

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ROSARIO STRANO

**Sulla Henselizzazione di anelli di valutazione
e di anelli di Prüfer**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 52 (1974), p. 167-183

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__52__167_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sulla Henselizzazione di anelli di valutazione e di anelli di Prüfer.

ROSARIO STRANO (*)

Introduzione.

In questo lavoro studiamo l'henselizzazione degli anelli di valutazione e degli anelli di Prüfer con particolare riguardo alla permanenza, sia nella salita che nella discesa, di alcune proprietà di tali anelli.

Nel n. 1 dimostriamo che l'henselizzazione di un anello di valutazione A rispetto a un suo qualunque ideale è ancora un anello di valutazione che ha lo stesso gruppo dei valori di A , estendendo un risultato di Nagata (vedi [9] teor. 8 e teor. 15).

Nel n. 2 proviamo che l'henselizzazione di un anello di valutazione A rispetto a un suo ideale $\mathfrak{m}$ è perfettamente individuata dall'henselizzazione dell'anello locale $A_{\sqrt{\mathfrak{m}}}$ e viceversa; esprimiamo poi i risultati ottenuti facendo uso della nozione di corpo valutato henseliano.

Il n. 3 comprende i risultati più importanti. In esso dimostriamo che l'henselizzazione $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$ di un anello di Prüfer A rispetto a un ideale $\mathfrak{m}$ soddisfacente alla condizione che $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$ sia connesso, è ancora un anello di Prüfer nel quale ogni ideale è l'esteso di un ideale di A . Come conseguenza di questo fatto si ha, tra l'altro, che l'omomorfismo canonico tra i gruppi di Picard di A e di B è suriettivo e, quando $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$, è un isomorfismo. Applichiamo altresì i risultati ottenuti ad alcuni casi particolari di anelli di Prüfer.

Nel n. 4 mettiamo in relazione gli anelli di valutazione henseliani

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico - Corso Italia, 55 - Catania.
Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R.

con quelli completi: troviamo che l'henselizzazione di un anello di valutazione completo non è necessariamente completa (tranne nel caso che l'anello di valutazione abbia rango 1 nel qual caso un anello di valutazione completo è pure henseliano). La completezza non si conserva nemmeno nella discesa cioè esistono anelli di valutazione non completi la cui henselizzazione è completa. È vero invece che se un anello è henseliano il suo completamento è pure henseliano.

Tutti gli anelli sono supposti commutativi e con elemento unità. Per tutte le nozioni che non definiamo rimandiamo a [1].

1. In questo numero studiamo l'henselizzazione di un anello di valutazione A rispetto a un suo ideale m . Per la definizione e le principali proprietà riguardanti l'henselizzazione di una coppia (A, m) con m ideale di A rimandiamo a [5]. Il risultato cui perveniamo è enunciato nel teorema 1. Dimostriamo dapprima due proposizioni.

PROPOSIZIONE 1. *Sia $\varphi: A \rightarrow B$ un omomorfismo di anelli tale che B sia una A -algebra fedelmente piatta. Se B è un anello di valutazione allora A è di valutazione.*

DIM. Poichè l'omomorfismo φ è iniettivo allora A è un dominio. Detto K_A il corpo delle frazioni di A è $K_A \cap B = A$ e quindi da $x \in K_A$, $x \notin A$ segue $x \notin B$ da cui $x^{-1} \in B$ e quindi $x^{-1} \in A$.

PROPOSIZIONE 2. *Sia A un anello locale e $B = {}^h(A, m)$ con m ideale di A ; allora B è un anello locale ed è ${}^hA = {}^hB$ cioè A e B hanno la stessa henselizzazione come anelli locali. Inoltre se A è un dominio integralmente chiuso anche B lo è.*

DIM. Sia C una N -estensione semplice di (A, m) (per le nozioni di N -polinomio e di N -estensione vedi [5] def. 1.2 e def. 2.2); allora è chiaro che C è una N -estensione semplice di $(A, \mathfrak{p})$ dove $\mathfrak{p}$ è il massimale di A e quindi per [5] lemma 7.3 si ha ${}^hA = {}^hB$. La seconda affermazione segue dal fatto che se A è un dominio integralmente chiuso allora hA è un dominio integralmente chiuso (vedi p.e. [10] pag. 180) e dal fatto che hB è una B -algebra fedelmente piatta.

TEOREMA 1. *Sia A un anello e $B = {}^h(A, m)$ con m ideale di A .*

- a) Se B è di valutazione ed $m \subset \text{Rad } A$ allora A è di valutazione.*
- b) Se A è di valutazione allora B è di valutazione.*

- c) Se A e B sono di valutazione rispettivamente con corpo delle frazioni $K_A \subset K_B$ e v_A (risp. v_B) è una valutazione di K_A (risp. K_B) di anello A (risp. B) allora v_A è equivalente alla restrizione di v_B a K_A e detti $\Gamma_A \subset \Gamma_B$ i rispettivi gruppi dei valori è $\Gamma_A = \Gamma_B$.

DIM. a) segue dalla proposizione 1. Per provare b) e c) poniamo $D = {}^hA$; è noto (vedi [9] teor. 8 e teor. 15) che D è un anello di valutazione e detto Γ_D il gruppo dei valori di D è $\Gamma_A = \Gamma_D$. Ne segue allora, per le proposizioni 1 e 2, che B è di valutazione e dalla relazione $\Gamma_A \subset \Gamma_B \subset \Gamma_D$ segue $\Gamma_A = \Gamma_B$.

COROLLARIO 1. Sia A un anello di valutazione e $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$ con $\mathfrak{m}$ ideale di A . Allora per ogni elemento b di B esiste a di A tale che $aB = bB$.

DIM. Segue subito dalla condizione $\Gamma_A = \Gamma_B$.

