

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANGELO FAVINI

Sulle equazioni differenziali astratte degeneri

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 52 (1974), p. 243-263

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__52__243_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Sulle equazioni differenziali astratte degeneri.

ANGELO FAVINI (*)

SUMMARY - This paper is concerned with existence and uniqueness of a « strong » solution for the equation

$$Bx'(t) = -Ax(t) + f(t), \quad t \in]0, T],$$

in a Banach space X , satisfying the initial condition

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \|x(t) - x_0\|_X = 0, \quad x_0 \in Y,$$

where Y is a Banach space, in general different from X . Here A is a linear closed operator, B a bounded operator from Y to X .

The results allow to handle degenerate Cauchy problems for some partial differential equations.

Introduzione.

In questa nota considero il problema astratto di stabilire esistenza ed unicità di una soluzione « stretta » dell'equazione

$$Bx'(t) = -Ax(t) + f(t), \quad t \in]0, T],$$

in uno spazio di Banach complesso X soddisfacente la condizione iniziale

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \|x(t) - x_0\|_X = 0, \quad x_0 \in Y,$$

essendo Y uno spazio di Banach, in generale diverso da X .

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « S. Pincherle », Piazza di Porta S. Donato 5, 40127 Bologna.

Qui A è un operatore lineare chiuso da Y a X , B è un operatore limitato da Y a X , $f: [0, T] \rightarrow X$ è una funzione continua e $x_0 \in Y$.

Trovo che, sotto opportune condizioni sul « risolvente » $(\lambda B + A)^{-1}$, tale soluzione è esprimibile nella forma

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp[\lambda t] (\lambda B + A)^{-1} B x_0 d\lambda + \int_0^t V(t, s) f(s) ds,$$

dove

$$V(t, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp[\lambda(t-s)] (\lambda B + A)^{-1} d\lambda \quad (\in L(X, Y)).$$

La motivazione di questa trattazione astratta è offerta dalla possibilità di risolvere problemi di Cauchy degeneri del tipo

$$\begin{cases} \alpha(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = -A(x, D)u(t, x) + g(t, x), & t \in]0, T], x \in \Omega, \\ u(t, x)|_{\Gamma} = 0 & \forall t \in]0, T], \\ \lim_{t \rightarrow 0+} u(t, x) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

dove $\alpha(x)$ è una funzione ≥ 0 su $\bar{\Omega}$ che si annulla su parte della frontiera Γ di Ω o su un sottoinsieme di misura nulla di Ω .

Tali problemi furono oggetto di un precedente lavoro (cfr. [1]). La differenza tra la prima elaborazione e la presente sta nel considerare A e B come operanti in spazi distinti.

Ciò permette, fra l'altro, di indebolire le assunzioni sulla regolarità dei dati.

LEMMA 1. *Siano X, Y spazi di Banach complessi immersi con continuità in uno spazio vettoriale topologico separato $\mathcal{E}$.*

Siano poi A un operatore lineare chiuso da Y a X con dominio D_A denso in Y , B un operatore limitato da Y a X . Sia

$$\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} | (\lambda B + A)^{-1} \in L(X, Y)\}.$$

Allora per ogni $m \in \mathbb{N}$ riesce

$$\frac{d^m}{d\lambda^m} (\lambda B + A)^{-1} = (-1)^m m! (\lambda B + A)^{-1} [B(\lambda B + A)^{-1}]^m, \quad (\text{cfr. [1]})$$

DIMOSTRAZIONE. Σ è aperto. Sia infatti $\lambda_0 \in \Sigma$. Allora

$$\lambda B + A = (1 - (\lambda_0 - \lambda)B(\lambda_0 B + A)^{-1})(\lambda_0 B + A).$$

(Si noti che $B(\lambda_0 B + A)^{-1} \in L(X, X)$). Quindi, se

$$|\lambda_0 - \lambda| \|B(\lambda_0 B + A)^{-1}\|_{X \rightarrow X} < 1,$$

riesce $(\lambda B + A)^{-1} \in L(X, Y)$ e $(\lambda B + A)^{-1} = (\lambda_0 B + A)^{-1}(1 - (\lambda_0 - \lambda) \cdot B(\lambda_0 B + A)^{-1})^{-1}$.

Vale

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda_0)^{-1}[(\lambda B + A)^{-1} - (\lambda_0 B + A)^{-1}] &= \\ &= (\lambda - \lambda_0)^{-1}(\lambda B + A)^{-1}[(\lambda_0 - \lambda)B(\lambda_0 B + A)^{-1}] = \\ &= -(\lambda B + A)^{-1}B(\lambda_0 B + A)^{-1} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} -(\lambda_0 B + A)^{-1}[B(\lambda_0 B + A)^{-1}]. \end{aligned}$$

e quindi l'affermazione è vera per $m = 1$.

Supposta la uguaglianza vera per $m = k$, dimostriamola per $m = k + 1$. A questo scopo mostriamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ risulta

$$\frac{d}{d\lambda} [B(\lambda B + A)^{-1}]_{\lambda=\lambda_0}^k = -k[B(\lambda_0 B + A)^{-1}]^{k+1}.$$

Per $k = 1$ si ha

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda_0)^{-1}[B(\lambda B + A)^{-1} - B(\lambda_0 B + A)^{-1}] &= \\ &= B(\lambda - \lambda_0)^{-1}[(\lambda B + A)^{-1} - (\lambda_0 B + A)^{-1}] \xrightarrow{\lambda \leftarrow \lambda_0} -B(\lambda_0 B + A)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot B(\lambda_0 B + A)^{-1} = -[B(\lambda_0 B + A)^{-1}]^2. \end{aligned}$$

Supponiamo ora $(d/d\lambda)[B(\lambda B + A)^{-1}]^{n-1} = -(n-1)[B(\lambda B + A)^{-1}]^n$. Si ha

