

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

LAURA TOTI RIGATELLI

Anelli di frazioni fortemente valutativi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 52 (1974), p. 201-210

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__52__201_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__52__201_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Anelli di frazioni fortemente valutativi.

LAURA TOTI RIGATELLI (*)

SUMMARY - In this note we study conditions for a ring of fractions of a strongly valutive ring (as introduced in [5]) to be strongly valutive either.

SUNTO - In questa Nota si studiano condizioni sotto le quali la proprietà di forte valutatività, introdotta in [5], si estende da un anello ad un suo anello di frazioni.

In un precedente lavoro ([5]) è stata introdotta una classe di anelli, detti anelli *fortemente valutativi*, i quali sono caratterizzati dal fatto di possedere un algoritmo di divisione rispetto a più divisori, e sui quali è possibile definire una funzione resto che ha tutte le proprietà rilevanti del « resto positivo » nella divisione euclidea dell'anello degli interi (cfr. [5], [6]).

La classe degli anelli fortemente valutativi ammette notevoli teoremi di chiusura, in particolare è chiusa rispetto al passaggio all'anello dei polinomi, delle serie formali e agli anelli quozienti.

Scopo del presente lavoro è la ricerca di condizioni sotto le quali la proprietà di forte valutatività si estende da un anello ad un suo

(*) Indirizzo dell'A.: Viale delle Regioni, 6 - 53100 Siena.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro applicazioni del C.N.R., anno 1974.

L'A. ringrazia il Prof. S. GRECO per la stimolante opera di critica costruttiva.

anello di frazioni. I principali risultati sono contenuti nei teoremi 1, 4, 5. Resta aperto il problema se *ogni* anello di frazioni di un anello fortemente valutativo sia fortemente valutativo.

1. Ricordiamo anzitutto, per comodità del lettore, le definizioni seguenti (cfr. [5]).

DEF. 1. *Dato un anello A , una quaterna $\langle v, M, \leq, \varrho \rangle$ è detta un sistema di valutazione forte per A se:*

- 1) M è un insieme non vuoto;
- 2) $\leq$ è una relazione riflessiva in M ;
- 3) esiste in M un elemento minimo 0 , ed uno solo;
- 4) ogni successione transitivamente discendente, ossia ogni $(a_i)_{i \in \omega}$ con
4,1) se $i \leq j$ allora $a_i \geq a_j$
ammette ripetizioni;
- 5) v è un'applicazione da A ad M tale che
5,1) $va = 0$ se e solo se $a = 0$;
- 6) detto $\mathfrak{I}(A)$ l'insieme degli ideali di A , ϱ è un'applicazione da $A \times \mathfrak{I}(A)$ ad A tale che:
6,1) $\varrho(0, J) = 0$ ($J \in \mathfrak{I}(A)$)
6,2) se $a \equiv b(J)$ allora $\varrho(a, J) = \varrho(b, J)$ ($a, b \in A$; $J \in \mathfrak{I}(A)$)
6,3) se $b \in J$, $b \neq 0$ allora $v\varrho(a, J) < vb$ ($a \in A$; $J \in \mathfrak{I}(A)$)
6,4) $a - \varrho(a, J) \in J$ »
6,5) se $J \subseteq L$ allora $\varrho(\varrho(a, L), J) = \varrho(a, L)$ ($a \in A$; $J, L \in \mathfrak{I}(A)$).

Osserviamo che si dice *coppia valutativa* ogni coppia $\langle M, \leq \rangle$ che verifichi le 1), 2), 3) 4) (cfr. [4]).

