

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

PIERGIULIO CORSINI

Sur les homomorphismes d'hypergroupes

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 52 (1974), p. 117-140

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__52__117_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__52__117_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur les homomorphismes d'hypergroupes.

PIERGIULIO CORSINI (*)

SOMMAIRE - Soient G et G' deux groupes ordonnés, $\mathcal{H}(G)$ et $\mathcal{H}(G')$ les hypergroupes associés à G et G' : on étudie les homomorphismes $f: \mathcal{H}(G) \rightarrow \mathcal{H}(G')$ lorsque G est complètement décomposable.

SOMMARIO - Siano G e G' due gruppi ordinati, $\mathcal{H}(G)$ e $\mathcal{H}(G')$ gli ipergruppi associati a G e G' : si studiano gli omomorfismi $f: \mathcal{H}(G) \rightarrow \mathcal{H}(G')$ quando G è completamente decomponibile.

Introduction.

Un hypergroupe de dimension n , peut être considéré comme une structure douée d'une relation $(2 + n)$ -aire R telle que $R(x_1, x_2, y_1, y_2, \dots, y_n)$ entraîne $R(x_1, x_2, y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n})$ pour quelconque permutation $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ et qui satisfait certaines conditions; les homomorphismes entre hypergroupes sont alors des applications f telles que: $R(x_1, x_2, y_1, y_2, \dots, y_n)$ entraîne

$$R(f(x_1), f(x_2), f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_n))$$

ou ce qui revient au même:

$$f(x_1 \circ x_2) \subset f(x_1) \circ f(x_2) .$$

(*) Indirizzo dell'A.: Ist. di Matematica, Università, Via L. B. Alberti 4, 16132 Genova, Italia.

Travail accompli dans la sphère du G.N. Strutt. Alg. Geom. du C.N.R.

On appelle ces applications homomorphismes d'hypergroupes. Le principal sujet de ce travail est justement l'étude de ces homomorphismes quand les hypergroupes sont des *sd-h*, et le domain est complètement décomposable. Quelques remarques du point de vue de l'algèbre universelle et des résultats sur les homomorphismes entre les $C(n)$ (quotients de $\mathcal{H}(\mathbb{Z})$) concluent le travail.

Chapitre 0.

On appelle hypergroupe de dimension n un ensemble non vide H doué d'une hyper-opération qui associe à tout couple $(x, y) \in H \times H$ un sous-ensemble de H noté $x \circ y$ tel que :

- 1) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \quad \forall x, \forall y, \forall z,$
- 2) $\exists e \in H : e \circ x \ni x, \quad x \circ e \ni x \quad \forall x,$
- 3) $\forall x \exists x' : x \circ x' \ni e, \quad x' \circ x \ni e,$
- 4) $n \geq \overline{x \circ y} \geq 1 \quad \forall x, \forall y.$

Si H_1 e H_2 sont deux hypergroupes, on dit qu'une application $f: H_1 \rightarrow H_2$ est un homomorphisme si

$$\forall x, \forall y, \quad f(x \circ y) \subset f(x) \circ f(y)$$

on dit que un homomorphisme f est faible si $\exists x, \exists y : f(x \circ y) \neq f(x) \circ f(y)$ ⁽¹⁾. Si G est un groupe abélien totalement ordonné on a montré (voir [2]) que son cône positif $G^+ = \{x \in G | x \geq 0\}$ a une structure d'hypergroupe de dimension 2 par rapport à l'hyper-opération $x \circ y = \{x + y, |x - y|\}$. On l'a appelé *sd-hypergroupe* et noté $\mathcal{H}(G)$. Enfin, pour quelconque entier $n > 0$, $C(n)$ désignera le quotient $\mathcal{H}(\mathbb{Z})/\mathcal{H}(n\mathbb{Z})$

THÉORÈME 0. Si G est un groupe abélien sans torsion et $H_1 = \mathcal{H}(G_1)$, $H_2 = \mathcal{H}(G_2)$ deux *sd.h.* dans $\mathcal{H}[G]$ ⁽²⁾; alors H_1 e H_2 sont isomorphes.

⁽¹⁾ Dans [2] on avait appelé homomorphismes les applications f telles que $f(x \circ y) = f(x) \circ f(y)$.

⁽²⁾ On rappelle que $\mathcal{H}[G]$ dénote la famille des *sd.h.* associés à G pour tout ordre total de G .

Soit $f: H_1 \rightarrow H_2$ l'application définie de la façon suivante

$$f(x) = x \quad \text{si } x \in G_2^+$$

$$f(x) = -x \quad \text{si } x \in G_2^-$$

on peut toujours vérifier qu'on a

$$f(x \circ y) = f(x) \circ f(y) .$$

Chapitre 1.

Soit $\mathcal{H}(G)$ un $sd\text{-}h$ où $r(G) = 1$.

On peut supposer $G \subset \mathbf{Q}$, en plus on peut toujours se réduire par isomorphisme au cas: $1 \in G$.

Soit $f: \mathcal{H}(G) \mapsto \mathcal{H}(G')$ un homomorphisme et soit $f(1) \neq 0$, alors il y a trois possibilités

$$1) f(2) = 0$$

$$2) f(2) \neq 0, f(4) = 0$$

$$3) f(4) \neq 0$$

On verra qu'il n'y a en a pas d'autres.

LEMME 1. Si $f(4) = 0$ et p et q sont impairs, on a

$$\text{I) } f(4k/q) = 0 \quad \forall k,$$

$$\text{II) } f(p/q) = f(1) ,$$

$$\text{III) } f(2p/q) = f(2) .$$

Si x est un élément d'un hypergroupe H et n est un entier ≥ 1 on note par $\prod_n x$ l'hyper-produit n fois dans H de x .

Alors: $\prod_a f(4k/q) \ni f(4k) = 0$ d'où on obtient $0 = sf(4k/q), \forall s \in \{m \in 2N + 1 | m \leq q\}$ donc $f(4k/q) = 0$.

Pour II) on doit remarquer qu'on a:

$$p \circ q \cap 4N \neq \emptyset$$

et ensuite:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) \circ f(1) \ni 0.$$

De la même façon la preuve de III).

On sait que deux groupes sans torsion de rang 1 sont isomorphes si et seulement si ils ont le même type (voir [4] théorème 42.2 pag 149).

Alors du lemme précédent il suit que pour étudier les homomorphismes tels que $f(4) = 0$, on peut se limiter, si on note par $h(2)$, la hauteur de 1 respect à 2, aux cas suivants:

$$1) \ h(2) = 0, \ 2) \ h(2) = \infty$$

LEMME 2. Les conditions suivantes sont équivalentes

$$a) \ h(2) = 0$$

$$b) \text{ si } x = p/(2^s q) \text{ où } s \geq 1, \text{ p.g.c.d. } (p, q) = 1 \text{ et } \{p, q\} \subset 2N + 1, \\ \text{ alors } x \notin \mathcal{K}(G).$$

Il suit tout de suite du théorème de Bezout.

THÉOREME 1. Soit $h(2) = 0$. Les homomorphismes $f: \mathcal{K}(G) \rightarrow \mathcal{K}(G')$ tels que $f(4) = 0$, sont les applications définies par les conditions I), II), III), du lemme 1 et de plus par une des suivantes: IV₁) $f(2) = 0$, IV₂) $f(2) = 2f(1)$.