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda_0)^{-1}[(B(\lambda B + A)^{-1})^n - (B(\lambda_0 B + A)^{-1})^n] &= \\ &= (\lambda - \lambda_0)^{-1}[(B(\lambda B + A)^{-1}(B(\lambda B + A)^{-1})^{n-1} - \\ &\quad - (B(\lambda_0 B + A)^{-1})(B(\lambda B + A)^{-1})^{n-1} + (B(\lambda_0 B + A)^{-1}) \cdot \\ &\quad \cdot (B(\lambda B + A)^{-1})^{n-1} - (B(\lambda_0 B + A)^{-1})(B(\lambda_0 B + A)^{-1})^{n-1}] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\lambda - \lambda_0)^{-1} \left[(B(\lambda B + A)^{-1} - B(\lambda_0 B + A)^{-1}) (B(\lambda B + A)^{-1})^{n-1} \right] + \\
&+ B(\lambda_0 B + A)^{-1} (\lambda - \lambda_0)^{-1} \left[(B(\lambda B + A)^{-1})^{n-1} - (B(\lambda_0 B + A)^{-1})^{n-1} \right] \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} \\
&\xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} - [B(\lambda_0 B + A)^{-1}]^2 [B(\lambda_0 B + A)^{-1}]^{n-1} - B(\lambda_0 B + A)^{-1} \cdot \\
&\cdot [(n-1)[B(\lambda_0 B + A)^{-1}]^n] = -n[B(\lambda_0 B + A)^{-1}]^{n+1}.
\end{aligned}$$

Vale allora

$$\begin{aligned}
&(\lambda - \lambda_0)^{-1} \left[\frac{d^k}{d\lambda^k} (\lambda B + A)^{-1} - \frac{d^k}{d\lambda^k} (\lambda_0 B + A)^{-1} \right] = \\
&= (-1)^k k! (\lambda - \lambda_0)^{-1} \{ (\lambda B + A)^{-1} [B(\lambda B + A)^{-1}]^k - \\
&- (\lambda_0 B + A)^{-1} [B(\lambda_0 B + A)^{-1}]^k \} = \\
&= (-1)^k k! (\lambda - \lambda_0)^{-1} \{ (\lambda B + A)^{-1} [B(\lambda B + A)^{-1}]^k - \\
&- (\lambda_0 B + A)^{-1} [B(\lambda B + A)^{-1}]^k + (\lambda_0 B + A)^{-1} [B(\lambda B + A)^{-1}]^k - \\
&- (\lambda_0 B + A)^{-1} [B(\lambda_0 B + A)^{-1}]^k \} = \\
&= (-1)^k k! \{ (\lambda - \lambda_0)^{-1} ((\lambda B + A)^{-1} - (\lambda_0 B + A)^{-1}) [B(\lambda B + A)^{-1}]^k + \\
&+ (\lambda - \lambda_0)^{-1} (\lambda_0 B + A)^{-1} ([B(\lambda B + A)^{-1}]^k - [B(\lambda_0 B + A)^{-1}]^k) \} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} \\
&\xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} (-1)^k k! \left[-(\lambda_0 B + A)^{-1} B(\lambda_0 B + A)^{-1} [B(\lambda_0 B + A)^{-1}]^k + \right. \\
&+ (\lambda_0 B + A)^{-1} [-k[B(\lambda_0 B + A)^{-1}]^{k+1}] \Big] = \\
&= (-1)^k k! \{ -(\lambda_0 B + A)^{-1} ([B(\lambda_0 B + A)^{-1}]^{k+1} + k[B(\lambda_0 B + A)^{-1}]^{k+1}) \} = \\
&= (-1)^{k+1} (k+1)! (\lambda_0 B + A)^{-1} [B(\lambda_0 B + A)^{-1}]^{k+1}.
\end{aligned}$$

Di qui l'affermazione.

DEFINIZIONE 1. Valgano le ipotesi del Lemma 1 relativamente agli operatori A e B . Sia inoltre $f(t)$, $t \in [0, T]$, una funzione continua da $[0, T]$ a X . Diciamo che $x: [0, T] \rightarrow Y$ è una soluzione « stretta » del problema

$$(1) \quad \begin{cases} Bx'(t) = -Ax(t) + f(t), & t \in]0, T[, \\ \lim_{t \rightarrow 0+} \|x(t) - x_0\|_Y = 0, & x_0 \in Y, \end{cases}$$

se $x(t)$ è fortemente continua da $[0, T]$ a Y , fortemente differenziabile da $]0, T]$ a Y , $x(t) \in D_A \quad \forall t \in]0, T]$, e vale (1).

LEMMA 2. Valgano le ipotesi del Lemma 1 su A e B ; inoltre, esista $(\lambda B + A)^{-1} \in L(X, Y) \quad \forall \lambda \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} \lambda \geq \alpha$, con

$$\|(\lambda B + A)^{-1}\|_{X \rightarrow Y} \leq M(1 + |\lambda|)^{-1}, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq \alpha.$$

Allora esiste $(\lambda B + A)^{-1} \in L(X, Y)$ per ogni λ in un dominio Σ_q del piano complesso situato alla destra della curva Γ_q , $q \in]0, 1[$, di equazione $\operatorname{Re} \lambda = \alpha - (q/M\|B\|_{Y \rightarrow X})(1 + |\operatorname{Im} \lambda|)$ e

$$\|((\sigma + i\tau)B + A)^{-1}\|_{X \rightarrow Y} \leq M_q(1 + |\tau|)^{-1}, \quad \sigma + i\tau \in \Sigma_q.$$

(cfr. [4], p. 67).