2. Sia A un anello di valutazione ed $\mathfrak{m}$ un ideale di A ; osserviamo anzitutto che $\sqrt{\mathfrak{m}}$ è un ideale primo (vedi [3] cap. VI par. 7 n. 2 lemma 2). In questo numero facciamo vedere che l'anello $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$ è perfettamente determinato dall'henselizzazione dell'anello locale $A_{\sqrt{\mathfrak{m}}}$ e viceversa. Dopo aver richiamato la definizione di corpo valutato henseliano, esprimiamo i risultati ottenuti in termini di corpi valutati.

Osserviamo intanto che è ${}^h(A, \mathfrak{m}) = {}^h(A, \sqrt{\mathfrak{m}})$ (vedi [5] prop. 8.6) e quindi in questo numero supporremo sempre che $\mathfrak{m}$ sia un ideale primo di A .

TEOREMA 2. Sia A un anello di valutazione ed $\mathfrak{m}$ un suo ideale primo. Si ha che $(A, \mathfrak{m})$ è una coppia henseliana se e solo se $A_{\mathfrak{m}}$ è un anello locale henseliano.

DIM. È noto che (vedi [4] cor. 6.8) se A è un dominio integralmente chiuso ed $\mathfrak{m}$ è un suo ideale primo, $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$, allora se $A_{\mathfrak{m}}$ è henseliano allora $(A, \mathfrak{m})$ è una coppia henseliana. Proviamo adesso il viceversa nell'ipotesi che A sia un anello di valutazione.

Per [9] teorema 3 basta provare che ogni dominio intero su A possiede un solo primo al di sopra di $\mathfrak{m}$. Supponiamo che ciò non sia vero e sia R un dominio intero su A che abbia almeno due primi $\mathfrak{m}_1$ e $\mathfrak{m}_2$ al di sopra di $\mathfrak{m}$. Facciamo vedere anzitutto che si può supporre che il corpo delle frazioni H di R sia normale e separabile sul corpo delle frazioni K di A ed R integralmente chiuso. Infatti se R' è la chiusura integrale di R nella estensione normale di K generata da H è noto

che per ogni primo di R esiste un primo di R' al di sopra di esso; possiamo quindi supporre H normale e R integralmente chiuso; sia ora $\bar{H}$ la chiusura separabile di K in H e poniamo $\bar{R} = R \cap \bar{H}$: si ha che per ogni primo $\bar{q}$ di $\bar{R}$ esiste uno e un sol primo q di R al di sopra di $\bar{q}$ (vedi [3] cap. V par. 2 n. 3 lemma 4).

Sia a un elemento di m_1 che non sta in m_2 e sia L l'estensione finita normale separabile generata da a su K e sia A' la chiusura integrale di A in L ; proviamo che A' possiede almeno due primi al di sopra di m : infatti sia σ un automorfismo di H su K tale che $\sigma(m_2) = m_1$ (vedi [10] teor. 10.12); allora $\sigma(a) \notin m_1$, $\sigma(a) \in A'$ e quindi $m_1 \cap A' \neq \neq (m_1) \cap A'$.

Siano $m'_0, m'_1, \dots, m'_n$ i primi distinti di A' al di sopra di m . Sia G il gruppo di Galois di L su K ; come è noto si definisce gruppo di decomposizione di $m' = m'_0$ il sottogruppo G' di G così definito:

$$G' = \{\sigma \in G \mid \sigma(m') = m'\};$$

si definisce poi l'anello di decomposizione $\tilde{A}$ e il corpo di decomposizione $\tilde{K}$ di m' come segue

$$\tilde{A} = \{x \in A' \mid \sigma(x) = x \text{ per ogni } \sigma \in G'\},$$

$$\tilde{K} = \{x \in L \mid \sigma(x) = x \text{ per ogni } \sigma \in G'\}.$$

Si ha $\tilde{A} = A' \cap \tilde{K}$ e $\tilde{A}$ è la chiusura integrale di A in $\tilde{K}$.

Sia p' un massimale di $\tilde{A}$ che contiene $m' \cap \tilde{A}$; allora p' non contiene nessun primo $m'_j \cap \tilde{A}$ ($1 \leq j \leq n$) perchè $\tilde{A}_{p'}$ è un anello di valutazione (vedi [11] pag. 158 cor. 4); allora si ha $p' \not\supset m'_1 \cap \dots \cap m'_n \cap \tilde{A}$ e quindi esiste un elemento $a \in \tilde{A}$ tale che $a \notin p'$, $a \in m'_j$ ($1 \leq j \leq n$).

Per [9] lemma 2 a è una radice di un polinomio monico irriducibile

$$X^{n+1} - a_1 X^n - \dots - a_{n+1} = 0,$$

con $a_2, \dots, a_n \in m$, $a_1 \in A$, $a_1 \equiv a(m' \cap \tilde{A})$; è allora $a_1 \notin p$ essendo $p = p' \cap A$ il massimale di A e ciò è contro l'ipotesi che (A, m) sia una coppia henseliana: infatti il polinomio di cui sopra si decompone, modulo m , in due fattori monici e coprimi.

TEOREMA 3. *Sia A un anello di valutazione ed m un suo ideale primo. Posto $B = {}^n(A, m)$ si ha $B_{mB} = {}^n(A_m)$.*

DIM. Per il teorema 2 $B_{\mathfrak{m}B}$ è un anello locale henseliano e quindi esiste un omomorfismo $f: {}^h(A_{\mathfrak{m}}) \rightarrow B_{\mathfrak{m}B}$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & & {}^h(A_{\mathfrak{m}}) \\ & \nearrow & \downarrow f \\ A_{\mathfrak{m}} & & B_{\mathfrak{m}B} \\ & \searrow & \end{array}$$

Consideriamo ora gli omorfismi di coppie

$$(A, \mathfrak{m}) \begin{array}{l} \nearrow (B, \mathfrak{m}B) \\ \searrow (A_{\mathfrak{m}}, \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}) \rightarrow ({}^h(A_{\mathfrak{m}}), \mathfrak{m}{}^h(A_{\mathfrak{m}})) \end{array}.$$

Si ha che esiste un omomorfismo

$$\varphi: (B, \mathfrak{m}B) \rightarrow ({}^h(A_{\mathfrak{m}}), \mathfrak{m}{}^h(A_{\mathfrak{m}})),$$

che fa commutare il precedente diagramma.