Il suffit de vérifier que si f est défini dans les façons susdites, on a

$$f(x \circ y) \subset f(x) \circ f(y) \quad \forall x \in \mathcal{K}(G), \quad \forall y \in \mathcal{K}(G).$$

$$\text{Posons } f(1) = v$$

LEMME. Les conditions suivantes sont équivalentes

$$1) \ f(4) \neq 0$$

$$2) \ f(3) = 3v$$

$$3) \ f(n) = nv \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

$$4) \ f(x \circ y) = f(x) \circ f(y) \quad \forall x \in \mathbf{N}, \forall y \in \mathbf{N}.$$

Il suffit de voir $2 \Rightarrow 3$, on le prouve par induction: soit $n \geq 4$ et

$$f(k) = kv, \quad \forall k < n; \quad \text{on a:} \quad f(n) \in f(n-1) \circ f(1) \cap f(n-2) \circ f(2),$$

il suit

$$f(n) \in \{nv, (n-2)v\} \cap \{(n-4)v, nv\}$$

d'où la thèse.

THÉORÈME 2. Les conditions suivantes sont équivalentes

$$1) f(3) = 3v$$

$$2) f(m/q) = (m/q)v, \quad \forall m/q \in \mathcal{H}(G).$$

Remarquons d'abord que si $m/q \in \mathcal{H}(G)$ et p.g. c.d. $(m, q) = 1$, alors: $1/q \in \mathcal{H}(G)$. On a évidemment $f(1/q) \neq 0$ et $f(2/q) \neq 0$, en étant $v \neq 0$, et par conséquent $f(2q) = 2f(1/q)$. Il en suit $f(3/q) = 3f(1/q)$ puisque si il fût $f(3/q) = f(1/q)$, il suivra $f(4/q) = 2f(1/q)$.

Par induction, comme pour le lemme, on obtient: $f(m/q) = mf(1/q)$ d'où $f(1/q) = (1/q)v$ et par conséquent

$$f\left(\frac{m}{q}\right) = \frac{m}{q} v.$$

Notons par $(k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)$ le type de 1 dans G (k_1 est la classe d'équivalence de $h(2)$) et par $(k'_1, k'_2, \dots, k'_n, \dots)$ le type de $v = f(1)$ dans G' .

COROLLAIRE. Si $f(3) = 3v$, on a $k_n \leq k'_n, \forall n$.

THÉORÈME 3. Si $k_1 = \infty$, on a $f(3) = 3v$, c'est à dire si $h(2) = \infty$ il n'y a pas d'homomorphismes tels que $f(4) = 0$.

En effet par hypothèse $1/2^s \in G, \forall s \geq 1$ et on a $f(\frac{1}{2}) = v/2$ d'où par induction $f(1/2^s) = v/2^s$, en particulier $f(\frac{1}{4}) = v/4$, par conséquent: $f(k/4) = kf(\frac{1}{4}) = (k/4)v, \forall k$; alors $f(4) = f(16\frac{1}{4}) = 4v$, c.q.f.d.

Chapitre 2.

Considérons maintenant les homomorphismes faibles f avec domaine $H = \mathcal{H}(\bigoplus_{k \in K} G_k)$ où $\text{rang } G_k = 1 \quad \forall k$ et supposons qu'il y ait dans

H des éléments $e_k \in G_k$, $\forall k \in K$, tels que $f(e_k) \neq 0$, de plus soit $K \supset K' \supset I$, $f(4e_k) = 0$, $\forall k \in K'$, $f(2e_i) = 0 \quad \forall i \in I$, $f(2e_k) \neq 0 \quad \forall k \in K - I$, $K - I \neq \emptyset$

LEMME 1. Soient $I_1 \subset I$, $\bar{I}_1 < \infty$, $k \in K - I$, on a alors

$$f\left(\left|\sum_{i \in I_1} \varepsilon_i e_i + \varepsilon_k e_k\right|\right) = f(e_k) \quad \text{où } \varepsilon_j \in \{1, -1\} \quad \forall j$$

En effet:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i \in I_1} e_i + e_k\right) \circ f\left(\left|\sum_{i \in I_1} \varepsilon_i e_i + \varepsilon_k e_k\right|\right) &= \\ &= \left\{2f\left(\sum_{i \in I_1} e_i + e_k\right), 0\right\} = \left\{2f\left(\left|\sum_{i \in I_1} \varepsilon_i e_i + \varepsilon_k e_k\right|\right), 0\right\} = \{2f(e_k), 0\} \end{aligned}$$

LEMME 2. $\forall i \in I$, $\forall k \in K - I$ on a:

$$f(e_i) = 2f(e_k)$$

L'identité $f(e_i + e_k) = f(e_k)$ entraîne

$$f(e_i + e_k) \circ f(e_k) = \{2f(e_k), 0\},$$

mais

$$f(e_i + e_k) \circ f(e_k) \ni f(e_i) \neq 0$$

d'où la thèse.

On notera par la suite $f(e_i) = 2f(e_k) = 2w$.

LEMME 3. Si $\{i, i'\} \subset I$, alors

$$f(e_i + e_{i'}) = f(|e_i - e_{i'}|) = 0$$

On a $f(e_i + e_{i'}) \in \{4w, 0\}$, mais $\forall k \in K - I$ on a aussi $f(e_i + e_{i'} + e_k) = w$, d'où par conséquent $f(e_i + e_{i'}) \in \{0, 2w\}$ d'où la thèse.

LEMME 4 Si $h \in K' - I$ et $k \in K - I$ on a $f(2e_h + 2e_k) = 0$ et $f(4e_k) = 0$

$$f(2e_h + e_k) \circ f(2e_h + e_k) \ni 2f(e_k)$$

par conséquent:

$$f(e_k) = f(2e_h + e_k) \in 2f(e_h) \circ f(e_k)$$

d'où $f(e_k) = f(e_h) = w$.

On a aussi $f(2e_h + 2e_k) \in f(2e_h + e_k) \circ f(e_k) = \{2w, 0\}$ et de plus: $f(2e_h + 2e_k) \in \{4w, 0\}$ d'où il suit la première identité.

Enfin $f(4e_k) = f(4e_h + 4e_k) \in f(2e_h + 2e_k) \circ f(2e_h + 2e_k) = 0$.

LEMME 5. Si $I \neq \emptyset$, alors $\forall j \in K - I, \forall k \in K - I$ on a: $f(2e_j + 2e_k) = 0 = f(|2e_j - 2e_k|)$, en particulier $f(4e_k) = 0 \quad \forall k \in K$. Si $f(e_j + e_k) = 0$ on en déduit tout de suite $f(2e_j + 2e_k) = 0$.

Soit alors $f(e_j + e_k) \neq 0$ et par conséquent $f(e_j + e_k) = 2w$; de plus en tout cas, on a, $\forall i \in I: f(e_i + e_j + e_k) = \{2w, 0\}$, mais l'hypothèse $f(e_j + e_k) \neq 0$ entraîne $f(e_i + e_j + e_k) \in \{4w, 0\}$, donc $f(e_i + e_j + e_k) = 0$ D'autre part

$$f(2e_j + 2e_k) = f(2e_i + 2e_j + 2e_k) \in f(e_i + e_j + e_k) \circ f(e_i + e_j + e_k),$$

d'où nous obtenons enfin $f(2e_j + 2e_k) = 0$.

COROLLAIRE. $K' \neq \emptyset$ entraîne $K' = K$.

Il descend tout de suite des lemmes 4 et 5. On supposera dans la suite de ce chapitre $K' \neq \emptyset$ et on écrira J au lieu de $K - I$.

