .

Posto che:

$$a = \sum_{(s,t)} l_{s,t} \det \left\{ \begin{vmatrix} a_{i,s} & a_{i,t} \\ a_{j,s} & a_{j,t} \end{vmatrix} \right\},$$

sviluppando quest'ultima scrittura rispetto alla i -esima riga e poi rispetto alla j -esima riga, si ha, ancora:

$$a = \sum_{1=n}^k h_{i,n} a_{i,n} = \sum_{1=n}^k h_{j,n} a_{j,n}.$$

Ci si è così ricondotti al caso $h=2$ così che: $c_{i,j}$ deve essere 0. La dimostrazione del lemma è conclusa.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA ENUNCIATO IN § 1.

Condizione sufficiente: si supponga che esista una paramatrice $\mathcal{F} = \|F_{j,i}\|$ per il sistema (1) e che u sia una soluzione di (1) con

$f \in C^\infty(A)$, A aperto di R^{m+n} . Sia z_0 un punto di A e $\alpha(x) \in \mathcal{D}(A)$ con $\alpha(x) = 1$ in un intorno conveniente di z_0 ; dimostriamo che u è in C^∞ in un intorno di z_0 . Infatti:

$$(2) \quad \sum_{1=j}^k P_{j,1}(D_x, D_y) F_{j,1}(x, y) = \delta + R_{1,1} \text{ e } \sum_{1=j}^k P_{j,i}(D_x, D_y) F_{j,1}(x, y) = R$$

se $2 \leq i \leq h$. Si considerino le distribuzioni a supporto compatto αu_i , $1 \leq i \leq h$, e si faccia il prodotto di convoluzione di αu_i per la i -esima identità delle (2); sommando i risultati così ottenuti per colonne:

$$\sum_{1=j}^k F_{j,1} * \left(\sum_{1=i}^h P_{j,i}(D_x, D_y) \alpha u_i \right) = \alpha u_1 + \sum_{2=i}^h R_{i,1} * \alpha u_i$$

poichè $\sum_{1=i}^h P_{j,i}(D_x, D_y) \alpha u_i = g_i$ è in C^∞ in un intorno conveniente di z_0 , così come è in C^∞ la funzione $\sum_{2=i}^h R_{i,1} * \alpha u_i$, la dimostrazione che u_1 in un intorno di z_0 è in C^∞ è ricondotta alla dimostrazione della proposizione 7.1 di [7], pag. 401.

Condizione necessaria: applicando la tesi del lemma precedente si ha: se il sistema (1) è ipoellittico esiste una matrice quadrata di ordine $k+h$, $\|Q_{j,i}(\xi, \eta)\|$ tale che: $Q_{j,i}(\xi, \eta) = P_{j,i}(\xi, \eta)$, se $1 \leq i \leq h$ e $1 \leq j \leq k$; $Q_{j,i}(\xi, \eta) = 0$ se $1 \leq i \leq h$ e $k+1 \leq j \leq k+h$ ed inoltre:

$$\det \{ \|Q_{j,i}(\xi, \eta)\| \} = Q(\xi, \eta), \quad \text{polinomio ipoellittico (*)}.$$

Sia $\mathcal{F}' = \|F_{i,j}\|$ la paramatrice del sistema quadrato ipoellittico:

$$\sum_{1=i}^{h+k} Q_{j,i}(D_x, D_y) u_i = f_j, \quad 1 \leq i \leq h+k, \quad 1 \leq j \leq h+k (**);$$

(*) Nell'ideale I generato da tutti i minori di ordine h estratti dalla matrice $\|P_{j,i}(\xi, \eta)\|$ vi è un polinomio ipoellittico [4]. Si fissi quello come elemento $a \in I$ e si completi la matrice, secondo la dimostrazione del lemma; con le notazioni di sopra sarà: $Q(\xi, \eta) = P(\xi, \eta)^h$, se $P(\xi, \eta) = a$.

(**) Se con $q^{i,j}(D)$ si indica il polinomio differenziale che ha come simbolo il completamento algebrico di $Q_{j,i}(\xi, \eta)$ nella matrice $\|Q_{j,i}(\xi, \eta)\|$,

$$F'_{j,i}(x, y) = (2\pi)^{-(m+n)} q^{i,j}(D) \int \exp[i \langle x\xi + y\eta \rangle] g(\xi, \eta) / Q(\xi, \eta) d(\xi, \eta)$$

se si considera la matrice $\mathcal{F} = \|F_{j,i}\|$, di tipo (h, k) , ottenuta trasponendo le prime h colonne della ed eliminando, prima della trasposizione, la k -esima riga, ..., la $k + h$ -esima riga, si ha:

$$\mathcal{F}'(D) \times \mathcal{F} = \delta I + R$$

con il medesimo significato dei simboli che nell'enunciato del teorema. La dimostrazione di quest'ultimo, allora, è completamente terminata.

3) Sia $P(D_x, D_y)$ un operatore differenziale, a coefficienti costanti, parzialmente ipoellittico nella variabile x e sia $P(\xi, \eta)$ il polinomio ad esso associato ($D_x^\alpha D_y^\beta \rightarrow \xi^\alpha \eta^\beta$). Dalla caratterizzazione (algebrica), [5], [2], [7], dei polinomi differenziali parzialmente ipoellittici risulta: se $|\eta|a$, $a \in R_+$, e $|\xi| \rightarrow +\infty$, esiste $c \in R_+$ con $|P(\xi, \eta)| \geq c$.

