RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

RAFFAELE BALLI

Sulle precessioni generalizzate semiregolari del solido pesante

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 51 (1974), p. 305-312

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__51__305_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 52 (1974)

Sulle precessioni generalizzate semiregolari del solido pesante (*).

RAFFAELE BALLI (**)

1. Introduzione.

Nel caso di un corpo rigido pesante (asimmetrico) $\mathcal{C}$ fissato senza attrito per un suo punto O sono dinamicamente possibili moti di precessione generalizzata regolare di vettore $\sigma\boldsymbol{\omega}$, ossia moti per i quali risulta

$$\sigma\boldsymbol{\omega} = \alpha\boldsymbol{c} + \beta\boldsymbol{\chi} \tag{1}$$

essendo $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare, σ l'omografia d'inerzia, α e β costanti, $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{\chi}$ versori fissi nello spazio e nel corpo rispettivamente. Precisamente G. Grioli [1], [2], [3], [4] ha dimostrato che tra tutti i moti del tipo suddetto ve ne sono di dinamicamente possibili e ne ha determinato l'intera classe; questa è costituita da moti per i quali $\boldsymbol{c}$ è verticale.

Nella presente nota si cercano moti dinamicamente possibili in due classi più ampie costituite dalle precessioni generalizzate semiregolari ad asse verticale e cioè da quei moti per i quali sussiste la (1), ma si suppone soltanto che sia $\beta = \text{cost}$ (I specie), oppure che sia $\alpha = \text{cost}$ (II specie). Queste classi hanno come intersezione la classe delle precessioni generalizzate regolari ad asse verticale e sono state introdotte da R. Troilo [5] il quale vi ha riconosciuto l'esistenza di moti dinamicamente possibili per il corpo soggetto a forze di potenza nulla.

In questa nota si riconosce che, oltre alle precessioni generalizzate degeneri di II specie, nelle due classi non ci sono moti dinamicamente

(*) Lavoro effettuato nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

(**) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università di Perugia.

possibili per il corpo rigido pesante se non quelli contenuti nella intersezione. Si ritrovano in questo modo con un procedimento diverso anche i risultati di G. Grioli, ed in particolare le precessioni semiregolari ad asse verticale che, come lo stesso autore ha osservato, costituiscono le sole precessioni generalizzate regolari non degeneri dinamicamente possibili.

Quale che sia la struttura del corpo rigido è sempre possibile scegliere una terna solidale $T(0, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$ con $\boldsymbol{i}_3 = \boldsymbol{\chi}$, e tale che, essendo la matrice d'inerzia [1] di forma generica

$$\sigma = \begin{bmatrix} A & -C' & -B' \\ -C' & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{bmatrix}$$

per la sua inversa risulti

$$\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_2 \\ 0 & a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & a_3 \end{bmatrix}.$$

La possibilità dinamica del moto è espressa dalle equazioni di Eulero e di Poisson che per i moti in esame assumono la forma

$$\dot{\alpha}\boldsymbol{c} + \dot{\beta}\boldsymbol{i}_3 + \sigma^{-1}(\alpha\boldsymbol{c} + \beta\boldsymbol{i}_3)\wedge\beta\boldsymbol{i}_3 = OG^*\wedge\boldsymbol{c} \tag{2}$$

$$\dot{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c}\wedge\sigma^{-1}(\alpha\boldsymbol{c} + \beta\boldsymbol{i}_3) \tag{3}$$

dove si è assunto $\boldsymbol{c}$ orientato verso il basso e si è posto $OG^* = MgOG = \xi_1 i_1 + \xi_2 i_2 + \xi_3 i_3$, essendo M, G, g, la massa totale, il baricentro ed il modulo dell'accelerazione di gravità.

Queste equazioni ammettono oltre l'integrale primo dell'energia, che non verrà usato in seguito, l'integrale della componente verticale del momento delle quantità di moto

$$\alpha + \beta c_3 = K_c \tag{4}$$

---

[1] Naturalmente si suppone che σ sia non singolare, il che esclude che il solido sia costituito solo da punti allineati con O.

e l'integrale particolarizzato

(5) $$|\boldsymbol{c}| = 1\,.$$

Si cercano soluzioni di queste equazioni per le quali sia $\dot\beta = 0$ (I specie), oppure $\dot\alpha = 0$ (II specie).

2. Precessioni generalizzate semiregolari di I specie.

Si cercano moti per i quali $\dot\beta = 0$ escludendo che sia anche $\dot\alpha = 0$ perchè questo caso è esaminato come caso particolare delle precessioni di II specie.