Dal fatto che ogni ideale principale di B è generato da un elemento di A segue che gli elementi di $B - \mathfrak{m}B$ hanno per immagine elementi invertibili in ${}^h(A_{\mathfrak{m}})$ ed inoltre φ è iniettivo. Ne segue allora che φ induce un omomorfismo locale e iniettivo

$$g: B_{\mathfrak{m}B} \rightarrow {}^h(A_{\mathfrak{m}});$$

l'omomorfismo g è tale che nel diagramma

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A_{\mathfrak{m}} \\ & \nearrow \alpha & \searrow \beta \\ & & B_{\mathfrak{m}B} \\ & & \downarrow g \\ & & {}^h(A_{\mathfrak{m}}) \end{array}$$

sia $g\alpha i = \beta i$, ma essendo i cancellabile a destra segue $g\alpha = \beta$.

Consideriamo adesso $gf: {}^h(A_{\mathfrak{m}}) \rightarrow {}^h(A_{\mathfrak{m}})$; esso fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & & {}^h(A_{\mathfrak{m}}) \\ & \nearrow & \downarrow \\ A_{\mathfrak{m}} & & {}^h(A_{\mathfrak{m}}) \\ & \searrow & \end{array}$$

e quindi gf è l'identità in ${}^h(A_{\mathfrak{m}})$ da cui segue che g è suriettivo e quindi la tesi.

Richiamiamo adesso la definizione di corpo valutato henseliano (vedi [11] cap. F).

DEFINIZIONE 1. *Un corpo valutato (K, v) si dice henseliano se v ammette un unico prolungamento ad ogni estensione algebrica di K .*

Da [11] teor. 4 pag. 185, segue subito che un corpo valutato (K, v) è henseliano se e solo se l'anello della valutazione v è un anello locale henseliano.

Si ha poi (vedi [11] pag. 175) che ad ogni corpo valutato (K, v) si può associare la sua henselizzazione $({}^hK, {}^hv)$; confrontando la costruzione dell'henselizzazione di un corpo valutato (K, v) con quella dell'henselizzazione di un anello locale (vedi [10] pag. 180) si ha subito che l'anello della valutazione hv di hK è l'henselizzazione hA dell'anello della valutazione v .

Si ha allora il seguente teorema.

TEOREMA 4. *Sia A un anello di valutazione, $B = {}^h(A, m)$ con m ideale primo di A . Siano $K_A \subset K_B$ i rispettivi corpi delle frazioni. Se v_A (risp. v_B) è una valutazione di K_A (risp. K_B) di anello A (risp. B) si ha:*

- a) *se v è una valutazione di K_B di anello B_{mB} allora (K_B, v) è henseliano;*
- b) *(K_B, v) è l'henselizzazione di $(K_A, v/K_A)$ dove v/K_A è la restrizione di v a K_A ed ha come anello A_m ;*
- c) *se w è una valutazione del corpo A_m/mA_m di anello A/m allora la valutazione v_B di K_B è equivalente alla composizione della valutazione v con la valutazione w .*

DIM. a) e b) seguono rispettivamente dai teoremi 2 e 3; c) segue dal fatto che $A/m \cong B/mB$ e quindi il corpo A_m/mA_m coincide col corpo residuo di v .

3. In questo numero studiamo l'henselizzazione di un anello di Prüfer. Richiamiamo alcune definizioni.

DEFINIZIONE 2. *Un dominio A si dice un anello di Prüfer se A_p è un anello di valutazione per ogni ideale massimale p di A .*

DEFINIZIONE 3. *Un dominio A si dice un anello quasi-Dedekind se A_p è un anello di valutazione noetheriano per ogni ideale massimale p di A .*

DEFINIZIONE 4. *Un dominio A si dice un anello di Dedekind se A è un anello di Prüfer noetheriano.*

PROPOSIZIONE 2. *Sia $\varphi: A \rightarrow B$ un omomorfismo di anelli tale che B sia una A -algebra fedelmente piatta. Se B è un anello di Prüfer (risp. quasi-Dedekind, Dedekind) allora A è di Prüfer (risp. quasi-Dedekind, Dedekind).*

DIM. Poichè φ è iniettivo A è un dominio. Sia $\mathfrak{p}$ un massimale di A ; esiste allora un massimale $\mathfrak{p}$ di B tale che $\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \cap A$; si ha allora un omomorfismo $A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$ e $B_{\mathfrak{p}}$ è una $A_{\mathfrak{p}}$ -algebra fedelmente piatta. Per la proposizione 1 se $B_{\mathfrak{p}}$ è di valutazione anche $A_{\mathfrak{p}}$ è di valutazione e quindi se B è di Prüfer anche A è di Prüfer. Osservando poi che la noetherianità discende per fedele piatezza segue la proposizione.

TEOREMA 5. *Sia A un anello e $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$ con $\mathfrak{m}$ ideale di A . Si ha:*

- a) Se B è un anello di Prüfer (risp. quasi-Dedekind, Dedekind) ed è $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$, allora A è un anello di Prüfer (risp. quasi-Dedekind, Dedekind).*
- b) Se A è un anello di Prüfer (risp. quasi-Dedekind, Dedekind) e $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$ è connesso allora B è di Prüfer (risp. quasi-Dedekind, Dedekind).*

DIM. *a)* segue dalla proposizione 3. Per dimostrare *b)* osserviamo intanto che, per [8] cor. 2.12, si ha che B è un dominio; la tesi segue allora dal teorema 1 applicando [5] cor. 6.9 e cor. 7.5.

OSSERVAZIONE 1. L'ipotesi « $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$ connesso » è necessaria affinché B sia un dominio e non può essere soppressa. Infatti $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$ è connesso se e solo se $\text{Spec } B$ è connesso (vedi [5] lemma 9.1).