LEMME 6. Soient $p_i \in \mathbf{Z}, \forall i \in I_1$, alors, si $\sum_{i \in I_1} p_i \in 2\mathbf{Z}$, on a

$$f\left(\left|\sum_{i \in I_1} p_i e_i\right|\right) = 0, \quad \text{si } \sum_{i \in I_1} p_i \in 2\mathbf{Z} + 1, \quad \text{on a } f\left(\left|\sum_{i \in I_1} p_i e_i\right|\right) = 2w$$

Il suit des lemmes 2 et 3

LEMME 7. $\forall j \in J, \forall k \in J$ on a:

$$f(e_j + e_k) = 0 \Leftrightarrow f|e_i - e_j| \neq 0 \Leftrightarrow f|e_i - e_j| = 2w$$

LEMME 8. Si $\{j, h, k\} \subset J$, on a:

$$f(e_j + e_h + e_k) = w$$

Il suit des lemmes 4 et 5

LEMME 9. Si $B = \{j, k\} \subset J$, on a :

$$f(e_j + e_k) = 0$$

si et seulement si $\forall h \in J$, il existe $u \in B$ tel que :

$$f(e_u + e_h) = 0 \quad \text{et} \quad f(e_{B-\{u\}} + e_h) \neq 0 .$$

Il suit du lemme 7

LEMME 10. Soit

$$F(q) = \{j_1, j_2, \dots, j_q\} \subset J \quad \text{et} \quad f(e_{j_h} + e_{j_k}) \neq 0, \quad \forall h, \forall k .$$

On obtient des lemmes 2, 4, 5, 8 que $f\left(\sum_{h=1}^q e_{j_h}\right)$ dépend seulement de q pour que soit satisfaite la condition susdite, donc on peut poser

$$f\left(\sum_{h=1}^q e_{j_h}\right) = S(q) .$$

De lemmes 4 et 5 on deduit encore que si $q = 4d + r(q)$ où $0 \leq r(q) < 4$, on a

$$S(q) = S(r(q))$$

de plus, si on pose $S(0) = 0$, on a $\forall k, S(|4k|) = 0, S(|4k \pm 1|) = w, S(|4k + 2|) = 2w$.

LEMME 11. Dans les memes hypothèses que dans le lemma 10 on peut poser $\forall i \in I$

$$f\left(e_i + \sum_{j \in F(q)} e_j\right) = s(q+1) .$$

En effet, de la démonstration du lemme 5 découle $s(3) = 0$; d'où $s(q+1) = S(q-2)$, et puisque $S(q) = S(q+4)$, on a

$$s(q+1) = S(q+2) \quad \forall q \geq 0$$

LEMME 12. Posons $A(i, j) = f(e_i + e_j)$. Soit

$$\begin{aligned} \{j_1, j_2, \dots, j_s\} \subset J, \quad A(j_1, j_2) = A(j_1, j_3) = \dots = \\ = A(j_1, j_s) = 0, \quad A(j_1, j_s) \neq 0 \quad \text{si } s > p \end{aligned}$$

et $\{h, k\} \not\equiv 1$.

Alors: si $h \leq p$ et $k \leq p$, ou $h > p$ et $k > p$, on a $A(j_h, j_k) = 2w$; si $h > p$ et $k \leq p$, on a $A(j_h, j_k) = 0$.

Il suit du lemme 9.

THÉOREME 1. Soit

$$x \in \mathcal{H}(G), \quad x = \sum_{i \in I_1} p_i e_i + \sum_{j \in J_1} q_j e_j$$

où $p_i \in \mathbf{Z}$, $\forall i$, $q_j \in \mathbf{Z}$, $\forall j$, $I_1 \subset I$, $\bar{I}_1 < \infty$

$$J_1 = \{j_1, j_2, \dots, j_m, j_{m+1}, \dots, j_n\} \subset J$$

et $A(j_1, j_s) = 0$ si $1 < s \leq m$, $A(j_1, j_s) \neq 0$ si $s > m$; Alors $f(x) \in \{0, w, 2w\}$.

Posons $\theta(x) = 0$ si $\sum_{i \in I_1} p_i \in 2\mathbf{Z}$, $\theta(x) = 1$ si $\sum_{i \in I_1} p_i \in 2\mathbf{Z} + 1$

et $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Soit $\bar{i}$ un élément quelconque de I_1 et $\bar{j}$ un élément quelconque de J_1 .

On a alors:

$$x \sim \theta(x) e_{\bar{i}} + \sum_{j \in J_1} q_j e_j \sim \theta(x) e_i + \left| q_{j_1} + \sum_{s > m} q_{j_s} - \sum_{1 < t \leq m} q_{j_t} \right| e_j,$$

donc si $\theta(x) = 0$, alors

$$f(x) = s \left| q_{j_1} + \sum_{s > m} q_{j_s} - \sum_{1 < t \leq m} q_{j_t} \right|,$$

si $\theta(x) = 1$,

$$f(x) = s \left(1 + \left| q_{j_1} + \sum_{s > m} q_{j_s} - \sum_{1 < t \leq m} q_{j_t} \right| \right).$$

La seule chose à démontrer est que $S \left| q_{j_1} + \sum_{s>m} q_{j_s} - \sum_{1<t\leq m} q_{j_t} \right|$ ne dépend pas de j_1 .

En effet si on prend j_h avec $1 < h \leq m$, au lieu de j_1 on déduit du lemme 12:

$$x \sim \theta(x) e_{\bar{i}} + (q_{j_h} - q_{j_1} - q_{j_{m+1}} \dots - q_{j_n}) e_{j_h} + \\ + \sum_{\substack{s \leq m \\ s \notin \{1, h\}}} q_{j_s} e_{j_s} \sim \theta(x) e_{\bar{i}} + \left| \sum_{1 < s \leq m} q_{j_s} - q_{j_1} - \sum_{t > m} q_{j_t} \right| e_{\bar{j}};$$

si $h > m$ on a de même:

$$x \sim \theta(x) e_{\bar{i}} + \left| \sum_{t > m} q_{j_t} - \sum_{1 < s \leq m} q_{j_s} + q_{j_1} \right| e_{\bar{j}}.$$

On peut poser alors

$$\left| q_{j_1} + \sum_{t > m} q_{j_t} - \sum_{1 < s \leq m} q_{j_s} \right| = Q(x)$$

d'où $f(x) = S(Q(x) + 1 - (-1)^{\theta(x)})$.

REMARQUE. Si on note par $H(e)$ le sous-hypergroupe de H engendré par la famille $(e_k)_{k \in K}$, l'application $Q: H(e) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbf{Z})$ qu'on a définie avant, satisfait la condition: $Q(x \circ y) = Q(x) \circ Q(y)$.

De plus S et θ peuvent-être décomposés de la façon suivante: $S = \mu \pi_4$ où $\pi_4: \mathcal{H}(\mathbf{Z}) \rightarrow C(4)$ est la projection canonique et $\mu: C(4) \rightarrow \mathcal{H}(G')$ est défini: $\mu(E_k) = kw$, où $C(4) = \{E_0, E_1, E_2\}$ et satisfait la condition $\mu(E_h \circ E_k) \subset \mu(E_h) \circ \mu(E_k)$, $\theta = \lambda \pi_2 P$ où $P: H(e) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbf{Z})$ est défini: $P(x) = \left| \sum_{i \in I_1} p_i \right|$ et satisfait la condition $P(x \circ y) = P(x) \circ P(y)$; $\pi_2: \mathcal{H}(\mathbf{Z}) \rightarrow C(2)$ est la projection canonique et $\lambda: C(2) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbf{Z})$ est définie $\lambda(F_h) = h$ où $\{F_0, F_1\} = C(2)$ et satisfait la condition: $\lambda(F_h \circ F_k) \subset \lambda(F_h) \circ \lambda(F_k)$.