Le equazioni di Eulero (2) proiettate sugli assi di T danno

$$\begin{aligned}
&\dot\alpha c_1 + \beta[\alpha a_2 c_2 + (\alpha c_3 + \beta) b_1] = \xi_2 c_3 - \xi_3 c_2\\
&\dot\alpha c_2 - \beta[\alpha a_1 c_1 + (\alpha c_3 + \beta) b_2] = \xi_3 c_1 - \xi_1 c_3\\
&\dot\alpha c_3 = \xi_1 c_2 - \xi_2 c_1\,.
\end{aligned}$$

Eliminando $\dot\alpha$ da queste si ottiene

$$\begin{aligned}
&\beta c_3[\alpha a_2 c_2 + (\alpha c_3 + \beta) b_1] = c_3(\xi_2 c_3 - \xi_3 c_2) - c_1(\xi_1 c_2 - \xi_2 c_1)\\
&\beta c_3[\alpha a_1 c_1 + (\alpha c_3 + \beta) b_2] = -c_3(\xi_3 c_1 - \xi_1 c_3) + c_2(\xi_1 c_2 - \xi_2 c_1)\,.
\end{aligned}$$

Tenendo conto dell'integrale primo della componente verticale del momento delle quantità di moto si ottiene infine

(6.1) $$\beta c_3[(K_c - \beta c_3)(a_2 c_2 + b_1 c_3) + \beta b_1] = c_3(\xi_2 c_3 - \xi_3 c_2) - c_1(\xi_1 c_2 - \xi_2 c_1)$$

(6.2) $$\beta c_3[(K_c - \beta c_3)(a_1 c_1 + b_2 c_3) + \beta b_2] = -c_3(\xi_3 c_1 - \xi_1 c_3) + c_2(\xi_1 c_2 - \xi_2 c_1)\,.$$

Nel riferimento T l'estremo mobile di $\boldsymbol{c}$ deve appartenere dunque alle due superficie cubiche rappresentate da (6.1) e (6.2) ed alla sfera

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1\,.$$

Per la possibilità dinamica di moti che non si riducano a rotazioni intorno alla verticale [2] è necessario che le tre superficie abbiano una

[2] Le rotazioni attorno alla verticale sono uniformi: $\dot\alpha = 0$ e vengono esaminate come precessioni generalizzate di II specie.

curva reale in comune. L'intersezione delle tre superficie algebriche è formata da un certo numero di punti e da una eventuale curva algebrica Φ di ordine $n \leqslant 6$.

Se ξ_1 e ξ_2 non sono entrambi nulli le tre superficie hanno in comune con il piano π_0 di equazione $c_3 = 0$ i punti ciclici ed i punti

$$P_1 = \left(\frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}, \frac{\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}, 0\right) \quad \text{e} \quad P_2 = \left(\frac{-\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}, \frac{-\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}, 0\right);$$

ma questi ultimi non possono appartenere a Φ perchè i piani tangenti alle superficie in P_1, così come in P_2, non appartengono allo stesso fascio. Si dimostra che l'eventuale curva Φ è una conica che interseca il piano π_0 nei suoi punti ciclici, e quindi è contenuta in un piano parallelo a π_0. Infatti i punti ciclici sono intersezioni semplici per la curva comune a (6.1) ed alla sfera, dal momento che tale curva ha altre quattro intersezioni distinte con il piano π_0; quindi sono semplici anche per la Φ, la quale risulta pertanto al più del secondo ordine.

Poichè le rette appartenenti alla sfera sono complesse, l'eventuale curva reale corrispondente ad un moto dinamicamente possibile va ricercata tra le circonferenze intersezioni della sfera con i piani π_h di equazione $c_3 = h$ con $|h| < 1$. Le intersezioni delle superficie cubiche con il piano π_h sono però costituite oltre che dalla retta impropria dalle due coniche

$$\beta h[(K_c - \beta h)(a_2 c_2 + b_1 h) + \beta b_1] = \xi_2 h^2 - \xi_3 h c_2 - \xi_1 c_1 c_2 + \xi_2 c_1^2 \tag{7.1}$$

$$\beta h[(K_c - \beta h)(a_1 c_1 + b_2 h) + \beta b_2] = -\xi_3 h c_1 + \xi_1 h^2 + \xi_1 c_2^2 - \xi_2 c_1 c_2 \tag{7.2}$$

che non sono mai circonferenze.

Le due superficie hanno dunque in comune con la sfera una circonferenza del piano π_h soltanto se i coefficienti delle (7.1) e (7.2) sono tutti nulli. Perchè ciò si verifichi è necessario che sia $\xi_1 = \xi_2 = 0$.

L'intersezione delle superficie non contiene quindi alcuna curva reale se $\xi_1^2 + \xi_2^2 > 0$. Quando invece $\xi_1 = \xi_2 = 0$ dalla terza equazione di Eulero si ha $\dot{\alpha} c_3 = 0$, che comporta α costante poichè quando anche fosse $c_3 = 0$ dall'integrale primo del momento delle quantità di moto si otterrebbe in ogni caso $\alpha = K_c$.