Il resto del presente numero è dedicato alla dimostrazione del successivo teorema 6 nel quale proviamo che se A è un anello di Prüfer e $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$ è connesso allora ogni ideale di $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$ è l'esteso di un ideale di A . Dal teorema 6 dedurremo poi alcuni corollari.

Premettiamo alcuni lemmi.

LEMMA 1. *Sia A un anello, $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$, C una N -estensione semplice di $(A, \mathfrak{m})$ e sia $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{m}$ un primo di A . Allora $\mathfrak{p}C$ è un primo di C al di sopra di $\mathfrak{p}$.*

DIM. Dal fatto che C è una A -algebra fedelmente piatta segue che esiste un primo $\mathfrak{q}$ di C al di sopra di $\mathfrak{p}$. Dall'isomorfismo $A/\mathfrak{m} \cong C/\mathfrak{m}C$ segue poi $\mathfrak{p}C = \mathfrak{q}$.

LEMMA 2. Sia A un anello, $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$, C una N -estensione semplice di $(A, \mathfrak{m})$. Siano $\mathfrak{p}_1$ e $\mathfrak{p}_2$ due massimali di A e poniamo $S = A - (\mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2)$ e $S' = C - (\mathfrak{p}_1 C \cup \mathfrak{p}_2 C)$. Allora $C_{S'}$ è una N -estensione semplice di $(A_S, \mathfrak{m}A_S)$.

DIM. Sia $f(X)$ l' N -polinomio, di grado $n > 1$, che definisce C ; allora $f(X)$ è un N -polinomio di $(A_S, \mathfrak{m}A_S)$ ed indichiamo con D l' N -estensione semplice di $(A_S, \mathfrak{m}A_S)$ definita da $f(X)$. Posto

$$A[X]/f(X) A[X] = A[x]$$

si ha

$$C = A[x]_{1 + (\mathfrak{m}, x)A[x]} \quad \text{e} \quad D = (A_S[x])_{1 + (\mathfrak{m}, x)A_S[x]}.$$

Consideriamo gli ideali $(\mathfrak{p}_1, x)A[x]$ e $(\mathfrak{p}_2, x)A[x]$ di $A[x]$: si vede subito che essi sono ideali massimali di $A[x]$ al di sopra rispettivamente di $\mathfrak{p}_1$ e $\mathfrak{p}_2$. Poniamo

$$T = A[x] - ((\mathfrak{p}_1, x)A[x] \cup (\mathfrak{p}_2, x)A[x])$$

e facciamo vedere che D e $C_{S'}$ sono entrambi isomorfi ad $A[x]_T$. Per provare che D è isomorfo ad $A[x]_T$ poniamo $U = 1 + (\mathfrak{m}, x)A_S[x]$; si ha $D = (A_S[x])_U$; per una nota proprietà (vedi [2] cap. II par. 2 n. 3, prop. 7), essendo $S \subset T$ è $A[x]_T = (A_S[x])_{T'}$ dove T' è l'immagine di T nell'omomorfismo $A[x] \rightarrow A_S[x]$; quindi D e $A[x]_T$ sono i localizzati di $A_S[x]$ mediante rispettivamente U e T' .

Poichè gli elementi di T sono del tipo $a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ con $a_0 \in S$ segue subito che le immagini degli elementi di T' nell'omomorfismo $A_S[x] \rightarrow (A_S[x])_U$ sono invertibili e le immagini degli elementi di U nell'omomorfismo $A_S[x] \rightarrow A[x]_T$ sono invertibili e quindi $D \cong A[x]_T$.

Per provare che $C_{S'}$ è isomorfo ad $A[x]_T$ poniamo $V = 1 + (\mathfrak{m}, x) \cdot A[x]$; si ha $C_{S'} = (A[x]_V)_{S'}$ e $A[x]_T = (A[x]_V)_{T''}$ dove T'' è l'immagine di T nell'omomorfismo $A[x] \rightarrow A[x]_V$. La dimostrazione è allora analoga alla precedente.

LEMMA 3. Sia A un anello di Prüfer. Allora:

- a) l'insieme dei primi contenuti in $\text{Rad } A$ è linearmente ordinato per inclusione.
- b) l'insieme dei primi contenuti in $\text{Rad } A$ ha un (unico) elemento massimo.

DIM. a) sia $\mathfrak{p}$ un ideale massimale di A ; è noto che c'è una corrispondenza 1-1 che conserva l'inclusione tra i primi di $A_{\mathfrak{p}}$ e i primi di A contenuti in $\mathfrak{p}$; poichè $A_{\mathfrak{p}}$ è un anello di valutazione segue la tesi. b) infatti l'unione di un insieme linearmente ordinato di ideali primi di A è ancora un ideale primo di A .

LEMMA 4. *Sia A un anello di Prüfer semilocale, $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$, e sia $\mathfrak{p}$ il massimo primo contenuto in $\text{Rad } A$. Allora $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$ è connesso se e solo se $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$.*

DIM. Sia $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$ connesso. Se fosse $\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{p}$ seguirebbe che non ci sono primi di A tra $\mathfrak{m}$ e $\text{Rad } A$ e quindi $\text{Spec}(A/\mathfrak{m}) = \text{Spec}(A/\text{Rad } A)$ non sarebbe connesso.

Viceversa sia $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$. Sia $\mathfrak{q}$ un primo di A e supponiamo $\mathfrak{q} \not\subset \mathfrak{p}$; detto $\mathfrak{q}'$ un massimale di A contenente $\mathfrak{q}$ è anche $\mathfrak{q}' \supset \mathfrak{p}$, ed essendo l'insieme dei primi di A contenuti in $\mathfrak{q}'$ linearmente ordinato per inclusione segue $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$. Consideriamo allora $\sqrt{\mathfrak{m}}$: è

$$\sqrt{\mathfrak{m}} = \bigcap_i \mathfrak{q}_i,$$

con $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}_i \supset \mathfrak{m}$, ma poichè l'intersezione di un insieme linearmente ordinato di ideali primi è un ideale primo segue che $\sqrt{\mathfrak{m}}$ è primo e quindi $\text{Spec}(A/\mathfrak{m}) = \text{Spec}(A/\sqrt{\mathfrak{m}})$ è connesso.