De théorème 1 et de la Remarque on obtient le suivant

THÉOREME 2. Soit $H(e)$ le sd -hypergroupe associé à un groupe libre ordonné qui a une base $e = (e_k)_{k \in K}$, et soit $f: H(e) \rightarrow \mathcal{H}(G')$ un homomorphisme tel que, pour quelque $h \in K$ on a: $f(2e_h) \neq 0$, $f(4e_h) = 0$; alors l'image de f est une sous-structure de $\mathcal{H}(G')$ isomorphe à $C(4)$.

On peut vérifier que l'inverse du th. 2 vaut autant, c'est à dire, employant les mêmes notations on a le

THÉOREME 3. Soit w un élément quelconque d'un sd - $\mathcal{H}$ $\mathcal{H}(G')$, soit J une partie non vide de K et $I = K - J$. Posons $L = (J \times J)/_R$ où R est l'équivalence $(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow \{x, y\} = \{x', y'\}$.

Soit $D(L)$ l'image dans L par la projection canonique de la diagonale de $J \times J$ et M une partie de L , qui contient $D(L)$ et telle que, si on pose $N = L - M$ et si $R(h, k)$ est la classe déterminée par le couple (h, k) , on ait

$$R(h, k) \in N \Leftrightarrow \forall j \in J, \quad \overline{\{R(h, j), R(k, j)\}} \cap N = 1.$$

Si $x = \sum_{i \in T} a_i e_i$ est un élément quelconque de $H(e)$, soient $I_1 = T \cap I$,

$$J_1 = T \cap J = \{j_1, j_2, \dots, j_m, j_{m+1}, \dots, j_n\} \text{ où } \{(j_1, j_s) | 1 < s \leq m\} \subset N$$

et $\{R(j_1, j_t) | t > m\} \subset M$ alors si on définit

$$f(x) = \mu \pi_4(Q(x) + 1 - (-1)^{\theta(w)}),$$

f est un homomorphisme faible de $H(e)$ dans $\mathcal{H}(G')$ tel que $f(4e_k) = 0$, $\forall k \in K$.

THÉOREME 1'. Pour tout homomorphisme faible du type considéré $f: \mathcal{H}(G) \rightarrow \mathcal{H}(G')$, il existe $w \in \mathcal{H}(G')$ tel que pour tout élément $x \in \mathcal{H}(G)$, on a: $f(x) \in \{0, w, 2w\}$.

Par les hypothèses faites sur les G_i , tout élément x de $\mathcal{H}(G)$ peut être représenté de la façon suivante

$$x = \sum_{i \in J_1} \frac{m_i}{p} 2^{r_i} e_i \quad \text{où} \quad J_1 \subset K, \quad \bar{J}_1 < \aleph_0$$

$$h_2(e_i) = 0, \quad \forall i, \quad \{m_i, p\} \subset 2\mathbb{Z} + 1, \quad \forall i, \quad r_i \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall i.$$

Soit $J_1 = K_0 \cup K_1 \cup K_2$, où

$$K_0 = \{i \in J_1 | r_i = 0\}, \quad K_1 = \{i \in J_1 | r_i = 1\}, \quad K_2 = \{i \in J_1 | r_i \geq 2\}.$$

Si on pose

$$x_0 = \sum_{i \in K_0} \frac{m_i}{p} 2^{r_i} e_i, \quad x_1 = \sum_{i \in K_1} \frac{m_i}{p} 2^{r_i} e_i,$$

nous avons $f(x) = f(x_0 + x_1)$.

On montrera maintenant que si

$$y = \sum_{i \in J_1} m_i 2^{r_i} e_i, \quad \text{on a:} \quad f(x) = f(y)$$

d'où suivra le théorème.

En effet: $f(x) \circ f(y) = f(x_0 + x_1) \circ f(y) \supset f((x_0 + x_1) \circ y) = \{\lambda, \mu\}$ où

$$\begin{aligned} \lambda &= f \left(\sum_{i \in K_0} \left(\frac{m_i p - m_i}{p} \right) e_i + \sum_{j \in K_1} \frac{2(m_j p - m_j)}{p} e_j \right) \\ \mu &= f \left(\sum_{i \in K_0} \left(\frac{m_i p + m_i}{p} \right) e_i + \sum_{j \in K_1} \left(\frac{2(m_j p + m_j)}{p} \right) e_j \right): \end{aligned}$$

on a: $\{2(m_j p - m_j), 2(m_j p + m_j)\} \subset 4\mathbf{Z}$, $\forall j$, il en suit:

$$\lambda = f \left(\sum_{i \in K_0} \left(\frac{m_i p - m_i}{p} \right) e_i \right), \quad \mu = f \left(\sum_{i \in K_0} \left(\frac{m_i + m_i p}{p} \right) e_i \right).$$

De plus on peut remarquer:

$$\{m_i p - m_i, m_i p + m_i\} \cap 4\mathbf{Z} \neq \emptyset, \quad \forall i;$$

alors, si par exemple, pour un i' , $m_{i'} p - m_{i'} \in 4\mathbf{Z}$, on en déduit $p - 1 \in 4\mathbf{Z}$ d'où: $m_i p - m_i \in 4\mathbf{Z}$, $\forall i$, et, par conséquent $\lambda = 0$. Donc $f(y) = f(x)$.

Par les th. 1, 3, 1', on peut conclure avec le résultat suivant:

THÉORÈME 3'. Si on pose $\forall x \in \mathcal{H}(G)$

$$f(x) = \mu \pi_4(Q(y) + 1 - (-1)^{\theta(y)})$$

où y est défini de la même façon que dans le th. 1', alors f est un homomorphisme faible de $\mathcal{H}(G)$ dans $\mathcal{H}(G')$ tel que $f(4e_k) = 0$, $\forall k \in K$.

Chapitre 3.

Soit I un ensemble, soient $I(m) = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ une partie à m éléments de I et $C_n(I(m))$ l'ensemble des parties $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ à n éléments de $I(m)$. Soit encore $f: H(e) \rightarrow \mathcal{H}(G')$ un homomorphisme

tel que $f(e_j) = v_j \neq 0, \forall j \in I$. Si on pose $A(i_1, i_2, \dots, i_m) = f\left(\sum_{k=1}^m e_{i_k}\right)$, on a

$$A(i_1, i_2, \dots, i_m) = \sum_{k=1}^m \alpha_{i_k}^{i_1, \dots, i_m} v_{i_k}$$

où $\alpha_{i_k}^{i_1, \dots, i_m} \in \{1, -1\} \quad \forall k$

DÉFINITION. On dit que les v_{i_k} sont indépendents si: $\forall \{j_1, \dots, j_n\} \in \mathbb{C}_n(I(m))$

$$\sum_{k=1}^n a_k v_{j_k} = \sum_{k=1}^n b_k v_{j_k} \quad (\text{où } \forall k \{a_k, b_k\} \subset \{1, -1\})$$

entraîne $a_k = b_k, \forall k$

PROPOSITION. Si les v_{i_k} sont indépendents, $\forall n \leq m$

$$\forall \{j_1, \dots, j_n\} \in \mathbb{C}_n(I(m))$$

on a:

$$\alpha_{j_h}^{j_1, \dots, j_n} \alpha_{j_k}^{j_1, \dots, j_n} = \alpha_{j_h}^{j_h, j_k} \alpha_{j_k}^{j_h, j_k} \quad \forall h \leq n, \quad \forall k \leq n, \quad h \neq k.$$

En effet, puisque f est un homomorphisme si

$$\{i_1, \dots, i_m\} = \{j_1, \dots, j_m\},$$

on a

$$A(i_1, i_2, \dots, i_m) \in A(j_1, j_2, \dots, j_n) \circ A(j_{n+1}, \dots, j_m).$$

Il en suit qu'il existe $\{\gamma, \delta\} \subset \{1, -1\}$ tel que

$$\sum_{t=1}^m \alpha_{i_t}^{i_1, \dots, i_m} v_{i_t} = \gamma \left(\sum_{t \leq n} \alpha_{j_t}^{j_1, \dots, j_n} v_{j_t} \right) + \delta \left(\sum_{t > n} \alpha_{j_t}^{j_{n+1}, \dots, j_m} v_{j_t} \right)$$

on en deduit $\forall h \leq n, \forall k \leq n$

$$\alpha_{j_h}^{i_1, \dots, i_m} = \gamma \alpha_{j_h}^{j_1, \dots, j_n}, \quad \alpha_{j_k}^{i_1, \dots, i_m} = \gamma \alpha_{j_k}^{j_1, \dots, j_n}$$

d'où $\forall h \leq n, \forall k \leq n$

$$\alpha_{j_h}^{i_1, \dots, i_m} \alpha_{j_k}^{i_1, \dots, i_m} = \alpha_{j_h}^{j_1, \dots, j_n} \alpha_{j_k}^{j_1, \dots, j_n}$$

de même si $h > n$.