DEF. 2. *Un anello A è detto fortemente valutativo (f.v.) se e solo se ammette un sistema di valutazione forte.*

2. Da risultati di [5] segue subito il

TEOREMA 1. *Sia A un anello fortemente valutativo ed S un suo sottoinsieme moltiplicativamente chiuso, finitamente generato. Allora $S^{-1}A$ è fortemente valutativo.*

DIMOSTRAZIONE. Anzitutto (agli effetti di $S^{-1}A$) si può supporre che S sia addirittura monogenerato. Sia a un generatore. La f da $A[x]$ ad $S^{-1}A$ così definita: $f \sum_{i=1}^n a_i x^i = \sum_{i=1}^n a_i a^{-i}$, è ovviamente un epimorfismo, onde per i teoremi 1 e 2 di [5], $S^{-1}A$ risulta fortemente valutativo.

3. Prima di passare all'esame di altri casi, ci è utile dare una condizione sufficiente affinché la forte valutatività si estenda da un anello ad un suo sopraanello.

DEF. 3. Sia A un sottoanello di B ; diremo che A è un buon sottoanello di B se per ogni $J \in \mathfrak{I}(B)$, $J \neq \{0\}$, l'omomorfismo naturale da A a B/J è suriettivo.

Sono ovviamente formulazioni equivalenti le seguenti:

- (α) Per ogni ideale J di B , $J \neq \{0\}$, ogni laterale di J abbia traccia non vuota in A .
- (β) Per ogni ideale J di B non nullo, il monomorfismo naturale da $A/J \cap A$ a B/J è un isomorfismo.

(Ovviamente se $J \subseteq L$ e ogni laterale di J ha traccia non vuota in A , così avviene anche per L ; è quindi sufficiente richiedere la (α) per un opportuno insieme di ideali, ad esempio per gli ideali principali.)

Dimostriamo adesso il

TEOREMA 2. Sia B un anello ed A un suo buon sottoanello; allora se A è fortemente valutativo, anche B lo è.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\langle v, M, \leq, \varrho \rangle$ un sistema di valutazione forte per il sottoanello A . Sia J un ideale di B . Definiamo una valutazione v' per gli elementi di B aggiungendo ad M un elemento massimo m (il che non altera il carattere di coppia valutativa di $\langle M, \leq \rangle$) ponendo:

$$v'a = \begin{cases} va & \text{se } a \in A, \\ m & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Definiamo poi una ϱ' ponendo:

$$\varrho'(a, J) = \begin{cases} a & \text{se } J = \{0\}, \\ \varrho(b, J \cap A) & \text{altrimenti (} b \text{ essendo un} \\ & \text{qualsunque elemento di } (J + a) \cap A \text{)} \end{cases}$$

Per la 6,2) della def. 1 e per l'ipotesi su A , la definizione è corretta.

È facile ora constatare che ϱ' , v' hanno le proprietà volute. La 5.1) e la 6,1) sono ovvie.

Per quanto riguarda la 6,2) la cosa è ovvia se $J = \{0\}$. Supponiamo allora $J \neq \{0\}$ e sia $a \equiv b(J)$. Consideriamo $\varrho'(a, J)$ e $\varrho'(b, J)$, scegliamo un $\bar{a}$ in $(J + a) \cap A$, allora $\varrho'(a, J) = \varrho(\bar{a}, J \cap A)$, ma $\bar{a}$ appartiene altresì a $(J + b) \cap A$ quindi $\varrho(\bar{a}, J \cap A) = \varrho'(b, J)$ da cui la tesi.

Per la 6,3): sia $b \in J$, $b \neq 0$ quindi $J \neq \{0\}$; si ha $v' \varrho'(a, J) = v \varrho(\bar{a}, J \cap A)$ e distinguiamo adesso due casi: o $b \notin A$ e allora $v'b = m$ e $v \varrho(\bar{a}, J \cap A) < m$, oppure $b \in A$ e allora $v'b = vb$ e

$$v \varrho(\bar{a}, J \cap A) < vb$$

poichè A è f.v., in entrambi i casi segue la tesi.

Per la 6,4): possiamo scrivere

$$a - \varrho'(a, J) = a - \varrho(\bar{a}, J \cap A) = a - \bar{a} + \bar{a} - \varrho(\bar{a}, J \cap A)$$

ma $a - \bar{a} \in J$ e poichè A è f.v., $\bar{a} - \varrho(\bar{a}, J \cap A) \in J \cap A$ quindi $a - \varrho'(a, J) \in J$.