DIMOSTRAZIONE. Sia $\operatorname{Re} \lambda = \sigma$, $\operatorname{Im} \lambda = \tau$. Se x è un elemento arbitrario di X e

$$(2) \quad |\sigma - \alpha| \leq q(1 + |\tau|)(\|B\|_{Y \rightarrow X} M)^{-1}, \quad q \in]0, 1[,$$

allora

$$\begin{aligned} ((\sigma + i\tau)B + A)^{-1}x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma - \alpha)^n}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} ((\alpha + i\tau)B + A)^{-1}x = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sigma - \alpha)^n ((\alpha + i\tau)B + A)^{-1} [B((\alpha + i\tau)B + A)^{-1}]^n x. \end{aligned}$$

Infatti

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |\sigma - \alpha|^n \|((\alpha + i\tau)B + A)^{-1}\|_{X \rightarrow Y} \| [B((\alpha + i\tau)B + A)^{-1}]^n x \|_X &\leq \\ \leq \|((\alpha + i\tau)B + A)^{-1}\|_{X \rightarrow Y} \sum_{n=0}^{\infty} |\sigma - \alpha| \|B\|_{Y \rightarrow X}^n \|((\alpha + i\tau)B + A)^{-1}\|_{X \rightarrow Y}^n \|x\|_X &\leq \\ \leq \frac{M}{1 + |\tau|} \sum_{n=0}^{\infty} |\sigma - \alpha|^n \|B\|_{Y \rightarrow X}^n \|((\alpha + i\tau)B + A)^{-1}\|_{X \rightarrow Y}^n \|x\|_X &\leq \\ \leq \frac{M}{1 + |\tau|} \sum_{n=0}^{\infty} |\sigma - \alpha|^n \|B\|_{Y \rightarrow X}^n \frac{M^n}{(1 + |\tau|)^n} \|x\|_X, \end{aligned}$$

che è convergente se vale la (2).

Ne segue che

$$\|((\sigma + i\tau)B + A)^{-1}x\|_Y \leq \frac{Mq}{1 + |\tau|} \|x\|_X.$$

TEOREMA 1. *Valgano le ipotesi del Lemma 2. Allora, per ogni $x_0 \in Y$, il problema*

$$(3) \quad \begin{cases} Bx'(t) = -Ax(t), & t \in]0, T[, \\ \lim_{t \rightarrow 0+} \|x(t) - x_0\|_Y = 0, \end{cases}$$

ha una soluzione stretta.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che si può senz'altro supporre $\alpha - (q/M\|B\|_{Y \rightarrow X}) > 0$, in modo che l'origine sia situata alla sinistra della curva Γ_q .

In forza del Lemma 2 (cfr. [1]),

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_q} e^{\lambda t} (\lambda B + A)^{-1} Bx_0 d\lambda, \quad t > 0,$$

ha senso in Y e, per la configurazione di Γ_q insieme alla maggioranza ottenuta nel precedente Lemma, riesce

$$\begin{aligned} Bx'(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_q} e^{\lambda t} \lambda B (\lambda B + A)^{-1} Bx_0 d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_q} e^{\lambda t} Bx_0 d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_q} e^{\lambda t} A (\lambda B + A)^{-1} Bx_0 d\lambda = -Ax(t), \quad t > 0. \end{aligned}$$

Dimostriamo che $\|x(t) - x_0\|_Y \xrightarrow{t \rightarrow 0+} 0$, (cfr. [3]).

Poniamo $\lambda t = \xi$. Allora

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i t} \int_{\gamma_q} e^{\xi} \left(\frac{\xi}{t} B + A \right)^{-1} Bx_0 d\xi,$$

dove γ_q si può supporre indipendente da t ed ha la stessa configurazione di Γ_q . Se supponiamo $x_0 \in D_A$, poichè

$$x_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_q} \frac{e^{\xi}}{\xi} x_0 d\xi,$$

risulta

$$\begin{aligned} x(t) - x_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_a} \frac{e^{\xi} \left[\frac{\xi}{t} \left(\frac{\xi}{t} B + A \right)^{-1} B x_0 - x_0 \right]}{\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_a} \frac{e^{\xi} \left[\left(\frac{\xi}{t} B + A \right)^{-1} \left(\frac{\xi}{t} B + A - A \right) x_0 - x_0 \right]}{\xi} d\xi = \\ &= - \frac{t}{2\pi i} \int_{\gamma_a} \frac{e^{\xi}}{\xi} (\xi B + tA)^{-1} A x_0 d\xi. \end{aligned}$$

D'altra parte, su Γ_a , $1/(1 + |\operatorname{Im} \lambda|) \leq C/|\lambda|$. Infatti, se $\gamma = q/(M\|B\|_{Y \rightarrow X})$,

$$\frac{|\lambda|}{1 + |\operatorname{Im} \lambda|} = \frac{(\alpha^2 + \gamma^2 (1 + |\tau|)^2 - 2\alpha\gamma (1 + |\tau|) + |\tau|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 + |\tau|} \leq C.$$

Quindi,

$$\|(\xi B + tA)^{-1}\|_{X \rightarrow Y} = \frac{1}{t} \left\| \left(\frac{\xi}{t} B + A \right)^{-1} \right\|_{X \rightarrow Y} \leq \frac{1}{t} C_1 \left| \frac{\xi}{t} \right|^{-1} = \frac{C_1}{|\xi|}$$

Pertanto,

$$\|x(t) - x_0\|_Y \leq M_1 t \int_{\gamma_a} \frac{|e^{\xi}|}{|\xi|^2} |d\xi| \|A x_0\|_X.$$

Poiché l'ultimo integrale converge, $\lim_{t \rightarrow 0+} \|x(t) - x_0\|_Y = 0$.

Per la densità di D_A in Y , l'affermazione è, con ciò, completamente dimostrata.

Nella stessa maniera in cui fu provato il Teorema 2 in [1], si prova il seguente risultato di unicità.