COROLLAIRE 1. Soit $n \in 2N$ et posons

$$\lambda_n(i_1, i_2, \dots, i_m) = \prod_{\{j_1, \dots, j_n\} \in \mathbb{C}_n(I(m))} \prod_{k=1}^n \alpha_{j_k}^{j_1, \dots, j_n}$$

alors, si

$$\binom{m}{n} \frac{n}{m} \in 2N, \quad \text{on a:} \quad \lambda_n(i_1, \dots, i_m) = 1,$$

si

$$\binom{m}{n} \frac{n}{m} \in 2N + 1, \quad \text{on a:} \quad \lambda_n(i_1, \dots, i_m) = \prod_{k=1}^m \alpha_{i_k}^{i_1, \dots, i_m}.$$

Il suffit de remarquer

$$\lambda_n(i_1, \dots, i_m) = \prod_{\{j_1, \dots, j_n\} \in \mathbb{C}_n(I(m))} \prod_{k=1}^n \alpha_{j_k}^{i_1, \dots, i_m} = \left(\prod_{k=1}^m \alpha_{i_k}^{i_1, \dots, i_m} \right)^{\binom{m}{n} \frac{n}{m}}.$$

On obtient en particulier le suivant

COROLLAIRE 2. Si $m \in 2N + 1$, on a

$$\prod_{\{i_h, i_k\} \in \mathbb{C}_2 I((m))} \alpha_{i_h}^{i_h, j_k} \alpha_{i_k}^{i_h, i_k} = 1$$

Si $m \in 2N$:

$$\prod_{\{i_h, i_k\} \in \mathbb{C}_2 I(m)} \alpha_{i_h}^{i_h, i_k} \alpha_{i_k}^{i_h, i_k} = \prod_{k=1}^m \alpha_{i_k}^{i_1, i_2, \dots, i_m}.$$

On notera $\mathbb{C}_n(I)$ l'ensemble des parties de I à n éléments et E le sous-ensemble de $H(e)$ défini par

$$E = \left\{ x = \sum_{k=1}^n e_{i_k} \mid n \in N, \{i_1, i_2, \dots, i_n\} = I(n) \in \mathbb{C}_n(I) \right\}$$

LEMME. Pour toute fonction $f: E \rightarrow \mathcal{H}(G')$, on a exactement un homomorphisme $f^*: H(e) \rightarrow \mathcal{H}(G')$ tel que $f(2e_i) = 0$, $\forall i \in I$ si et seulement si la suivante condition est vérifiée:

$$(F) \quad \forall m < \aleph_0, \quad m \leq \bar{I}, \quad \forall I(m) = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}, \\ \forall I(p) = \{h_1, h_2, \dots, h_p\}, \quad \forall I(q) = \{k_1, k_2, \dots, k_q\}$$

tels qu'il existe $0 \leq s \leq p$, $0 \leq t \leq q$ de sorte que :

$$(a) \quad s + t = m ,$$

$$(b) \quad p - s = q - t ,$$

$$(c) \quad I(m) = \{h_1, h_2, \dots, h_s, k_1, k_2, \dots, k_t\} ,$$

$$(d) \quad I(p) - \{h_1, \dots, h_s\} = I(q) - \{k_1, \dots, k_t\} ,$$

on a $A(i_1, i_2, \dots, i_m) \in A(h_1, \dots, h_p) \circ A(k_1, \dots, k_q)$.

D'abord il est evident que tout homomorphisme satisfait (F); il suffit alors de prouver que si (F) est vérifiée, f definit un homomorphisme f^* . Soient

$$U \subset I, \quad \bar{U} < \aleph_0, \quad x = \sum_{u \in U} a_u e_u \in H(e) \quad \text{et} \quad y = \sum_u a'_u e_u \in H(e)$$

Soit $\sigma(a) = 0$ si $a \in 2\mathbf{Z}$, $\sigma(a) = 1$ si $a \in 2\mathbf{Z} + 1$. On pose

$$H = \{u | \sigma(a_u) = 1\} = \{h_1, h_2, \dots, h_p\}$$

$$K = \{u | \sigma(a'_u) = 1\} = \{k_1, k_2, \dots, k_q\}$$

et

$$L = H \cup K - H \cap K = \{h_1, h_2, \dots, h_s, k_1, k_2, \dots, k_t\} .$$

Définissons $f^*(x) = f\left(\sum_u \sigma(a_u) e_u\right) \quad \forall x$, d'où $f^*(y) = f\left(\sum_u \sigma(a'_u) e_u\right)$.
On a alors

$$\begin{aligned} f^*(x \circ y) &= f^*\left\{\sum_u (a_u + a'_u) e_u, \left|\sum_u e_u (a_u - a'_u)\right|\right\} = \\ &= f\left(\sum_u \sigma(a_u + a'_u) e_u\right) = f\left(\sum_{i \in L} e_i\right) \quad \text{puisque} \quad L = \{u | \sigma(a_u) \neq \sigma(a'_u)\} . \end{aligned}$$

En étant par hypothèse

$$A(h_1, h_2, \dots, h_p) \circ A(k_1, k_2, \dots, k_q) \ni A(h_1, \dots, h_s, k_1, \dots, k_t)$$

on obtient

$$\begin{aligned} f^*(x) \circ f^*(y) &= f\left(\sum_{h \in H} \sigma(a_h) e_h\right) \circ f\left(\sum_{k \in K} \sigma(a'_k) e_k\right) = \\ &= A(h_1, \dots, h_p) \circ A(k_1, \dots, k_a) \ni f\left(\sum_{i \in L} e_i\right) = f^*(x \circ y). \end{aligned}$$

On supposera dorénavant dans ce chapitre $f(2e_i) = 0, f(e_i) = v_i \neq 0, \forall i \in I$.

REMARQUE. Avec les mêmes notations du th. 1', on voit que $\forall x \in \mathcal{K}(G)$, si on pose $x = x_0 + 2z$ où $z = \sum_{j \in K_1 \cup K_2} (q_j/p) e_j$ on a: $f(x) = f(x_0) = f\left(\sum_{i \in K_0} m_i e_i\right)$, $m_i \in \mathbb{Z}$, d'où on peut se limiter dans la suite au cas $\mathcal{K}(G) = H(e)$.

THÉOREME 1. (1) Si $I = \{e_1\}$, pour tout homomorphisme faible f tel que $f(e_1) = v, f(2e_1) = 0$, on a $\forall m \in \mathbb{N}, f(me_1) = f(\sigma(m)e_1)$.