LEMMA 5. *Sia A un anello di Prüfer, $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$, $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$ connesso, e sia C una N -estensione semplice di $(A, \mathfrak{m})$. Sia $\mathfrak{p}_1$ un massimale di A e poniamo $S = A - \mathfrak{p}_1$. È allora $C_S = C_{\mathfrak{p}_1 C}$.*

DIM. Basta provare che C_S è locale. È noto che i massimali di C_S sono gli estesi dei primi di C che sono massimali fra quelli che non incontrano S . Uno di tali primi è $\mathfrak{p}_1 C$ e quindi $\mathfrak{p}_1 C_S$ è massimale in C_S ; sia $\mathfrak{q}$ un altro di tali primi e sia $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q} \cap A \subset \mathfrak{p}_1$; sia $\mathfrak{p}_2 C$ un massimale di C che contiene $\mathfrak{q}$. Per il lemma 2 possiamo supporre che A abbia i due soli massimali $\mathfrak{p}_1$ e $\mathfrak{p}_2$. Proviamo adesso che $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ è massimale fra i primi di A contenuti in $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$; infatti è noto che $C_{\mathfrak{p}_2 C}$ è una N -estensione semplice di $A_{\mathfrak{p}_2}$ (ciò segue anche dal lemma 2 per $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$) ed $A_{\mathfrak{p}_2}$ è un anello di valutazione e quindi, applicando il teorema 1, segue che c'è una corrispondenza 1-1 tra i primi di A contenuti in $\mathfrak{p}_2$ e i primi di C contenuti in $\mathfrak{p}_2 C$; si ha allora che, se $\mathfrak{p}$ fosse un primo di A con $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$, esisterebbe un primo $\mathfrak{p}'$ di C tale che $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$ ed inoltre $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}_2 C$.

Per il lemma 4 si ha $q_1 \supset m$. Dal lemma 1 segue allora che l'ideale $q_1 C$ è un primo di C tale che $q_1 C \cap A = q_1$ e $q_1 C \subset p_2 C$: per lo stesso motivo di sopra è allora $q = q_1 C$ da cui segue $q = q_1 C \subset p_1 C$ e quindi è $q = p_1 C$.

TEOREMA 6. *Sia A un anello di Prüfer, m un ideale di A con $\text{Spec}(A/m)$ connesso e $B = {}^n(A, m)$. Si ha allora:*

- a) Per ogni ideale b di B esiste un ideale α di A tale che $b = \alpha B$.*
- b) Se b è principale allora α è principale.*

DIM. *a)* Se consideriamo A_{1+m} si ha che $m A_{1+m} \subset \text{Rad } A_{1+m}$ ed ogni ideale di A_{1+m} è l'esteso di un ideale di A ; possiamo quindi supporre $m \subset \text{Rad } A$. Possiamo ancora supporre che b sia un ideale principale bB di B .

Sia C una N -estensione semplice di (A, m) e supponiamo di aver dimostrato che ogni ideale di C sia l'esteso di un ideale di A ; segue allora che se C è una N -estensione di (A, m) allora ogni ideale di C è l'esteso di un ideale di A ; sia ora $b \in B$ e sia C una N -estensione di (A, m) che contiene b ; esiste allora un ideale α di A tale che $\alpha C = bC$ e quindi $\alpha B = bB$.

Possiamo quindi supporre che B sia una N -estensione semplice di (A, m) . Proviamo che per ogni massimale p di A è

$$(bB \cap A) B_{pB} = bB_{pB},$$

da cui segue

$$(bB \cap A) B = bB,$$

(vedi [1] prop. 3.9).

Per il corollario 1 l'ideale bB_{pB} è generato da un elemento di A_p e quindi possiamo porre

$$bB_{pB} = aB_{pB},$$

con $a \in A$.

È allora $a = bc$ con $c \in B_{pB}$ invertibile.

Per il lemma 5 possiamo scrivere $c = r/s$, $r \in B$, $s \in A - p$. Allora è $as = br \in bB$ e quindi $as \in bB \cap A$; inoltre è $aB_{pB} = asB_{pB}$ e quindi segue

$$bB \subset (bB \cap A) B_{pB},$$

e quindi *a)* è provato.

Per dimostrare *b*) osserviamo che, essendo B una A -algebra fedelmente piatta (possiamo anche in questo caso supporre $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$) e $\alpha B = \mathfrak{b}$ un B -modulo finitamente generato, segue che α è un A -modulo finitamente generato. Da $A/\mathfrak{m} \cong B/\mathfrak{m}B$ segue poi

$$\alpha/\mathfrak{m}\alpha \cong \alpha \otimes A/\mathfrak{m} \cong \alpha \otimes B/\mathfrak{m}B \cong \mathfrak{b}/\mathfrak{m}\mathfrak{b},$$

ma $\mathfrak{b}/\mathfrak{m}\mathfrak{b}$ è generato da un solo elemento come $B/\mathfrak{m}B$ -modulo e quindi come $A/\mathfrak{m}$ -modulo e quindi come A -modulo.

Applicando il lemma di Nakayama all' A -modulo finitamente generato α segue subito che α è principale.

OSSERVAZIONE 2. Il teorema 6 non vale più se si toglie l'ipotesi che A sia un anello di Prüfer, come mostra il seguente esempio: sia $A = K[X, Y]_{(X, Y)}$ dove K è un corpo; è noto che hA è il sottoanello di $K[[X, Y]]$ costituito dalle serie formali che sono algebriche su $K(X, Y)$ (vedi [10] cor. 44.3). Consideriamo l'ideale $\alpha = (X^3 + Y^2 + XY)A$; esso è generato da un elemento irriducibile di A e quindi è primo; l'esteso ${}^h\alpha$ non è più primo in quanto l'elemento $X^3 + Y^2 + XY$ è riducibile in hA .