Sia infine $J \subseteq L$, scriviamo:

$$\varrho'(\varrho'(a, L), J) = \varrho'(\varrho(\bar{a}, L \cap A), J) = \varrho(b, J \cap A)$$

dove

$$b \in (J + \varrho(\bar{a}, L \cap A)) \cap A$$

possiamo allora prendere $b = \varrho(\bar{a}, L \cap A)$, e quindi è:

$$\varrho(b, J \cap A) = \varrho(\varrho(\bar{a}, L \cap A), J \cap A)$$

e poichè A è f.v., $\varrho(\varrho(\bar{a}, L \cap A), J \cap A) = \varrho(\bar{a}, L \cap A) = \varrho'(a, L)$ da cui la tesi.

4. Ci è utile tradurre in modo opportuno la condizione del numero precedente nel caso $B = S^{-1}A$.

Si ha:

TEOREMA 3. — *Sia A un dominio d'integrità e S un suo sottoinsieme moltiplicativamente chiuso; supponiamo che sia $0 \notin S$ e $1 \in S$, come si*

può fare senza perdita di generalità. Allora sono equivalenti le:

(i) A è buon sottoanello di $S^{-1}A$;

(ii) comunque scelti $a \in A (a \neq 0)$, $b \in S$, $c \notin S (c \neq 0)$, l'equazione

$$ax + cy = bxz$$

ammette almeno una soluzione con $x \in S$, $y, z \in A$ ⁽¹⁾.

DIMOSTRAZIONE. (i) $\rightarrow$ (ii). Valga la (i) e siano $a \in A$, $a \neq 0$, $b \in S$, $c \notin S$ con $c \neq 0$. Sia J l'ideale di $S^{-1}A$ generato da c , e consideriamo il laterale $J + b^{-1}a$. Esso avrà almeno un elemento z in A e sarà allora $b^{-1}a - z \in J$. Ma gli elementi di J sono della forma $x^{-1}y'c$ con $x \in S$, $y' \in A$, onde si trova, per un opportuno $x \in S$ e un opportuno $y' \in A$:

$$b^{-1}a - z = x^{-1}y'c$$

ossia:

$$ax - bxz = bcy'$$

e posto $y = by'$

$$ax + cy = bxz$$

(ii) $\rightarrow$ (i). Sia J un ideale di $B = S^{-1}A$, $J \neq \{0\}$ e sia $J' = J \cap A$ (confondiamo A con la sua immagine canonica in B). Dimostriamo che ogni laterale di J ha traccia non vuota in A .

Dato che J' è certamente non vuoto, possiamo supporre $J \neq B$ e limitarci a considerare laterali non coincidenti con J .

Siano $a \in A$, $b \in S$ e consideriamo il laterale $J + a/b$ (possiamo supporre $a \neq 0$ per l'osservazione precedentemente fatta); sia $c \in J'$, $c \neq 0$ (è ovvio che $J' \neq \{0\}$ e certamente $c \notin S$, altrimenti $1 = c/c \in J = B$) e siano $x \in S$, $y, z \in A$ tali che: $ax + cy = bxz$. Si ha $bx \in S$, $cy/bx \in J$, $a/b + cy/bx = ax + cy/bx = z \in A$.

È ovvio poi che la traccia considerata è un laterale di J' in A .

COROLLARIO 1. Se A è un dominio d'integrità fortemente valutativo e S un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di A soddisfacente la (ii) del teorema 3, allora $S^{-1}A$ è fortemente valutativo.

DIMOSTRAZIONE. Ovvio.

⁽¹⁾ La (ii) è certamente soddisfatta se comunque presi $b \in S$, $c \notin S$ con $c \neq 0$, si ha $(b, c) = 1$.