TEOREMA 2. *Nelle ipotesi del Teorema 1, la soluzione stretta del problema (3) è unica.*

TEOREMA 3. *Sia $g(t)$ una funzione da $[0, T]$ a Y derivabile con continuità e sia $f(t) = Bg(t)$.*

Allora, nelle ipotesi del Teorema 1, il problema non-omogeneo (1) ha una (ed una sola) soluzione stretta. Precisamente, posto

$$V(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda B + A)^{-1} d\lambda \quad (\in L(X, Y))$$

dove $\Gamma = \Gamma_q$, $q \in]0, 1[$ (cfr. Teorema 1), tale soluzione è esprimibile nella forma

$$x(t) = V(t) B x_0 + \int_0^t V(t-s) f(s) ds.$$

DIMOSTRAZIONE. In forza del Teorema 1, basta mostrare che

$$y(t) = \int_0^t V(t-s) f(s) ds$$

è derivabile con continuità su $]0, T]$, soddisfa

$$B y'(t) = -A y(t) + f(t), \quad t \in]0, T]$$

e $\lim_{t \rightarrow 0+} \|y(t)\|_Y = 0$.

Ora, poichè

$$V(t) = \frac{1}{2\pi i t} \int_{\gamma} e^{\xi} \left(\frac{\xi}{t} B + A \right)^{-1} d\xi,$$

dalla maggiorazione $\|(\xi/t)B + A\|_{X \rightarrow Y} < (M/|\xi|)t$ segue

$$\|V(t)\|_{X \rightarrow Y} < M', \quad \forall t \in [0, T].$$

Quindi,

$$\|y(t)\|_Y \leq \int_0^t \|V(t-s)\|_{X \rightarrow Y} \|f(s)\|_X ds \leq M' \sup_{0 \leq s \leq t} \|f(s)\|_X t \xrightarrow{t \rightarrow 0+} 0.$$

Mostriamo che in X

$$\lim_{t \rightarrow 0+} B V(t) f(s) = f(s).$$

Ciò ci tornerà utile nel seguito della prova. Si ha

$$V(t) f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda B + A)^{-1} B g(s) d\lambda$$

e allora, dalla dimostrazione del Teorema 1, possiamo senz'altro dedurre che

$$\|V(t)f(s) - g(s)\|_Y \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \|BV(t)f(s) - Bg(s)\|_X &= \|BV(t)f(s) - f(s)\|_X \leq \\ &\leq \|B\|_{Y \rightarrow X} \|V(t)f(s) - g(s)\|_Y \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

Si può quindi supporre che $BV(0)f(t) = f(t)$.

Per dimostrare la parte restante dell'affermazione procediamo come in [3], pp. 486-487.

In virtù dell'ipotesi su g , risulta

$$y(t) = \int_0^t V(t-s)f(0)ds + \int_0^t \left[\int_r^t V(t-s)Bg'(r)ds \right] dr.$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} A \int_r^t V(s)Bg(u)ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_r^t \left(\int_{\Gamma} e^{\lambda s} A(\lambda B + A)^{-1} Bg(u) d\lambda \right) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_r^t \left(\int_{\Gamma} e^{\lambda s} Bg(u) d\lambda \right) ds - \frac{1}{2\pi i} \int_r^t \left(\int_{\Gamma} e^{\lambda s} \lambda B(\lambda B + A)^{-1} Bg(u) d\lambda \right) ds = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} B \left(\int_r^t \left(\int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda s} (\lambda B + A)^{-1} Bg(u) d\lambda \right) ds \right) = -B \int_r^t V'(s)Bg(u)ds = \\ &= B[V(r) - V(t)]f(u), \quad 0 \leq r \leq t. \end{aligned}$$

Si noti che anche $BV(0)f(u)$, per quello che si è visto sopra, risulta ben definito. Così

$$\begin{aligned} A \int_r^t V(t-s)f(u)ds &= A \int_0^{t-r} V(r)f(u)d\eta = \\ &= B[V(0) - V(t-r)]f(u) = f(u) - BV(t-r)f(u). \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}
 Ay(t) &= \int_0^t A V(t-s) f(0) ds + \int_0^t \left(\int_r^t A V(t-s) f'(r) ds \right) dr = \\
 &= f(0) - BV(t) f(0) + \int_0^t [f'(r) - BV(t-r) f'(r)] dr = \\
 &= f(0) - BV(t) f(0) + f(t) - f(0) - B \int_0^t V(t-r) f'(r) dr = \\
 &= f(t) - BV(t) f(0) - B \int_0^t V(t-r) f'(r) dr.
 \end{aligned}$$

D'altra parte, poichè $y(t) = \int_0^t V(s) f(t-s) ds$, si ha

$$\begin{aligned}
 h^{-1}[y(t+h) - y(t)] &= \\
 &= \int_0^t V(s) \frac{f(t+h-s) - f(t-s)}{h} ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} V(s) f(t+h-s) ds = \\
 &= \int_0^t V(s) ([f(t+h-s) - f(t-s)]/h) ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} V(s) Bg(t+h-s) ds = \\
 &= \int_0^t V(s) ([f(t+h-s) - f(t-s)]/h) ds + \frac{1}{h} \int_0^h V(t+s) Bg(h-s) ds.
 \end{aligned}$$

Ora, si riconosce facilmente che

$$V(t+s)Bg(u) = V(t)BV(s)Bg(u);$$

(la prova è analoga a quella che, per un semigruppoo olomorfo $U(t)$ riesce $U(t+s) = U(t)U(s)$). Quindi,

$$\int_0^h V(t+s)Bg(h-s) ds = V(t)B \int_0^h V(s)Bg(h-s) ds.$$

Segue che

$$\lim_{h \rightarrow 0+} [y(t+h) - y(t)]/h = \\ = \int_0^t V(s) f'(t-s) ds + V(t) Bg(0) = \int_0^t V(t-s) f'(s) ds + V(t) f(0).$$

Così

$$By'(t) = BV(t)f(0) + \int_0^t BV(t-s)f'(s)ds = -Ay(t) + f(t), \quad t \in]0, T].$$

Ciò prova l'affermazione.