COROLLARIO 2. Sia A un anello di Prüfer, $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$, $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$ connesso e sia $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$. Si ha allora:

a) Le applicazioni

$$\alpha \mapsto \alpha B \quad \alpha \text{ ideale di } A$$

$$\mathfrak{b} \mapsto \mathfrak{b} \cap A \quad \mathfrak{b} \text{ ideale di } B$$

stabiliscono una biiezione fra gli ideali di A e gli ideali di B . Tale biiezione induce una biiezione fra i primi di A e quelli di B , come pure una biiezione fra gli ideali principali di A e quelli di B .

b) Per ogni famiglia $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ di ideali di A si ha

$$\left(\bigcap_i \alpha_i \right) B = \bigcap_i \alpha_i B.$$

DIM. *a)* Bisogna solo provare che se $\mathfrak{p}$ è un primo di A allora $\mathfrak{p}B$ è un primo di B . Infatti poichè B è una A -algebra fedelmente piatta esiste un primo $\mathfrak{q}$ di B tale che $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ e quindi per il teorema 6 segue $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}B$.

b) Poniamo $\bigcap_i \alpha_i B = \alpha B$ con α ideale di A . Da $\alpha B \subset \alpha_i B$ segue $\alpha \subset \alpha_i$ e quindi $\alpha B \subset \left(\bigcap_i \alpha_i\right) B$.

COROLLARIO 3. *Sia A un anello di Prüfer, $\mathfrak{m}$ ideale di A con $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$ connesso e sia $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$. Allora la funzione continua*

$$\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A,$$

indotta dall'omomorfismo $A \rightarrow B$ è un omeomorfismo fra $\text{Spec } B$ e il sottospazio di $\text{Spec } A$ costituito dai primi di A che non incontrano $1 + \mathfrak{m}$.

Nel caso che sia $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$ allora si tratta di un omeomorfismo fra $\text{Spec } B$ e $\text{Spec } A$.

DIM. La dimostrazione è immediata per il corollario 2a).

COROLLARIO 4. *Sia A un anello di Prüfer, $\mathfrak{m}$ un ideale di A con $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$ connesso e sia $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$. Allora l'omomorfismo fra i gruppi*

$$\text{Pic } A \rightarrow \text{Pic } B,$$

indotto dall'omomorfismo $A \rightarrow B$ è suriettivo e, se $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$, è un isomorfismo.

DIM. Per la definizione di $\text{Pic } A$ rimandiamo a [2] cap. II par. 5 n. 4. Ricordiamo che essendo A e B domini il gruppo di Picard è isomorfo al gruppo delle classi di ideali frazionari invertibili. Osserviamo poi che, per $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$, la biiezione fra gli ideali di A e quelli di B data nel corollario 2a) si estende, in modo ovvio, ad una biiezione fra gli ideali frazionari di A e quelli di B e quest'ultima induce una biiezione fra gli ideali frazionari invertibili di A e quelli di B .

Richiamiamo adesso la definizione di anello di Bézout.

DEFINIZIONE 5. *Un dominio A si dice un anello di Bézout se ogni ideale finitamente generato di A è principale.*

COROLLARIO 5. *Sia A un anello e $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$ con $\mathfrak{m}$ ideale di A . Si ha:*

- a) *Se B è un anello di Bézout (risp. PID) ed è $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$ allora A è di Bézout (risp. PID).*
- b) *Se A è un anello di Bézout (risp. PID) ed è $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$ connesso allora B è di Bézout [risp. PID].*

DIM. La tesi segue dal corollario 4 ricordando che un anello A è di Bézout se e solo se esso è un anello di Prüfer e $\text{Pic } A = 0$: infatti un anello di Prüfer è un dominio caratterizzato dal fatto che ogni ideale finitamente generato non nullo è invertibile (vedi [7] teor. 6.6) e la condizione $\text{Pic } A = 0$ per un dominio è equivalente al fatto che ogni ideale invertibile è principale. Inoltre ricordiamo che un dominio A è un PID (dominio a ideali principali) se e solo se A è un anello di Bézout noetheriano.

OSSEVAZIONE 3. Osserviamo che *non* è vero che se $A \rightarrow B$ è un omomorfismo di anelli tale che B sia una A -algebra fedelmente piatta allora se B è un anello di Bézout (risp. PID) segue che A è un anello di Bézout (risp. PID). Basta prendere come A e B l'anello delle coordinate del cerchio rispettivamente su $\mathbf{R}$ e su $\mathbf{C}$. Si ha che B è PID mentre A è un anello di Dedekind non PID (vedi [6] pag. 50).

COROLLARIO 6. *Sia A un anello di Prüfer, $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$, $\text{Spec } (A/\mathfrak{m})$ connesso e sia $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$. Allora la biiezione fra gli ideali di A e quelli di B data nel corollario 2a) induce un isomorfismo fra i semi-gruppi con unità*

$$D(A) \simeq D(B),$$

dei divisori rispettivamente di A e di B .

DIM. Per la definizione di $D(A)$ si veda, per esempio [7] pag. 172. Osserviamo adesso che dal corollario 2b) segue che la biiezione fra gli ideali di A e quelli di B induce una biiezione fra gli ideali divisoriali di A e quelli di B . Si prova poi facilmente che tale biiezione conserva il prodotto fra ideali divisoriali cioè è un isomorfismo fra $D(A)$ e $D(B)$.

4. In questo numero mettiamo in relazione gli anelli di valutazione henseliani con quelli completi (per il completamento di un anello di valutazione si veda [3] cap. VI par. 5 n. 3 oppure [11] cap. D).

È noto che se un anello di valutazione di rango 1 è completo allora esso è henseliano (vedi [11] pag. 198 teor. 4).