Sia A un dominio d'integrità fortemente valutativo e $S \subseteq A$ un suo sottoinsieme moltiplicativamente chiuso con $0 \notin S$. Come è noto ([2] cap. 3, es. 7 e 8) possiamo supporre (agli effetti di $S^{-1}A$) S saturo ($ab \in S$ se e solo se $a, b \in S$) e in tal caso $A - S$ è unione di ideali primi. si ha:

TEOREMA 4. *Se A, S sono al solito (e S saturo, ipotesi che non porta perdita di generalità) e $A - S$ è unione di ideali massimali principali, allora $S^{-1}A$ è fortemente valutativo.*

DIMOSTRAZIONE. — Siano $a \in A$, $a \neq 0$, $b \in S$, $c \notin S$, $c \neq 0$.

Sia $(J_i)_{i \in I}$ una famiglia di ideali massimali principali con $\bigcup_{i \in I} J_i = A - S$ e per ogni i sia d_i un generatore di J_i .

Mostriamo che:

(*) esistono certi $n \in \omega$, $i_0, i_1, \dots, i_n \in I$, $x \in S$ con $c = xd_0 d_1 \dots d_n$

(dove si è scritto, per comodità, d_r per d_{i_r}).

Non sia così. Poichè $c \in A - S$ dev'essere $c \in J_0$ dove J_0 è un opportuno ideale della famiglia e quindi: $c = c_0 d_0$ con $c_0 \neq 0$ e, per l'ipotesi fatta, $c_0 \in A - S$. Procedendo per induzione si trovano allora certi $(c_n)_{n \in \omega}$, $(d_n)_{n \in \omega}$ con: $c_n = c_{n+1} d_{n+1}$.

Si ha ovviamente:

$$(c) \subseteq (c_0) \subseteq \dots \subseteq (c_n) \subseteq \dots$$

ed essendo A f.v. e perciò noetheriano, la successione scritta dev'essere stazionaria e per qualche n si deve avere $(c_n) = (c_{n+1})$. Ma ciò implica che d_{n+1} sia invertibile, contro l'ipotesi che esso generi un ideale proprio. La (*) è così dimostrata.

Mostriamo ora che:

(**) comunque scelti $n \in \omega$, e $d_0, d_1, \dots, d_n$ nella famiglia dei d_i , l'equazione

$$bz + d_0 d_1 \dots d_n y = 1$$

ammette soluzione.

Se infatti così non fosse, l'ideale $(b, d_0 d_1 \dots d_n)$ sarebbe proprio e quindi contenuto in un opportuno ideale massimale I . Si avrebbe allora $d_0 d_1 \dots d_n \in I$ onde per almeno un i , $d_i \in I$ e, essendo $J_i = (d_i)$ massimale, $I = J_i$ il che è assurdo essendo $b \notin \bigcup J_i$, $b \in I$. La (**) è così dimostrata.

Per la (*) sarà, per opportuni $x \in S$, $n \in \omega$, $d_0, d_1, \dots, d_n$:

$$c = x d_0 d_1 \dots d_n$$

e per la (**) esistono certi $y, z \in A$ con:

$$a - bz = d_0 d_1 \dots d_n y$$

onde

$$x(a - bz) = cy.$$

La tesi segue ora dal corollario 1.

Analogamente si dimostra la seguente

PROPOSIZIONE. *Abbiamo A, S il solito significato. Se A è fortemente valutativo e S è generato da elementi massimali (cioè da elementi che generano ideali massimali) allora $S^{-1}A$ è fortemente valutativo.*

DIMOSTRAZIONE. Aggiungiamo ad S l'elemento 1. Esiste per ipotesi un insieme $D = \{d_i: i \in I\}$ di elementi massimali tale che ogni $b \in S$ è (1 oppure) prodotto di elementi di D . Comunque presi $b \in S$, $c \notin S$, $c \neq 0$, si trova allora, come si è visto nel precedente teorema, $(b, c) = 1$ onde è soddisfatta la (ii) del teorema 3 (cfr. nota (1)).