Non esistono quindi precessioni generalizzate di I specie dinamicamente possibili per le quali non sia anche $\dot{\alpha} = 0$.

3. Precessioni generalizzate semiregolari di II specie.

Si cercano moti per i quali $\dot{\alpha}=0$ senza escludere però che sia anche $\dot{\beta}=0$. In questo caso le equazioni di Eulero sono

$$\beta[\alpha c_2 a_2 + (\alpha c_3+\beta)b_1] = \xi_2 c_3 - \xi_3 c_2$$

$$\beta[\alpha c_1 a_1 + (\alpha c_3+\beta)b_2] = \xi_1 c_3 - \xi_3 c_1$$

$$\dot{\beta} = \xi_1 c_2 - \xi_2 c_1 .$$

Per i moti di questo tipo l'integrale primo del momento delle quantità di moto assume la forma

$$\beta c_3 = K_0 = \text{cost} . \tag{8}$$

Si riconosce che gli eventuali moti con β variabile vanno cercati tra quelli per i quali è $K_0=0$. Infatti eliminando β dalle prime due equazioni di Eulero mediante la (8) si ottiene:

$$c_3^2(\xi_2 c_3 - \xi_3 c_2) - K_0\alpha b_1 c_3^2 - K_0\alpha a_2 c_2 c_3 - K_0^2 b_1 = 0 \tag{9.1}$$

$$c_3^2(\xi_1 c_3 - \xi_3 c_1) - K_0\alpha b_2 c_3^2 - K_0\alpha a_1 c_1 c_3 - K_0^2 b_2 = 0 \tag{9.2}$$

e combinando linearmente tra loro queste due equazioni si ottiene ancora

$$c_3[c_3 b_2(\xi_2 c_3 - \xi_3 c_2) - c_3 b_1(\xi_1 c_3 - \xi_3 c_1) - \alpha K_0 a_2 b_2 c_2 + \alpha K_0 a_1 b_1 c_1] = 0 . \tag{10}$$

Pertanto in un eventuale moto dinamicamente possibile o è $c_3=0$ oppure c_1, c_2, c_3 devono appartenere alla intersezione della quadrica

$$c_3 b_2(\xi_2 c_3 - \xi_3 c_2) - c_3 b_1(\xi_1 c_3 - \xi_3 c_1) - \alpha K_0 a_2 b_2 c_2 + \alpha K_0 a_1 b_1 c_1 = 0$$

con la superficie (9.1) e la sfera

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 .$$

Con lo stesso ragionamento usato nel caso delle precessioni generalizzate semiregolari di I specie si verifica che se $K_0 \neq 0$ le eventuali curve comuni a queste tre superficie non possono essere che circonferenze appartenenti a piani $c_3 = h$.

In ogni caso risulta quindi $c_3 =$ costante ed essendo $\beta c_3 = K_0 \neq 0$ si ottiene $\beta =$ costante.

Per gli eventuali moti con β variabile sarà quindi $K_0 = 0$ e $c_3 = 0$.

Le prime due equazioni di Eulero in tal caso sono

$$\alpha\beta c_2 a_2 + \beta^2 b_1 = -\xi_3 c_2$$

$$\alpha\beta c_1 a_1 + \beta^2 b_2 = -\xi_3 c_1$$

e per la possibilità dinamica del moto devono essere compatibili con

$$c_1^2 + c_2^2 = 1 \,.$$

Si verifica agevolmente che perchè sussista questa compatibilità con β variabile sono necessarie le seguenti condizioni:

$$\alpha = 0 \,, \qquad \xi_3 = 0 \,, \qquad b_1 = b_2 = 0 \,.$$

In forza di queste condizioni è

$$\boldsymbol{\omega} = \sigma^{-1}(\beta \boldsymbol{i}_3) = \beta a_3 \boldsymbol{i}_3 \,.$$

Si tratta dunque di moti rotatori (non uniformi) attorno ad un asse principale d'inerzia disposto orizzontalmente: moti di Mlodzjejowsky.

Oltre a questi moti che sono i soli con β variabile si possono avere solo moti con $\beta = h =$ costante. Si distinguono i due casi $h \neq 0$ e $h = 0$.

Moti con $\beta = h \neq 0$ sono precessioni ad asse verticale, in quanto da (4) si ha $c_3 =$ costante. Per la terza equazione di Eulero è

$$\xi_1 c_2 = \xi_2 c_1 \,.$$

Ciò comporta che o c_1 e c_2 sono costanti e quindi i moti possibili sono rotazioni uniformi intorno alla verticale (moti di Staude) oppure $\xi_1 = \xi_2 = 0$.