Viceversa $\forall v \in \mathcal{K}(G')$, la fonction $f(e_1) = v, f(0) = 0, f(m) = f(\sigma(m)e_1)$ est un homomorphisme faible

(2) Soit $I = \{e_1, e_2\}$,

Pour chaque couple (v_1, v_2) d'éléments de $\mathcal{K}(G')$ on a exactement deux homomorphismes f_1, f_2 tels que $f_j(e_i) = v_i, f_j(2e_i) = 0, \forall i, \forall j$.

Ils sont définis respectivement:

$$\begin{aligned} f_1(e_1 + e_2) &= v_1 + v_2, \quad f_1(m_1 e_1 + m_2 e_2) = f_1(\sigma(m_1) e_1 + \sigma(m_2) e_2), \quad f_1(0) = 0 \\ f_2(e_1 + e_2) &= |v_1 - v_2|, \quad f_2(m_1 e_1 + m_2 e_2) = f_2(\sigma(m_1) e_1 + \sigma(m_2) e_2), \quad f_2(0) = 0 \end{aligned}$$

Dans ces cas il suffit de vérifier que la condition (F) est satisfaite $\forall (v_1, v_2) \in (\mathcal{K}(G'))^2$

COROLLAIRE 1. On a évidemment dans (1) $f(H(e)) \simeq C(2)$; dans (2) $f(H(e)) \simeq (C(2))^2$ à moins que $f(e_1 + e_2) = 0$; en ce cas: $f(H(e)) \simeq C(2)$

(3) Si $I \geq 3$, il n'y a pas d'homomorphismes tels que $v_i \neq 0, \forall i \in I, f(2e_i) = 0, \forall i \in I$, si les v_i sont indépendents.

On a $f\left(\sum_u m_u e_u\right) = f\left(\sum_u \sigma(m_u) e_u\right) = f\left(\sum_{i \in L} e_i\right)$. Si $L = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, on

a déjà remarqué $A(i_1, \dots, i_n) = \sum_{k=1}^n \alpha_{i_k}^{i_1, \dots, i_n} v_{i_k}$ où $\alpha_{i_k}^{i_1, \dots, i_n} \in \{1, -1\} \forall k$.

Soit $I(3) = \{i_1, i_2, i_3\} \subset I$. Du lemme il suit, pour toute permutation (i, j, k) de $I(3)$, $A(i, j) \circ A(j, k) \ni A(i, k)$; ceci entraîne $\prod_{s \neq t} \alpha_s^{s, t} \alpha_t^{s, t} = -1$, donc du corollaire 2 on déduit la thèse

COROLLAIRE 2. Du théorème précédent et du th. 2 ch. II on déduit en particulier que $C(2)$, $C(4)$, $C(2)^2$ on peut les étendre a des sd -h, au contraire ce n'est pas possible pour $C(2)^m$ si $m \geq 3$.

Soit $m \geq 3$, soit K une sous-structure de $\mathcal{H}(G)$ et supposons par absurde qu'il existe un isomorphisme $\varphi: C(2)^m \xrightarrow{\sim} K \subset \mathcal{H}(G)$; soit $\varepsilon_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in C(2)^m$, $\forall j \in I_m = \{1, 2, \dots, m\}$ et $B(J) = \varphi\left(\sum_{j \in J} \varepsilon_j\right)$, $\forall J \subset I_m$.

Définissons $f': \mathcal{H}(Z^m) \rightarrow K$, $f'\left(\sum_i p_i e_i\right) = B(J)$ où $J = \{i | \theta(p_i) = 1\}$.

Alors si u est l'injection naturelle $u: K \rightarrow \mathcal{H}(G)$, $f = uf'$ est un homomorphisme entre sd -h tel que $A(J) = B(J)$, $\forall J \subset I_m$. Si on prend $J = \{j_1, j_2, j_3\}$, où $h \neq k \Rightarrow j_h \neq j_k$, alors du th. 2 il descend qu'il existe $J' \subset J$ ($|J'| > 1$) tel que $A(J') = 0$, mais $A(J') = \varphi\left(\sum_{j \in J'} \varepsilon_j\right)$ qui est différent du zero tout en étant φ un isomorphisme ⁽¹⁾.

Soit $I = \{e_1, e_2, e_3\}$; l'hypothèse $v_i \neq 0$, $\forall i$, et le corollaire précédent entraînent qu'il y a deux possibilités 1) $\exists \{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$ tel que $v_i = v_j$; 2) $\exists k \in \{1, 2, 3\}$ tel que si $\{i, j\} = \{1, 2, 3\} - \{k\}$ on a $v_k = v_i + v_j$. On peut se limiter à considerer les cas suivants:

$$1) v_1 = v_2$$

$$2) v_3 = v_1 + v_2$$

THÉOREME 2. 1) Soit $v_1 = v_2 = v$, $v_3 = w$. $f: H(e) \rightarrow \mathcal{H}(G')$ est un homomorphisme si et seulement si est vérifiée une des conditions suivantes ⁽²⁾.

$$a) \exists j: \alpha_j^{1,2} = -1, \alpha_i^{i,k} = +1, \forall [i, k] \neq [1, 2]$$

$$b) \exists j: \alpha_j^{1,2} = -1 = \alpha_1^{1,3} = \alpha_2^{2,3} \quad w \geq v$$

$$c) \exists j: \alpha_j^{1,2} = -1 = \alpha_1^{1,3} = \alpha_3^{2,3} \quad w \leq v$$

⁽¹⁾ Le corollaire peut évidemment être démontré aussi par une preuve directe.

⁽²⁾ On notera $[i, k]$ un sous-ensemble a deux éléments de $\{1, 2, 3\}$.

dans (a), (b), (c), on a $A(1, 2, 3) = w$; de plus

A) si $\exists [i, k] \neq [1, 2]$ tel que $\alpha_i^{i,k} = -1$ et $\alpha_j^{j,h} = +1$, $\forall [j, h] \neq [i, k]$ pour que f soit un homomorphisme, il faut et il suffit qu'on ait $v = w$.

B) si $\exists j: \alpha_j^{1,2} = -1 = \alpha_1^{1,3} = \alpha_3^{2,3}$ ou

C) si $\exists j: \alpha_j^{1,2} = -1 = \alpha_1^{1,3} = \alpha_2^{2,3}$

pour que f soit un homomorphisme, il faut et il suffit qu'on ait $v = w$; dans (A) (B), (C), nous avons $A(1, 2, 3) = w$.

Enfin

D) si $\alpha_1^{1,3} = \alpha_2^{2,3} = -1$ et $\alpha_j^{1,2} = +1$, $\forall j \in [1, 2]$ pour que f soit un homomorphisme, il faut et il suffit qu'on ait $w = 2v$, nous avons dans ce cas $A(1, 2, 3) = 0$

2) Soit $v_3 = v_1 + v_2$ d'où $\alpha_3^{1,3} = +1$, $\forall i$.

Alors f est un homomorphisme si

a') $\alpha_1^{1,3} = \alpha_2^{2,3} = -1$, $\alpha_j^{1,2} = +1$, $\forall j$, dans ce cas (qui contient D) on a $A(1, 2, 3) = 0$.

Dans les cas suivants pour que f soit homomorphisme il faut et il suffit qu'on ait: $v_1 = v_2$

A') $\exists j: \alpha_j^{1,2} = -1$, $\alpha_i^{i,k} = +1$ si $[i, k] \neq [1, 2]$

B') $\exists j: \alpha_j^{1,2} = -1 = \alpha_1^{1,3} = \alpha_2^{2,3}$

(A') et (B') sont évidemment contenus respectivement dans (a) et (b). Dans les hypothèses faites il n'y a pas d'autres homomorphismes en dehors des cas considérés.