5. Ancora sulla base del teorema 2, possiamo trattare il caso di anelli di dimensione 1. Allo scopo ci sono necessari i lemmi seguenti.

LEMMA 1. *Sia $(A_i)_{i \in I}$ una famiglia di anelli, $A = \prod_{i \in I} A_i$, S un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di A e, per ogni $i \in I$, poniamo: $S_i = \{x_i: x \in S\}$. Allora esiste un omomorfismo f da $S^{-1}A$ a $\prod_{i \in I} S_i^{-1}A_i$.*

DIMOSTRAZIONE. Per $a \in A$, $b \in S$ poniamo:

$$(f a/b)_i = a_i/b_i.$$

Che la f così definita sia un omomorfismo è ovvio.

LEMMA 2. *Sia C un anello locale artiniiano. Allora ogni suo anello di frazioni è isomorfo a C o degenerare.*

DIMOSTRAZIONE. Sia S un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di C . Se $0 \in S$, allora $S^{-1}C$ è degenerare. Se $0 \notin S$ allora S è disgiunto

dall'unico ideale primo J di C (cfr. [3], pp. 4, 5), che per le ipotesi fatte su C , è il massimo ideale proprio. Perciò ogni elemento di S è invertibile e l'applicazione canonica $C \rightarrow S^{-1}C$ è un isomorfismo.

LEMMA 3. *Sia C un anello artiniano e S un suo sottoinsieme moltiplicativamente chiuso. Allora l'applicazione canonica $g: C \rightarrow S^{-1}C$ è suriettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Per un noto teorema (cfr. [2], teor. 8,7, pag. 90) si ha: $C \simeq C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n$ per opportuni C_i locali artiniani. Per ogni sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di C , si ha, con ovvio significato dei simboli, il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\quad} & \prod C_i \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ S^{-1}C & \xrightarrow{f} & \prod S_i^{-1}C_i \end{array}$$

onde la g risulta suriettiva (insieme alla f che risulta così essere un isomorfismo).

Siamo ora in grado di dimostrare il:

TEOREMA 5. *Sia A un dominio d'integrità fortemente valutativo di dimensione uno. Allora ogni anello di frazioni di A è fortemente valutativo.*

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema 2 è sufficiente dimostrare che preso un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso S di A e un ideale $J \neq \{0\}$ di $S^{-1}A$, l'omomorfismo canonico $\psi: A/I \rightarrow S^{-1}A/J$ (I essendo la controimmagine di J nell'omomorfismo canonico $f: A \rightarrow S^{-1}A$) è suriettivo. Poichè $J \neq \{0\}$ anche $I \neq \{0\}$. Allora A/I ha dimensione 0 ed essendo A noetheriano (poichè è f.v.) è artiniano, onde A/I è nelle ipotesi del lemma 3. Si ha ora l'ovvio diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \frac{A}{I} & \xrightarrow{\quad} & S^{-1}\left(\frac{A}{I}\right) \\ \vdots \downarrow & & \downarrow \psi \\ \frac{S^{-1}A}{J} & \xleftarrow{\quad} & \frac{(S^{-1}A)}{(S^{-1}I)} \end{array}$$

da cui l'asserto.

COROLLARIO 2. *Se A è un dominio d'integrità principale fortemente valutativo, allora ogni suo anello di frazioni è fortemente valutativo.*

COROLLARIO 3. *Se A è un anello euclideo ⁽²⁾, ogni suo anello di frazioni è euclideo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia A euclideo e sia S un suo sottoinsieme moltiplicativamente chiuso. Come si è visto nella dimostrazione del teorema 5, A è un buon sottoanello di $S^{-1}A$. La coppia valutativa che si costruisce per $S^{-1}A$ con il procedimento del teorema 2, si ottiene da una coppia valutativa per A aggiungendo un elemento massimo onde, se la precedente è ben ordinata è anch'essa ben ordinata e $S^{-1}A$ risulta euclideo.