Se $\xi_1 = \xi_2 = 0$ le prime due equazioni di Eulero divengono

$$(\alpha h a_2 + \xi_3) c_2 + h(\alpha c_3 + h) b_1 = 0$$

$$(\alpha h a_1 + \xi_3) c_1 + h(\alpha c_3 + h) b_2 = 0 \,.$$

Queste equazioni sono compatibili tra loro e con la

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$$

soltanto nelle seguenti eventualità:

$$\begin{array}{llll} 1) & a_1 = a_2 \,, & \xi_3 + \alpha h a_1 = 0 \,, & \alpha c_3 + h = 0 \,, \\ 2) & a_1 = a_2 \,, & \xi_3 + \alpha h a_1 = 0 \,, & b_1 = b_2 = 0 \,, \\ 3) & \alpha = 0 \,, & \xi_3 = 0 \,, & b_1 = b_2 = 0 \,. \end{array}$$

Il primo caso corrisponde a delle precessioni semiregolari poichè porta a

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{\xi_3}{h}\boldsymbol{c} + \frac{\xi_3}{a_1 h}(a_1 c_3 - b_2 c_1 - b_1 c_2)\boldsymbol{i}_3 \,.$$

Si tratta delle precessioni semiregolari di Grioli, infatti per la condizione strutturale $a_1 = a_2$ il piano ortogonale ad OG è uno dei due piani ciclici per O e la condizione di moto $\alpha c_3 + h = 0$ coincide esattamente con quella già individuata da Grioli [3] (3).

Il secondo caso corrisponde alle precessioni regolari del giroscopio poichè porta

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{\xi_3}{h}\boldsymbol{c} + [(a_3 - a_1)\alpha c_3 + a_3 h]\boldsymbol{i}_3 \,.$$

Il terzo caso corrisponde alle rotazioni uniformi attorno ad un asse principale d'inerzia del corpo rigido fissato nel baricentro.

Per i moti con $\beta = h = 0$ è $\sigma\boldsymbol{\omega} = \alpha\boldsymbol{c}$ cioè il momento delle quantità di moto è costante nello spazio; si tratta dunque di moti alla Poinsot con $\sigma\boldsymbol{\omega}$ verticale. Questi moti sono dinamicamente possibili se $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ o quando si riducono a moti rotatori uniformi attorno ad un asse centrale d'inerzia disposto verticalmente.

---

(3) Risultando $a_1 = a_2$ l'omografia inversa σ^{-1} ha la forma ridotta utilizzata rispetto ad ogni terna che abbia $\boldsymbol{i}_3 = \boldsymbol{\chi}$. Scegliendo opportunamente la terna in questo ambito si può fare in modo che sia anche $b_1 = 0$ oppure $b_2 = 0$. Fatto ciò risulta $C' = 0$ e la coincidenza della condizione strutturale trovata con quella di G. Grioli risulta di verifica formale immediata.

4. Conclusioni.

Si è riconosciuto che in queste classi i moti dinamicamente possibili sono soltanto le precessioni semiregolari di Grioli, le rotazioni di Staude, le precessioni regolari del giroscopio, i moti rotatori alla Poinsot e i moti generici alla Poinsot con il momento delle quantità di moto verticale. Tutti questi moti per i quali è $\alpha =$ costante e $\beta =$ costante costituiscono la classe già individuata da G. Grioli delle precessioni generalizzate regolari (eventualmente degeneri) dinamicamente possibili. I soli moti che non risultano precessioni generalizzate regolari appartengono alla II specie e sono i moti di Mlodzjejowsky, già indicati da G. Grioli come esempio di precessioni generalizzate non regolari anche se degeneri. Le eventuali precessioni generalizzate non regolari e non degeneri devono quindi essere ricercate nella classe più ampia delle precessioni generalizzate che non siano semiregolari.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Grioli, *Particular solutions in stereodynamics*, in Stereodynamics, C.I.M.E. (1971).
[2] G. Grioli, *Questioni di dinamica del solido pesante asimmetrico*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XXI (1952).
[3] G. Grioli, *Forma intrinseca delle equazioni dinamiche del solido pesante asimmetrico con un punto fisso e ricerca dei moti di precessione*, Atti Univ. Ferrara, sez. VII, vol. III (1954).
[4] G. Grioli, *Qualche teorema di cinematica dei moti rigidi*, Atti dell'Acc. Naz. dei Lincei, serie VIII, vol. XL (1963).
[5] R. Troilo, *Su una classe di moti dinamicamente possibili del corpo rigido soggetto a forze di potenza nulla*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova (1972).

Manoscritto pervenuto in redazione il 23 Gennaio 1974.