COROLLARIO. *Valgano le ipotesi precedenti sull'operatore A . Inoltre, B sia un isomorfismo da Y a X . Se $f: [0, T] \rightarrow X$ è derivabile con derivata continua e $x_0 \in Y$, allora esiste una ed una sola soluzione stretta del problema (1).*

DIMOSTRAZIONE. È conseguenza immediata del Teorema 3, riuscendo $f(t) = Bg(t)$, $g(t) = B^{-1}f(t)$.

Il precedente Corollario ammette, però, una generalizzazione, nel senso che esso resta valido sotto ipotesi meno restrittive su f . Infatti,

TEOREMA 4. *Valgono le ipotesi del Teorema 1 su A e B sia un isomorfismo da Y a X . Se $f: [0, T] \rightarrow X$ è hölderiana, cioè risulta*

$$\|f(t) - f(\tau)\|_X \leq C|t - \tau|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

allora il problema (1) ha una e una sola soluzione stretta.

DIMOSTRAZIONE. Essendo B un isomorfismo, se $x = x(t)$ soddisfa

$$Bx'(t) = -Ax(t) + f(t), \quad t \in]0, T],$$

allora

$$x'(t) = -B^{-1}Ax(t) + B^{-1}f(t), \quad t \in]0, T],$$

ed inversamente. Notiamo che

$$t \rightarrow B^{-1}f(t), \quad t \in [0, T],$$

riesce anch'essa hölderiana in Y .

D'altronde, sempre per l'ipotesi su B , se $\lambda \in \Sigma_a$, risulta $(\lambda B + A)^{-1}B: Y \rightarrow Y$ l'operatore inverso dell'operatore $\lambda + B^{-1}A$.

Poichè inoltre

$$\|(\lambda B + A)^{-1}\|_{X \rightarrow Y} \leq C(1 + |\lambda|)^{-1}, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq \alpha,$$

vale

$$\|(\lambda + B^{-1}A)^{-1}\|_{Y \rightarrow Y} \leq \|(\lambda B + A)^{-1}\|_{X \rightarrow Y} \|B\|_{Y \rightarrow X} \leq C'(1 + |\lambda|)^{-1}, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq \alpha.$$

La teoria dei semigruppî olomorfi è quindi applicabile alla risoluzione del problema

$$(4) \quad \begin{cases} x'(t) = -B^{-1}Ax(t) + B^{-1}f(t), & t \in]0, T], \\ \lim_{t \rightarrow 0+} \|x(t) - x_0\|_Y = 0. \end{cases}$$

È noto, infatti, che (4) ha una unica soluzione stretta. Di qui scende la nostra affermazione.

Applicazioni.

Sia Ω un sottoinsieme aperto limitato di $\mathbf{R}^n$ con frontiera Γ che supponiamo, per semplicità, di classe C^∞ . Sia poi $A(x, D)$ l'operatore differenziale tale che

$$A(x, D)u(x) = - \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + a(x)u(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega,$$

dove $a, a_i, i = 1, \dots, n$, sono funzioni continue da $\bar{\Omega}$ a $\mathbf{C}$ e le a_{ik} sono elementi di $C^{(u)}(\bar{\Omega})$ con $a_{ik}(x) = \bar{a}_{ik}(x)$ e $\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \gamma_i \bar{\gamma}_k \geq \alpha \sum_{i=1}^n |\gamma_i|^2$ per ogni $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ e una costante $\alpha > 0$ indipendente da $x \in \bar{\Omega}$.

Supponiamo inoltre che valga $\operatorname{Re} a(x) \geq a_0 > 0, \forall x \in \bar{\Omega}$, (cfr. [5]).

Con $\alpha(x)$ denotiamo una funzione continua su $\bar{\Omega}$, non-negativa, tale che $\alpha(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_1 \subseteq \Gamma$ mentre $\alpha(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega$.

Ci proponiamo di risolvere la questione della esistenza ed unicità

di una soluzione (in un senso che verrà sotto precisato) del problema differenziale

$$(5) \quad \begin{cases} \alpha(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = -A(x, D)u(t, x) + g(t, x), & x \in \Omega, t \in]0, T], \\ u(t, x)|_T = 0, & \forall t \in]0, T], \\ \lim_{t \rightarrow 0+} u(t, x) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Precisiamo gli spazi funzionali in cui considereremo tale problema.

Con $L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)$ denotiamo lo spazio di Banach delle funzioni $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, misurabili, per le quali la norma

$$\|u\|_{L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)} = \left(\int_{\Omega} \alpha(x) |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

risulta finita.

È chiaro che lo spazio $L^2(\Omega)$ delle funzioni di quadrato sommabili su Ω risulta immerso nello spazio $L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)$, essendo

$$\|u\|_{L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)}^2 = \int_{\Omega} \alpha(x) |u(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx = C \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Inoltre, riesce anche $L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$; infatti, $L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)$ è il duale forte di $L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)$ e quindi, per l'identificazione di $L^2(\Omega)$ col suo antiduale, possiamo dedurre che $L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)$.

Notiamo che le immersioni sono dense, poichè $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ è denso in questi spazi.

Definiamo l'operatore A nel modo seguente:

$$D_A = \{u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \mid Au \in L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)\},$$

$$(Au)(x) = A(x, D)u(x).$$

D_A è denso in $L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)$, essendo $\mathcal{D}(\Omega) \subset D_A$.