6. OSSERVAZIONE. Si noti che ciascuno dei teoremi 1, 4, 5, copre casi non coperti dagli altri due. Si considerino infatti i seguenti esempi.

ESEMPIO α . Sia $A = Z[x, y]$ l'anello dei polinomi in due variabili a coefficienti in Z . A è fortemente valutativo. Si prenda ora $S = \{1\} \cup \{x^n : n \in \omega\}$ e si consideri $B = S^{-1}A$. La coppia B, A non soddisfa le ipotesi del teorema 2, infatti preso ad esempio l'ideale J generato da 2, il suo laterale $J + y/x$ ha ovviamente traccia vuota in A . Non sono soddisfatte quindi le ipotesi nè del teorema 4, nè del teorema 5.

ESEMPIO β . Sia K un campo e $A = K[[x]][y]$. La dimensione di A è ovviamente 2. Per ogni $n \in \omega$ l'ideale generato da $1 + xy^n$ è massimale (cfr. [1], pag. 37, es. 4.7). Sia M un'unione di ideali di questo tipo e $S = A - M$. A è un dominio d'integrità fortemente valutativo (cfr. [5], teor. 2 e 3) di dimensione 2 e S non è finitamente generato onde l'esempio cade sotto le ipotesi del teorema 4 ma non dei teoremi 1 e 5.

ESEMPIO γ . Sia A l'anello $Z[\sqrt{5}]$ (ossia $Z[x]/(x^2 - 5)$). Poichè Z è f.v., $Z[x]$ è f.v. e A , come suo quoziente è f.v. (cfr. [5], teor. 1 e 2). $Z[x]$ ha dimensione 2 onde, essendo $(x^2 - 5)$ primo, $Z[\sqrt{5}]$ ha dimensione non superiore a 1 e, non essendo un corpo, ha quindi dimensione 1, e a norma del teorema 5, ogni suo anello di frazioni è f.v.

Sia J l'ideale $(2, 1 + \sqrt{5})$; J è massimale in quanto immagine dell'ideale $(2, 1 + x)$ di $Z[x]$ che è massimale e contiene $(x^2 - 5)$. (L'ideale $(2, 1 + x)$ di $Z[x]$ è massimale in quanto è costituito dai polinomi

⁽²⁾ Come in [6] l'aggettivo euclideo viene inteso nel senso generalizzato di Samuel.

$\sum_0^n a_i x^i$ con $\sum a_i \equiv 0(2)$; si può anche vedere direttamente che $(2, 1 + \sqrt{5})$ è costituito da tutti e soli gli $a + b\sqrt{5}$ con $a + b \equiv 0(2)$.

Posto $S = A - J$, la coppia A, S non cade sotto le ipotesi del teorema 4 in quanto J , come si verifica con facili calcoli, non è principale e non cade sotto le ipotesi del teorema 1 in quanto S non è finitamente generato.

BIBLIOGRAFIA

- [1] D. AREZZO, *Sugli ideali massimali principali degli anelli di polinomi*, Le Matematiche, **25**, fasc. 1 (1970), Catania.
- [2] M. F. ATIYAH - I. G. MAC DONALD, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publ. Comp., 1969.
- [3] H. MATSUMURA, *Commutative Algebra*, W. A. Benjamin Inc., New York, 1970.
- [4] L. TOTI RIGATELLI, *Una sottoclasse della classe degli anelli noetheriani, « analoga » alla classe degli euclidei*, Annali dell'Università di Ferrara, Sez. VII, **17**, no. 3 (1971).
- [5] L. TOTI RIGATELLI, *Algoritmi di divisione in anelli non euclidei*, Le Matematiche, **28**, fasc. 1 (1973), Catania.
- [6] L. TOTI RIGATELLI, *Un'osservazione sugli anelli euclidei generalizzati*, Rendiconti Acc. Naz. dei Lincei, **55**, fasc. 4 (1973).

Manoscritto pervenuto in redazione il 18 marzo 1973.