Proviamo anzitutto che il completamento $\hat{A}$ di un anello di valutazione A henseliano è ancora un anello di valutazione henseliano. Questa proprietà, nel caso che la topologia canonica su A abbia una base numerabile degli intorno dello zero, segue da [12] prop. 7: infatti, secondo la nozione di terna henseliana introdotta da Valabrega, $\hat{A}$ risulta l'henselizzazione della terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ con $\mathfrak{m}$ massimale di A e τ topologia canonica di A .

PROPOSIZIONE 3. *Se A è un anello di valutazione henseliano allora $\hat{A}$ è pure henseliano.*

DIM. Sia K il corpo delle frazioni di A e v una valutazione di K di anello A e sia $\mathfrak{m}$ il massimale di A ; sia poi $\hat{K}$ il corpo delle frazioni di $\hat{A}$ (che è il completamento di K per la topologia indotta da v) e $\hat{v}$ l'estensione canonica di v a $\hat{K}$. Sia K^* la chiusura algebrica di $\hat{K}$ e sia v^* un'estensione di $\hat{v}$ a K^* ; siano poi A^* e $\mathfrak{m}^*$ rispettivamente l'anello e l'ideale di v^* . Osserviamo che se Γ è il gruppo dei valori di v (e quindi di $\hat{v}$), il gruppo dei valori Γ^* di v^* è il gruppo divisibile generato da Γ (vedi [11] pag. 155 prop. 1) e quindi è un gruppo ordinato cofinale a Γ (cioè per ogni $\alpha \in \Gamma^*$ esiste $\beta \in \Gamma$ con $\beta > \alpha$). Sia poi $\tilde{v}$ l'estensione naturale di $\hat{v}$ a $\hat{K}(X)$ definita da

$$\tilde{v}(b_0 + \dots + b_n X^n) = \min_{0 \leq i \leq n} \{\hat{v}(b_i)\}.$$

Sia ora $f(X) \in \hat{A}[X]$ un N -polinomio di $(\hat{A}, \hat{\mathfrak{m}})$. Si vede subito che esiste una famiglia $f_\varepsilon(X) \in A[X]$ ($\varepsilon \in \Gamma$, $\varepsilon > 0$) di N -polinomi di $(A, \mathfrak{m})$ tali che

$$\lim f_\varepsilon(X) = f(X)$$

nella topologia di $\hat{K}(X)$ indotta da $\hat{v}$.

Sia α_1 l'unica radice di $f(X)$ che sta in $\mathfrak{m}^*$ e $\alpha_1^{(e)}$ l'unica radice di $f_\varepsilon(X)$ che sta in $\mathfrak{m}$. Proviamo che è $\alpha_1 = \lim \alpha_1^{(e)}$ nella topologia di K^* indotta da v^* da cui segue $\alpha_1 \in \hat{K}$.

Poniamo

$$f(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$$

$$f_\varepsilon(X) = a_0^{(e)} + a_1^{(e)} X + \dots + a_{n-1}^{(e)} X^{n-1} + X^n = (X - \alpha_1^{(e)}) \dots (X - \alpha_n^{(e)});$$

si ha $v^*(f_\varepsilon(\alpha_1)) = v^*(\alpha_1 - \alpha_1^{(e)})$ in quanto $\alpha_1 - \alpha_i^{(e)}$ è invertibile in A^* per $i = 2, \dots, n$.

Ma è anche

$$v^*(f_\varepsilon(\alpha_1)) = v^*(f_\varepsilon(\alpha_1) - f(\alpha_1)) = v^*\left(\sum_{i=0}^{n-1} (a_i - a_i^{(e)}) (\alpha_1)^i\right) \geq$$

$$\min_{0 \leq i \leq n-1} \{v^*(a_i - a_i^{(e)}) + i v^*(\alpha_1)\} \geq \min_{0 \leq i \leq n-1} \{i v^*(\alpha_1)\} + \tilde{v}(f(X) - f_\varepsilon(X)).$$

Allora si ha che, fissato $\delta \in \Gamma$, $\delta > 0$ esiste $\gamma \in \Gamma$, $\gamma > 0$ tale che se $\tilde{v}(f(X) - f_\varepsilon(X)) > \gamma$ si ha $v^*(\alpha_1 - \alpha_1^{(e)}) > \delta$, da cui la tesi.

Portiamo adesso due controesempi riguardo alla henselizzazione di anelli di valutazione completi. Nel primo mostriamo che se A è un anello di valutazione completo, hA non è necessariamente completo (escluso il caso in cui A sia di rango 1 nel qual caso si ha $A = {}^hA$). Nel secondo mostriamo che hA può essere completo senza che A sia completo. Ci servirà la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 4. *Sia (K, v) un corpo valutato henseliano con v di rango 1; sia L una estensione algebrica separabile di K di grado infinito; allora L non è completo per il prolungamento di v ad L .*

DIM. Seguiamo il suggerimento di [3] cap. VI par. 8 esercizio 16.

Indichiamo ancora con v il prolungamento di v ad L (unico perchè (K, v) è henseliano). Prendiamo $x_1 = 1$; supposto di aver scelto x_i scegliamo x_{i+1} in L soddisfacente alle seguenti condizioni:

$$a) [K(x_{i+1}):K] > [K(x_i):K] \qquad b) v(x_{i+1} - x_i) > \alpha(i)$$

con

$$\alpha(i) = \max\{v(x_i^{(1)} - x_i), \dots, v(x_i^{(r)} - x_i), v(x_i - x_{i-1}), i\},$$

dove $x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(r)}$ sono i coniugati di x_i rispetto a K distinti da x_i . Proviamo che tale x_{i+1} esiste: sia $y \notin K(x_i)$; posto $K(z) = K(y, x_i) \supset K(x_i)$ ed inoltre $[K(z):K] > [K(x_i):K]$; prendiamo allora z in modo che sia $K(z) \supset K(x_i)$ e $[K(z):K] > 2[K(x_i):K]$.