Se poniamo $v(t, x) = \exp[-\delta t]u(t, x)$, il problema connesso con l'equazione

$$\alpha(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = -A(x, D)u(t, x) + g(t, x), \quad t \in]0, T], x \in \Omega,$$

viene mutato nel problema

$$\alpha(x) \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = - (A(x, D) + \delta \alpha(x)) v(t, x) + g(t, x), \quad t \in]0, T], \quad x \in \Omega,$$

restando ferme le condizioni iniziale ed ai limiti. Supponiamo $\delta > 0$.

Poniamo poi $A_1(x, D) = A(x, D) + \delta \alpha(x)$.

Per provare la disuguaglianza successiva procediamo seguendo Sobolevskii (cfr. [5], pp. 55-56). Poniamo

$$f(x) = (A_1(x, D) + \lambda \alpha(x)) u(x), \quad x \in \Omega,$$

e notiamo che $u \in D_A \Rightarrow f \in L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)$.

Moltiplicando entrambi i membri della uguaglianza precedente per $\bar{u}(x)$, otteniamo

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} \alpha(x) |u(x)|^2 dx - \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_k} \bar{u}(x) dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \bar{u}(x) dx + \\ + \int_{\Omega} a(x) |u(x)|^2 dx + \delta \int_{\Omega} \alpha(x) |u(x)|^2 dx = \int_{\Omega} f(x) \bar{u}(x) dx. \end{aligned}$$

Ora, per ipotesi, $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e quindi, integrando per parti,

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_k} \bar{u}(x) dx = \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \bar{u}(x)}{\partial x_i} dx + \\ + \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial a_{ik}(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \bar{u}(x) dx. \end{aligned}$$

Per la disuguaglianza di Schwarz si ha (cfr. [5], p. 55):

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial a_{ik}(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \bar{u}(x) dx \right| + \left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \bar{u}(x) dx \right| \leq \\ \leq \varepsilon \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^2 dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

dove ε è un numero positivo arbitrario. Segue che, se $\operatorname{Re} \lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
 & (\operatorname{Re} \lambda + \delta) \int_{\Omega} \alpha(x) |u(x)|^2 dx + \operatorname{Re} \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^u a_{ik}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}(x)}{\partial x_i} dx + \\
 & + \operatorname{Re} \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^u \frac{\partial a_{ik}(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \bar{u}(x) dx + \operatorname{Re} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \bar{u}(x) dx + \\
 & + \operatorname{Re} \int_{\Omega} \alpha(x) |u(x)|^2 dx = \operatorname{Re} \int_{\Omega} f(x) \bar{u}(x) dx \geq (\operatorname{Re} \lambda + \delta) \int_{\Omega} \alpha(x) |u(x)|^2 dx + \\
 & + a_0 \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} \sum_{i=1}^u \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} \sum_{i=1}^u \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^2 dx - \frac{C}{\varepsilon} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx = \\
 & = (\operatorname{Re} \lambda + \delta) \int_{\Omega} \alpha(x) |u(x)|^2 dx + \left(a_0 - \frac{C}{\varepsilon} \right) \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + (\alpha - \varepsilon) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^u \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^2 dx.
 \end{aligned}$$

Scegliamo ε tale che sia $0 < \varepsilon < \alpha$ e supponiamo $a_0 > C/\varepsilon$.

Si può allora dedurre

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(a_0 - \frac{C}{\varepsilon} \right)^{-1} \operatorname{Re} \int_{\Omega} f(x) \bar{u}(x) dx ,$$

$$\sum_{i=1}^u \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^2 dx \leq (\alpha - \varepsilon)^{-1} \operatorname{Re} \int_{\Omega} f(x) \bar{u}(x) dx .$$

Poi, da

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{Im} \lambda) \int_{\Omega} \alpha(x) |u(x)|^2 dx &= \operatorname{Im} \int_{\Omega} f(x) \bar{u}(x) dx - \operatorname{Im} \int_{\Omega} \alpha(x) |u(x)|^2 dx - \\
 &- \operatorname{Im} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \bar{u}(x) dx - \operatorname{Im} \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^u a_{ik}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}(x)}{\partial x_i} dx - \\
 &- \operatorname{Im} \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^u \frac{\partial a_{ik}(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \bar{u}(x) dx
 \end{aligned}$$

deduciamo

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} \lambda| \int_{\Omega} \alpha(x) |u(x)|^2 dx &\leq \left(C_1 + \frac{C}{\varepsilon}\right) \|u\|_{L^1(\Omega)}^2 + \left| \operatorname{Im} \int_{\Omega} f(x) \bar{u}(x) dx \right| + \\ &+ \varepsilon \int_{\Omega} \sum_{i=1}^u \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^2 dx \leq \left(C_1 + \frac{C}{\varepsilon}\right) \left(a_0 - \frac{C}{\varepsilon}\right)^{-1} \operatorname{Re} \int_{\Omega} f(x) \bar{u}(x) dx + \\ &+ \left| \operatorname{Im} \int_{\Omega} f(x) \bar{u}(x) dx \right| + \varepsilon(\alpha - \varepsilon)^{-1} \operatorname{Re} \int_{\Omega} f(x) \bar{u}(x) dx. \end{aligned}$$

Poiché

$$\left| \int_{\Omega} f(x) \bar{u}(x) dx \right| \leq \|f\|_{L^1(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)} \|u\|_{L^1(\sqrt{\alpha}, \Omega)},$$

otteniamo

$$|\operatorname{Im} \lambda| \|u\|_{L^1(\sqrt{\alpha}, \Omega)} \leq C_{\varepsilon} \|f\|_{L^1(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)}.$$