On prouve le théorème par le lemme précédent. On peut remarquer qu'il suffit de voir si

$$1) \bigcap_{(i,j,k) \in S_3(I_3)} A(i) \circ A(j, k) \neq \emptyset$$

où $S_3(I_3)$ est le groupe symétrique de $\{1, 2, 3\}$

$$2) A(1, 3) \circ A(2, 3) \ni A(1, 2)$$

Chapitre 4.

LEMME 1. Soient $x_i \in \mathcal{H}(G)$, $i = 1, 2, \dots, p$.

Si on suppose

$$(a) \quad f\left(2 \sum_{i=1}^{p-1} x_i\right) = 2f\left(\sum_{i=1}^{p-1} x_i\right) \quad \text{et} \quad (b) \quad f(3x_p) = 3f(x_p)$$

on a $f\left(2 \sum_{i=1}^p x_i\right) = 2f\left(\sum_{i=1}^p x_i\right)$.

En effet (b) $\Rightarrow f(2x_p) = 2f(x_p) = 2v_p$ alors

$$1) \quad f\left(2 \sum_{i=1}^p x_i\right) \in 2f\left(\sum_{i=1}^{p-1} x_i\right) \circ 2f(x_p)$$

mais on a aussi

$$2) \quad f\left(2 \sum_{i=1}^p x_i\right) \in \left\{2f\left(\sum_{i=1}^p x_i\right), 0\right\}.$$

Si $f\left(2 \sum_{i=1}^p x_i\right) = 0$, de (1) on obtient

$$f\left(\sum_{i=1}^{p-1} x_i\right) = f(x_p)$$

d'où $f\left(\sum_{i=1}^p x_i\right) \in \{2v_p, 0\}$. Si $f\left(\sum_{i=1}^p x_i\right) = 0$, on a évidemment

$$f\left(2\left(\sum_{i=1}^p x_i\right)\right) = 2f\left(\sum_{i=1}^p x_i\right).$$

Supposons par absurde que soit vérifié le deuxième cas: $f\left(\sum_{i=1}^p x_i\right) = 2v_p$.
On a:

$$f\left[\sum_{i=1}^{p-1} x_i - x_p\right] \in f\left(\sum_{i=1}^{p-1} x_i\right) \circ f(x_p) = \{2v_p, 0\},$$

et on a aussi:

$$f\left(\left|\sum_{i=1}^{p-1} x_i - x_p\right|\right) \in f\left(\sum_{i=1}^p x_i\right) \circ f(2x_p) = \{4v_p, 0\}$$

donc $f\left(\left|\sum_{i=1}^{p-1} x_i - x_p\right|\right) = 0$.

Il en suit:

$$f\left(2 \sum_{i=1}^p x_i\right) \circ f\left|\sum_{i=1}^{p-1} x_i - x_p\right| = \{0\}.$$

De plus:

$$f\left(2 \sum_{i=1}^p x_i\right) \circ f\left(\left|\sum_{i=1}^{p-1} x_i - x_p\right|\right) \ni f\left(\sum_{i=1}^{p-1} x_i + 3x_p\right)$$

et

$$f\left(\sum_{i=1}^{p-1} x_i + 3x_p\right) \in f\left(\sum_{i=1}^{p-1} x_i\right) \circ f(3x_p) = \{4v_p, 2v_p\} \neq 0.$$

Alors on peut conclure:

$$f\left(2 \sum_{i=1}^p x_i\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^p x_i\right) = 0$$

et par conséquent

$$f\left(2 \sum_{i=1}^p x_i\right) = 2f\left(\sum_{i=1}^p x_i\right)$$

LEMME 2. Soit $\{y, z\} \subset \mathcal{H}(G)$ et supposons $f(2y) = 2f(y)$, $f(2z) = 2f(z)$; alors $f(y \circ z) = f(y) \circ f(z)$.

Si $f(y)$ ou $f(z)$ est nul on obtient tout de suite la thèse; soit donc $f(y) \neq 0 \neq f(z)$. On a $f(|y-z|) \circ f(y+z) \supset \{2f(y), 2f(z)\}$. S'il fut $f(|y-z|) = f(y+z) = w$, il suivra $f(|y-z|) \circ f(y+z) = \{2w, 0\}$, mais on aura aussi: $f(y) = f(z) = w$, et $f(y+z) \in f(y) \circ f(z) = \{2w, 0\}$, donc $f(y+z) \neq f(|y-z|)$ d'où la thèse.

Cela permet aussi d'affirmer que $f(|y-z|)$ est univoquement déterminé par $f(y+z)$ et vice versa.

THÉORÈME 1 Soit $K = \left\{ x = \sum_{i \in J} e_i \mid J \subset I, \bar{J} < \mathbf{S}_0 \right\}$ et $f: K \rightarrow \mathcal{H}(G')$ telle que, si on pose $v_i = f(e_i)$, $\forall i$, $A(J) = f\left(\sum_{i \in J} e_i\right) = \sum_{i \in J} \alpha_i^J v_i$ où $\alpha_i^J \in \{1, -1\}$, $\forall i, \forall J$, on aura: $\forall J_1 \subset J$, $A(J) \in A(J_1) \circ A(J - J_1)$. Il existe alors exactement un homomorphisme $f^*: H(e) \rightarrow \mathcal{H}(G')$ tel que

$$f^*_{|K} = f \quad \text{et} \quad \exists j \in I: f^*(3e_j) = 3v_j$$

de plus on a:

$$(1) \quad f^*\left(\sum_{i \in J} p_i e_i\right) = \left|\sum_{i \in J} p_i \alpha_i^J v_i\right| \quad \forall p_i \in \mathbf{Z}, \quad \forall J \subset I: \bar{J} < \mathbf{S}_0.$$

Rappelons d'abord que l'hypothèse $\exists j \in I: f(3e_j) = 3v_j$, est équivalente à: $f(3e_i) = 3v_i$, $\forall i \in I$ (voir ch. 2).

On démontrera maintenant que:

$$f\left(\sum_{i \in J - \{k\}} e_i + 2e_k\right) = \sum_{i \neq k} a_i v_i + 2\alpha_k^J v_k$$

On a:

$$\begin{aligned} x = f\left(\sum_{i \in J - \{k\}} e_i + 2e_k\right) &\in A(J) \circ v_k \cap A(J - \{k\}) \circ 2v_k = \\ &= \left\{ A(J - \{k\}), \left|\sum_{i \neq k} \alpha_i^J v_i + 2\alpha_k^J v_k\right| \right\} \cap \\ &\cap \{A(J - \{k\}) + 2v_k, |A(J - \{k\}) - 2v_k|\}. \end{aligned}$$

Il ne peut pas arriver que les trois conditions suivantes soient vérifiées en même temps:

- 1) $A(J) = 2v_k$,
- 2) $A(J - \{k\}) = 2v_k - A(J - \{k\})$
- 3) $x = A(J - \{k\})$ puisque il suivrait

$$y = f\left|\sum_{i \in J - \{k\}} e_i - e_k\right| \in A(J - \{k\}) \circ v_k \cap A(J) \circ 2v_k = \{2v_k, 0\} \cap \{4v_k, 0\}$$

d'où $x \circ y = v_k$ et on aurait aussi $x \circ y \ni f(3e_k)$.

De l'exclusion faite, on déduit tout de suite: $x = \left| \sum_{i \neq k} \alpha_i^J v_i + 2\alpha_k^J v_k \right|$.
 Procédent par induction et utilisant le lemme 2 on obtient (1).