Possiamo inoltre supporre $v(z) > \alpha(i)$: basta fissare $a \in K$ con $v(a) > 0$ e prendere n opportunamente grande in modo che sia $v(za^n) > \alpha(i)$. Poniamo $x_{i+1} = x_i + z$; si ha $[K(x_{i+1}):K] > [K(x_i):K]$; infatti se $f(X) \in K[X]$ fosse un polinomio monico di grado $n \leq [K(x_i):K]$ tale che $f(x_{i+1}) = 0$ allora $f(x_i + T)$ sarebbe un polinomio monico di grado n in $K(x_i)[T]$ tale che $f(x_i + z) = 0$ e ciò è contro il fatto che sia $[K(z):K(x_i)] > [K(x_i):K]$. Proviamo ora che la successione $x_1, x_2, \dots$ è di Cauchy: bisogna provare che per ogni intero $m > 0$ esiste un intero $n > 0$ tale che per $t > s \geq n$ sia $v(x_t - x_s) > m$; è infatti

$$v(x_t - x_s) = v(x_t - x_{t-1} + \dots + x_{s+1} - x_s) = v(x_{s+1} - x_s) > s$$

e quindi basta prendere $n = m$.

Proviamo adesso che la successione $x_1, x_2, \dots$ non ha limite; se

fosse $\lim x_i = x$, considerato $v(x_{i+1} - x_i)$ esisterebbe un indice $j > i$ tale che $v(x - x_j) > v(x_{i+1} - x_i)$; si avrebbe allora

$$v(x - x_i) = v(x - x_j + x_j - x_{j-1} + \dots + x_{i+1} - x_i) = v(x_{i+1} - x_i)$$

e quindi sarebbe

$$v(x - x_i) > \max\{v(x_i^{(1)} - x_i), \dots, v(x_i^{(r)} - x_i)\};$$

per il lemma di Krasner (vedi [11] pag. 190) si avrebbe allora $K(x_i) \subset K(x)$ e ciò per $i = 1, 2, \dots$ e ciò contro la condizione a).

ESEMPIO 1. *Esempio di un anello di valutazione A completo tale che hA non sia completo.*

Sia R un corpo e poniamo $K = R(Y)((X))$ e sia v una valutazione di K il cui anello è $A = R[Y]_{(Y)} + XR(Y)[[X]]$; v è una valutazione il cui gruppo dei valori è $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e, detto $\mathfrak{p}$ il primo di altezza 1 di A , è $A/\mathfrak{p} = R[Y]_{(Y)}$ e $A_{\mathfrak{p}} = R(Y)[[X]]$. Ne segue che (K, v) è completo (perchè $A_{\mathfrak{p}}$ è un DVR completo) ma non henseliano (perchè $A/\mathfrak{p}$ non è henseliano). Consideriamo $({}^hK, {}^hv)$; si vede facilmente che hK è di grado infinito su K ; applicando allora la proposizione 4 al corpo K munito della valutazione $v_{\mathfrak{p}}$ il cui anello è $A_{\mathfrak{p}}$ (rispetto alla valutazione $v_{\mathfrak{p}}$ il corpo K è henseliano) otteniamo che hK non è completo rispetto al prolungamento di $v_{\mathfrak{p}}$ (che ha come anello ${}^hA_{\mathfrak{p}}, {}^hA$) e quindi hA non è completo.

ESEMPIO 2. *Esempio di un anello di valutazione discreta A non completo tale che hA è completo.*

Sia R un corpo di caratteristica zero e poniamo $K = R(X)$ e $L = R((X))$ muniti entrambi della valutazione X -adica, denotata con v , di anello rispettivamente $R[X]_{(X)}$ e $R[[X]]$. Si ha che (K, v) non è henseliano perchè l'equazione $T^2 + T + X = 0$ non ha radici in K , mentre (L, v) è completo; siano c_1 e $c_2 \in R[[X]]$ le radici della precedente equazione con $c_1 + c_2 = -1$. Sia H un corpo massimale fra quelli che soddisfano alle condizioni: $K \subset H \subset L$ e $c_1, c_2 \notin H$; tale corpo esiste per il lemma di Zorn. Indichiamo ancora con v la restrizione di v da L ad H e sia A l'anello di v in H . Proviamo che è ${}^hA = R[[X]]$; per provare ciò basta provare che L è algebrico su H (vedi [11] cor. 2 pag. 190); sia $x \in L$, $x \notin H$; per la massimalità di H si ha $c_1 \in H(x)$ da cui, essendo c_1 algebrico su H , segue che x è algebrico su H .

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. F. ATIYAH - I. G. MACDONALD, *Introduction to Commutative Algebra*, Addinon-Wesley, Reading, Mass., 1969.
- [2] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, Capitoli I, II, Hermann, Paris, 1961.
- [3] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, Capitoli V, VI, Hermann, Paris, 1964.
- [4] S. GRECO, *Qualche condizione di henselianità per anelli non locali*, Le Matematiche, **22** (1967), 340-359.
- [5] S. GRECO, *Henselization of a ring with respect to an ideal*, Transaction A.M.S., **144** (1969), 43-65.
- [6] S. GRECO - P. SALMON, *Topics on m-adic topologies*, Springer-Verlag, Berlino, 1971.
- [7] M. D. LARSEN - P. J. MCCARTHY, *Multiplicative theory of ideals*, Academic Press, New York, 1971.
- [8] F. MORA, *Permanenza di proprietà nella henselizzazione degli anelli non noetheriani*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova (in corso di stampa).
- [9] M. NAGATA, *On the theory of henselian rings*, Nagoya Math. J., **5** (1953), 45-57.
- [10] M. NAGATA, *Local rings*, Interscience Publ., New York, 1962.
- [11] P. RIBEMBOIM, *Théorie des valuations*, Les Presses de l'Université de Montréal, 1964.
- [12] P. VALABREGA, *Proprietà dell'henselizzazione di anelli topologici e di valutazione*, Symposia Mathematica, **8** (1972), 393-403.

Manoscritto pervenuto in redazione il 31 gennaio 1974 e in forma revisionata il 28 febbraio 1974.