Analogamente, poichè

$$(\operatorname{Re} \lambda + \delta) \|u\|_{L^1(\sqrt{\alpha}, \Omega)} \leq \operatorname{Re} \int_{\Omega} f(x) \bar{u}(x) dx \leq \|f\|_{L^1(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)} \|u\|_{L^1(\sqrt{\alpha}, \Omega)},$$

riesce

$$(\operatorname{Re} \lambda + \delta) \|u\|_{L^1(\sqrt{\alpha}, \Omega)} \leq \|f\|_{L^1(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)}$$

e quindi

$$\begin{aligned} (*) \quad \|u\|_{L^1(\sqrt{\alpha}, \Omega)} &\leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \|(\lambda B + A_1)u\|_{L^1(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)}, \\ &\quad \forall u \in D_A, \quad \forall \lambda \in \mathbf{C}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0. \end{aligned}$$

B è, ben inteso, l'operatore limitato da $L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)$ a $L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)$ definito da

$$(Bu)(x) = \alpha(x)u(x).$$

Si noti che B è addirittura un isomorfismo da $L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)$ a $L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)$.

In effetti, da

$$\|Bu\|_{L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)}^2 = \int_{\Omega} \alpha(x)^{-1} |\alpha(x)u(x)|^2 dx = \|u\|_{L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)}^2$$

segue $Bu = 0 \Rightarrow u = 0$; così B è $1-1$. Infine, se $f \in L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)$, $v = f/\alpha$ appartiene a $L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega \left(\int_{\Omega} \alpha(x) |v(x)|^2 dx = \|f\|_{L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)}^2 \right)$ e $f = Bv$.

Sia $\tilde{a} = a + \delta\alpha$. Poichè

$$(\lambda B + A_1(x, D))u(x) = - \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \\ + \tilde{a}(x)u(x) + \lambda\alpha(x)u(x),$$

e

$$\operatorname{Re}(\tilde{a}(x) + \lambda\alpha(x)) = \operatorname{Re} \tilde{a}(x) + (\operatorname{Re} \lambda)\alpha(x) \geq \operatorname{Re} \tilde{a}(x) \geq a_0 > 0,$$

l'operatore $\lambda B + A_1$, per $\operatorname{Re} \lambda > 0$, gode della seguente proprietà: data $f \in L^2(\Omega)$ esiste $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tale che

$$(\lambda B + A_1(x, D))u(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

(cfr. ancora [5]).

Se, di più, $f \in L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, allora $A_1 u \in L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)$.

In effetti, da

$$A_1(x, D)u(x) = f(x) - \lambda\alpha(x)u(x)$$

segue

$$|A_1(x, D)u(x)|^2 \leq |f(x)|^2 + |\lambda|^2 \alpha(x)^2 |u(x)|^2 + 2|\lambda| |\alpha(x)| |f(x)| |u(x)|$$

e, da una parte, per ipotesi, $\int_{\Omega} \alpha(x)^{-1} |f(x)|^2 dx < +\infty$, dall'altra,

$$\int_{\Omega} |\alpha(x)^{-1} |\alpha(x) u(x)|^2 dx = \int_{\Omega} \alpha(x) |u(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < +\infty,$$

essendo $u \in L^2(\Omega)$. Infine

$$\int_{\Omega} |f(x)| |u(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} \alpha(x)^{-1} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \alpha(x) |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Così, data $f \in L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)$ esiste $u \in D_{A_1} = D_A$ tale che $(\lambda B + A_1)u = f$. Pertanto, da questo risultato e dalla (*) possiamo dedurre che

l'operatore $\lambda B + A_1$ ha inverso limitato $(\lambda B + A_1)^{-1}: L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega) \xrightarrow{1-1} L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)$, $\forall \lambda, \operatorname{Re} \lambda > 0$.

Ma allora anche $((\lambda B + A_1)^{-1})^{-1} = \lambda B + A_1$ è un operatore chiuso con $D_A = D_{\lambda B + A_1}$. (Si ricordi che $A: D_A \rightarrow X_1$ è chiuso se e solo se $A^{-1}: A(D_A) \rightarrow X$ è chiuso (cfr. [3], p. 165)).

Così $\lambda B + A_1$ è chiuso da $L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)$ a $L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)$. Poichè B è limitato e $A_1 = (\lambda B + A_1) - \lambda B$, anche A_1 è un operatore chiuso. Si è quindi mostrato che esiste $(\lambda B + A_1)^{-1}: L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega) \rightarrow L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)$ per ogni λ con $\operatorname{Re} \lambda > 0$ e

$$\|(\lambda B + A_1)^{-1}\|_{L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega) \rightarrow L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)} \leq M(1 + |\lambda|)^{-1}.$$

Veniamo ora a fare le ipotesi sul dato u_0 e sulla parte non omogenea $g(t, x)$ del problema in questione. Prima di tutto, supporremo $u_0 \in L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)$ e poi

$$\left(\int_{\Omega} \alpha(x)^{-1} |g(t, x) - g(\tau, x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C |t - \tau|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Allora il Teorema 4 porta a concludere che esiste una ed una sola soluzione stretta del problema (5), $(X = L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega), Y = L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega))$.

Quanto alla natura della soluzione trovata, possiamo dire che essa è, in particolare, soluzione debole di (5) nel senso di [2].