THÉOREME 2. Dans les mêmes hypothèses du theoreme précédent, soit

$$x = \sum_{i \in J} \frac{p_i}{q_i} e_i \in \mathcal{K}(G),$$

alors si $f: \mathcal{K}(G) \rightarrow \mathcal{K}(G')$ est un homomorphisme tel que $f(3e_i) = 3v_i$, $\forall i$, et $A(J) = \sum_{i \in J} \alpha_i v_i$, on a:

$$f(x) = \sum_{i \in J} \frac{p_i}{q_i} \alpha_i v_i.$$

Si on écrit $e_i/q_i = e'_i$ et $f(e'_i) = v'_i$, par la même démonstration qu'on a faite avant, on obtient $f\left(\sum_{i \in J} p_i e'_i\right) = \left|\sum_{i \in J} p_i \alpha_i v'_i\right|$. De plus par ce qu'on a montré dans le ch. 1, on a: $v'_i = v_i/q_i$ et, par conséquent, la thèse.

THÉOREME 3. Soit $f: \mathcal{K}(G) \rightarrow \mathcal{K}(G')$ un homomorphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1) f est faible, 2) il existe dans $\mathcal{K}(G)$ un élément x tel que $f(x) \neq 0$, $f(4x) = 0$, 3) $\overline{\text{Im } f} < \aleph_0$.

Chapitre 5.

Quelques observations du point de vue de l'algèbre universelle. La classe $sd\text{-}\mathcal{K}$ est élémentaire sur le domaine de prédicats $\langle R, 0 \rangle$ de type $\langle 4, 0 \rangle$ (voir [5]), comme il suit immédiatement du ch 2 [2].

Plus précisément $sd\text{-}\mathcal{K}$ est une sous-classe élémentaire de la classe des hypergroupes de dimension 2, doués d'identité scalaire. Du corollaire 2 au th. 1 du ch. 3 il suit qu'elle n'est pas héréditaire, d'où pas universelle (voir [1] th. 2.8 page 255). D'autre part, si on considère $sd\text{-}\mathcal{K}$ comme une classe d'algèbres sur le domain d'opérations $\langle p, q, 0 \rangle$ de type $\langle 2, 2, 0 \rangle$ on voit qu'elle est élémentaire et héréditaire donc universelle et que si E est la plus petite classe équationnelle qui la contient, la catégorie définie par E , est isomorphe à la catégorie des groupes abéliens réticulés (voir [5] th. 2, pag. 152). En rappelant le théorème 3.1, § 3 [6] et le théorème 5.2 ch. 5 [8] on prouve facilement la suivante

PROPOSITION. Soient $e = (e_i)_{i \in I}$ et $e' = (e'_i)_{i \in I'}$. Alors

- 1) soit $I \geq \aleph_0$, si $\bar{I}' \geq \aleph_0$ les systèmes relationnels $H(e)$ et $H(e')$ ont le même type arithmétique ($H(e) \sim H(e')$).
- 2) Si $\bar{I} < \aleph_0$, les algèbres $H(e)$ et $H(e')$ ont le même type arithmétique si et seulement si $\bar{I} = \bar{I}'$.

REMARQUE. On dit qu'une partie K d'un hypergroupe H est multiplicativement fermée si $\forall (x, y) \in K \times K$, on a : $x \circ y \subset K$. Alors on vérifie facilement que quelconque sous-ensemble multiplicativement fermé d'un quotient de sd -hypergroupes est lui-même un quotient de sd -hypergroupes.

Sur les $C(n)$.

On rappelle qu'on a noté par $C(n)$, où $n \in \mathbf{N}$, l'hypergroupe quotient $\mathcal{H}(\mathbf{Z})/\mathcal{H}(n\mathbf{Z})$ (voir [2] § 3 ch. III), et pour quelconque hypergroupe H , par $\omega(H)$ le plus petit sous-hypergroupe K de H tel que H/K soit un groupe. On prouve facilement le suivant

LEMME. $\omega(C(n)) = C(n)$ si et seulement si $n \in 2\mathbf{N} + 1$.

Soit $f_k: C(n) \rightarrow C(nk)$, l'application définie: $f_k(\bar{s}) = \overline{ks}$ (où $\bar{s}$ et $\overline{ks}$ sont les classes d'équivalence déterminées par s et ks respectivement dans $C(n)$ et $C(nk)$); on pose $\mathfrak{I}(n, k) = \text{Im } f_k$, soit $g_k: C(n) \rightarrow C(n)$ l'application définie $g_k(\bar{s}) = \overline{ks}$

PROPOSITION. 1) f_k est un monomorphisme 2) $\mathfrak{I}(n, k) \subset \omega(C(nk))$ si et seulement si $(n, k) \notin 2\mathbf{N} \times 2\mathbf{N} + 1$ 3) g_k est un homomorphisme, il est bijectif si et seulement si p.g. c.d. $(n, k) = 1$

2) il suffit de remarquer que si $(n, k) \in 2\mathbf{N} \times 2\mathbf{N} + 1$, $f_k(\bar{1}) \notin \omega(C(nk))$;

3) pour que g_k soit un isomorphisme il faut et il suffit qu'existen $q \in \mathbf{Z}$, $q' \in \mathbf{Z}$ tels que $qk + q'n = 1$

COROLLAIRE 1. Si on considère dans $\mathbf{N}$ l'ordre partiel: $n > m$ si $\exists k \in \mathbf{N}$ tel que $nk = m$, alors par rapport au système d'homomorphismes $\varphi_{n,m} = f_k: C(n) \rightarrow C(nk)$, on a:

$$\forall n_0 \geq 1 \quad \lim_{\substack{\leftarrow \\ n \geq n_0}} C(n) = C(1) = 0.$$

Soit $\pi: C(nk) \rightarrow C(nk)/\omega(C(nk))$ la projection canonique.
De la Proposition précédente on déduit aussi le

COROLLAIRE 2. $\pi f_k(C(n)) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ si et seulement si $(n, k) \in 2\mathbf{N} \times \times 2\mathbf{N} + 1$. Si $(n, k) \notin 2\mathbf{N} \times 2\mathbf{N} + 1$, $\pi f_k(C(n)) = 0$

PROPOSITION. $\forall (n, k) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ on a $C(nk)/\mathfrak{J}(n, k) \simeq C(k)$.

Si on note

$$C(nk) = \{e_0, e_1, \dots, e_{p(nk)}\}, \quad C(k) = \{e'_1, e'_0, \dots, e'_{p(k)}\},$$

on peut définir un isomorphisme de la façon suivante

$$\forall 0 \leq m \leq p(kn) \quad f(e_m) = e'_{\lambda(m)}$$

où $m = qk + s$, $s < k$ et $\lambda(m) = \min \{s, k - s\}$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. M. COHN, *Algebra Universale*, Feltrinelli, 1971.
- [2] P. CORSINI, *Hypergroupes et groupes ordonnés*, Rendiconti del Seminario Matematico di Padova, **48** (1973).
- [3] M. DRESHER - O. ORE, *Theory of multigroups*, Amer. J. Math., **60** (1938).
- [4] L. FUCHS, *Abelian groups*, Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, 1958.
- [5] G. GRÄTZER, *Universal Algebra*, Van Nostrand Company, 1968.
- [6] M. KOSKAS, *Groupoïdes, demi-hypergroupes et hypergroupes*, J. Math. pures et appl., **49** (1970).
- [7] A. ORSATTI, *Equivalenze regolari a destra dentro un ipergruppo. Sottoipergruppi F-reversibili*, Rend. Sem. Mat. Padova (1963).
- [8] W. SZMIELEW, *Elementary properties of Abelian groups*, Fund. Math., **41** (1955).
- [9] A. TARSKI - R. VAUGHT, *Arithmetical extensions of relational systems*, Comp. Math., **13** (1957).
- [10] H. S. WALL, *Hypergroups*, American Journal of Mathematics, vol. 59 (1937).

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 aprile 1973.