Ne segue che gli zeri reali di $P(\xi, \eta)$ sono localizzati nell'insieme $\{(\xi, \eta): |\xi| \leq b, |\eta| \geq a\}$, per qualche $b \in R_+$. Si scelgano le funzioni $g(\xi)$ e $h(\eta)$ rispettivamente nel modo seguente: $g(\xi) \in C^\infty(R^m)$, $g(\xi) = 0$ se $|\xi| \leq b$ e $g(\xi) = 1$ se $|\xi| \geq b + 1$; $h(\eta) \in C^\infty(R^n)$ con

$$\text{supp } h(\eta) = \{\eta \in R^n: |\eta| \leq a\}.$$

Si consideri la distribuzione:

$$F = F(x, y) = (2\pi)^{-(m+n)} \int \exp[i\langle x\xi + y\eta \rangle] (g(\xi)h(\eta)) / P(\xi, \eta) d(\xi, \eta);$$

F soddisfa le seguenti proprietà:

- i) $P(D_x, D_y)F(x, y) = \delta(x) \otimes G(y) + H(x, y)$ con $G(y) \in C^\infty(R^n)$ e $H(x, y) \in C^\infty(R^{m+n})$;
- ii) $F(x, y) \in C^\infty(R^{m+n} \setminus \{0\} \times R^n)$, dove con $\{0\}$ si è indicata l'origine di R^m . Infatti:

$$P(D_x, D_y)F(x, y) = (2\pi)^{-(m+n)} \int \exp[i\langle x\xi + y\eta \rangle] g(\xi)h(\eta) d(\xi, \eta),$$

dove: $g(\xi, \eta)$ è in $C^\infty(R_{m+n})$ con la proprietà: se gli zeri di $Q(\xi, \eta)$ sono nell'insieme: $\{(\xi, \eta) \in R_{m+n}: |(\xi, \eta)| < Mg(\xi, \eta) = 0 \text{ in quell'insieme e } g(\xi, \eta) = 1 \text{ se } |(\xi, \eta)| > M + 1. \text{ Si veda: [7] e anche [1].}$

sicchè, posto $g(\xi) = 1 + g_1(\xi)$, ($\text{supp } g_1(\xi) = \{\xi \in R^m: |\xi| < b + 1\}$) risulta:

$$P(D_x, D_y)F(x, y) = (2\pi)^{(m+n)} \left(\int \exp[i\langle x\xi + y\eta \rangle] 1(\xi) h(\eta) d(\xi, \eta) + \right. \\ \left. + \int \exp[i\langle x\xi + y\eta \rangle], g_1(\xi) h(\eta) d(\xi, \eta) \right), \quad \text{da cui i).}$$

Per ii) si osservi che: $x_k P(D_x, D_y)F(x, y) \in C^\infty(R^{m+n})$ se $1 \leq k \leq m$.

D'altra parte l'esistenza di una distribuzione $F(x, y) \in \mathcal{D}'(R^{m+n})$ con le proprietà i) e ii) rispetto all'operatore $P(D_x, D_y)$ garantisce la sua parziale ipoellitticità, rispetto alla variabile x , come si può dedurre facilmente tenendo presente il lemma 8.1 di [7] pag. 451 (*). L'estensione del teorema enunciato in § 1, e dimostrato in § 2, al caso di sistemi parzialmente ipoellittici del tipo (1), ($h \leq k$), è allora la seguente:

TEOREMA. *Il sistema (1) è parzialmente ipoellittico nella variabile x se e solo se esiste una matrice di distribuzioni, $\mathcal{F} = \|F_{j,i}\|$, dello stesso tipo della $\mathcal{T}'(D)$, (h righe e k colonne), tale che:*

i) $F_{j,i}(x, y) \in C^\infty(R^{m+n} \setminus \{0\} \times R^n)$, dove $\{0\}$ indica l'origine di R^m ;

ii) $\mathcal{T}'(D) \times \mathcal{F}$, prodotto righe per righe, è la matrice quadrata di ordine h , $(\delta(x) \otimes G(y))I + R$ dove, $\delta(x)$ è la misura di Dirac concentrata in $\{0\}$ di R^m ; $G(y) = \|G_{j,i}(y)\|$, $1 \leq i, j \leq h$, $G_{j,i}(y) \in C^\infty(R^n)$; I è la matrice diagonale unitaria; $R = \|R_{j,i}(x, y)\|$ con $R_{j,i}(x, y) \in C^\infty(R^{m+n})$.

DIMOSTRAZIONE. Stessa tecnica che per la dimostrazione del teorema enunciato in 1).

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. AVANTAGGIATI, *Sulle matrici fondamentali principali per una classe di sistemi differenziali ellittici ed ipoellittici*, Ann. di Mat. (1964).
- [2] L. HORMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, 1969.
- [3] L. HORMANDER, *Differentiability properties of systems of differential equations* Ark. for Math., **50**, no. 3 (1958).

(*) La caratterizzazione degli operatori parzialmente ipoellittici con il metodo di sopra non è presente in nessuno dei lavori consultati dell'Autore.

- [4] C. LECH, *A metric result about the zeros of complex polinomial ideal*, Ark. for Math., **52**, no. 3 (1958).
- [5] L. GARDING - B. MALGRANGE, *Opérateur différentiels partiellement hypo-elliptiques et partiellement elliptiques*, Mat. Scad., **9** (1961).
- [6] S. MATSUURA, *Partially hypoelliptic and partially elliptic systems of differential operators with constant coefficients*, J. Math. Kyoto Univ., 1-2 (1962).
- [7] F. TREVES, *Linear partial differential equations with constant coefficients*, Gordon and Breach, 1966.

Manoscritto pervenuto in redazione il 4 giugno 1974.