Infatti, poichè $L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, l'equazione risulta soddisfatta anche nello spazio $L^2(\Omega)$ e quindi, se $A^*(x, D)$ denota l'aggiunto formale di $A(x, D)$, vale, per ogni « test-function » $\varphi(t, x)$ in Q^T (per le notazioni, cfr. [2], p. 417)

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \alpha(x) u(0, x) \bar{\varphi}(0, x) dx - \int_{\Omega} \int_0^T \alpha(x) u(t, x) \frac{\partial \bar{\varphi}(t, x)}{\partial t} dt dx + \\ & + \int_{\Omega} \int_0^T u(t, x) A^*(x, D) \bar{\varphi}(t, x) dt dx = \int_{\Omega} \int_0^T g(t, x) \bar{\varphi}(t, x) dt dx. \end{aligned}$$

Poichè

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \|u(t) - u_0\|_{L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)} = 0$$

e

$$\left| \int_{\Omega} \alpha(x) u(0, x) \bar{\varphi}(0, x) dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} \alpha(x) |u(0, x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \alpha(x) |\varphi(0, x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

possiamo senz'altro sostituire

$$\int_{\Omega} \alpha(x) u(0, x) w(0, x) dx \quad \text{con} \quad \int_{\Omega} \alpha(x) u_0(x) w(0, x) dx,$$

per ottenere che

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \int_0^T \alpha(x) u(t, x) \frac{\partial \bar{\varphi}(t, x)}{\partial t} dt dx + \int_{\Omega} \int_0^T u(t, x) A^*(x, D) \bar{\varphi}(t, x) dt dx = \\ = \int_{\Omega} \int_0^T g(t, x) \bar{\varphi}(t, x) dt dx + \int_{\Omega} \alpha(x) u_0(x) \bar{\varphi}(0, x) dx. \end{aligned}$$

Supponiamo ora che la funzione $\alpha: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}$, $\alpha(x) \geq 0$, sia strettamente positiva su $\Omega_0 \subset \Omega$ e $\alpha(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus \Omega_0$, dove Ω_0 è un aperto e $\Omega \setminus \Omega_0$ ha misura nulla.

Consideriamo ancora il problema (5). Poniamo

$$\beta(x) = \begin{cases} 1/\alpha(x), & x \in \Omega_0, \\ 1, & x \in \Omega \setminus \Omega_0. \end{cases}$$

β è chiaramente misurabile. Possiamo allora considerare lo spazio $L^2(\sqrt{\beta}, \Omega)$, che, nelle considerazioni che seguono, prenderà il posto di $L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)$.

Procedendo come è stato fatto nel primo caso, risulta che, se $(\lambda B + A_1)u = f$, allora

$$(\operatorname{Re} \lambda + \delta) \|u\|_{L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)}^2 \leq \operatorname{Re} \int_{\Omega} f(x) \bar{u}(x) dx,$$

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Im} \lambda| \|u\|_{L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)}^2 &\leq C' \left(\operatorname{Re} \int_{\Omega} f(x) \bar{u}(x) dx + \left| \operatorname{Im} \int_{\Omega} f(x) dx \right| \right) \leq \\
&\leq C'' \int_{\Omega} |f(x)| |u(x)| dx \leq C'' \left(\int_{\Omega_0} \beta(x) |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\Omega_0} \alpha(x) |u(x)|^2 dx \right) = \\
&= C'' \|f\|_{L^2(\sqrt{\beta}, \Omega)}^2 \|u\|_{L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)}^2,
\end{aligned}$$

da cui

$$\|u\|_{L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)} \leq C(1 + |\lambda|)^{-1} \|(\lambda B + A_1)u\|_{L^2(\sqrt{\beta}, \Omega)}.$$

Poichè $L^2(\sqrt{\beta}, \Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (in effetti,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega_0} |u(x)|^2 dx = \int_{\Omega_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)} |u(x)|^2 dx \leq C_1 \int_{\Omega_0} \alpha(x)^{-1} |u(x)|^2 dx = \\
&= C_1 \int_{\Omega} \beta(x) |u(x)|^2 dx = C_1 \|u\|_{L^2(\sqrt{\beta}, \Omega)}^2,
\end{aligned}$$

data $f \in L^2(\sqrt{\beta}, \Omega)$, esiste $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tale che $\lambda \alpha(x) u(x) + A_1(x, D)u(x) = f(x)$.

Poichè allora

$$\begin{aligned}
\beta(x) |A_1(x, D)u(x)|^2 &\leq \beta(x) |f(x)|^2 + \beta(x) |\lambda|^2 \alpha(x)^2 |u(x)|^2 + \\
&+ 2\beta(x) |\lambda| \alpha(x) |f(x)| |u(x)|,
\end{aligned}$$

riesce

$$\begin{aligned}
\|A_1(x, D)u\|_{L^2(\sqrt{\beta}, \Omega)} &\leq \|f\|_{L^2(\sqrt{\beta}, \Omega)} + |\lambda|^2 \int_{\Omega_0} \alpha(x) |u(x)|^2 dx + 2|\lambda| \int_{\Omega_0} |f(x)| |u(x)| dx \leq \\
&\leq C_1(\lambda) \|f\|_{L^2(\sqrt{\beta}, \Omega)}^2 + C_2(\lambda) \|u\|_{L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)}^2.
\end{aligned}$$

D'altra parte, è facile riconoscere che l'applicazione $u \rightarrow \alpha u$ risulta un isomorfismo di $L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)$ su $L^2(\sqrt{\beta}, \Omega)$.

Pertanto, possiamo ancora applicare il Teorema 4 per ottenere un risultato di esistenza ed unicità della soluzione.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. FAVINI, *Su certe equazioni astratte a coefficienti operatoriali*, Boll. U.M.I., (4), **9** (1974), 463-485.
- [2] A. FRIEDMAN - Z. SCHUSS, *Degenerate evolution equations in Hilbert space*, Trans A.M.S., **161** (1971), 401-427.

- [3] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, ed. Springer, 1966.
- [4] S. G. KREIN, *Linear differential equations in Banach space*, ed. A.M.S., 1971.
- [5] P. E. SOBOLEVSKI-, *Equations of parabolic type in a Banach space* (1961); Traduzione inglese: A.M.S. Transl., (2), **49** (1965), 1-62.

Manoscritto pervenuto in redazione il 24 aprile 1974.