Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Giuliano Bratti

Una proprietà degli operatori differenziali lineari che sono sub-ellittici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 51 (1974), p. 275-280

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__51__275_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 51 (1974)

Una proprietà degli operatori differenziali lineari che sono sub-ellittici.

GIULIANO BRATTI (*)

§ 1. Questo articolo ha lo scopo di approfondire l'analisi del comportamento degli operatori differenziali alle derivate parziali sopra il « wave front set » delle distribuzioni. Si otterrà la dimostrazione della seguente proposizione:

A) sia $P = P(x, D) = \Sigma_{|\alpha|\leqslant m} a^{\alpha}(x) D^{\alpha}$ un operatore differenziale su Ω, un aperto di $\mathbb{R}^n$, con coefficienti di classe C^{∞}. Se P è sub-ellittico su Ω, $mr(Pu) \equiv mr(u)$, $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (¹).

Ecco la terminologia ed il simbolismo:

sia S_{n-1} la superficie sferica di $\mathbb{R}_n$, di centro l'origine e raggio unitario; se Ω è un aperto in $\mathbb{R}^n$ e u è una distribuzione su Ω, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, indicando con x la variabile in $\mathbb{R}^n$ e ξ la variabile in $\mathbb{R}_n$, $WF(u)$ è quel sottoinsieme di $\Omega \times S_{n-1}$ così definito: $(x_0, \xi^0) \notin WF(u)$ se esiste una $\varphi(x) \in C_c^{\infty}(\Omega)$ con $\varphi(x_0) \neq 0$ e tale che la trasformata di Fourier della distribuzione $\varphi(x)u$ sia rapidamente decrescente in un intorno conico del semiraggio per l'origine e direzione ξ^0. Si pone: $mr(u) = WF(u) \cap \cap R_{\infty}(u)$, dove: $R_{\infty}(u = \bigcap_s R_s(u)$, $\forall s \in \mathbb{R}$, e $R_s(u) = \bigcup \{\mathcal{O} \subseteq \Omega \times S_{n-1},$

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Via Belzoni 3, 35100 Padova.
Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

(¹) Nella scrittura di $P = P(x, D)$, α denota un multi-indice: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, con le α_i intere non negative; $|\alpha| = \sum_{1}^{n}{}_i\, \alpha_i$, $D^{\alpha} = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} - D^{\alpha_n}$ dove $D^{\alpha_k} = ((1/i)(\partial/\partial x_k))^{\alpha_k}$ e $i^2 = -1$.

$\mathcal{O}$ aperto e tale che $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}^*)\}$ (2). Per più ampi dettagli su $WF(u)$, (che si dice il «wave front set» della distribuzione u), e per l'$mr(u)$ si vedano, rispettivamente [4] e [1].

Un operatore differenziale su Ω, $P = P(x, D)$, si dice *sub-ellittico* in $x_0 \in \Omega$ se esiste un intorno V di x_0 tale che: $\forall \varphi(x) \in C^\infty_c(V)$, $\|\varphi\|_{m-1+\delta} \subseteq \subseteq C\|P\varphi\|_0$, dove: $0 < \delta \leqslant 1$; $C > 0$; m è l'ordine di P e $\|\cdot\|_s$ indica la norma nello spazio hilbertiano, (di Sobolev), $H^s(\mathbb{R}^n)$ (3). Un operatore P si dice sub-ellittico su Ω se è sub-ellittico in ogni punto di Ω.

§ 2. Il risultato qui ottenuto ha origine nel problema: studiare, a priori, le soluzioni delle equazioni alle derivate parziali, descrivendone le proprietà. Se $A = A(x, D) \in \Psi^\infty_0(\Omega)$ è un pseudodifferenziale propriamente supportato (4), e *strettamente ipoellittico*, $(\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $WF(Au) \equiv WF(u))$, risulta: $mr(u) \subseteq mr(Au)$.

Ciò è conseguenza del fatto che se $\mathcal{O}$ è un aperto di $\Omega \times S_{n-1}$ e $A \in \Psi^m_0(\Omega)$, $m \in \mathbb{R}$, e $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}^*)$, allora $Au \in H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}^*)$. Senza la stretta-ipoellitticità dell'operatore, si possono costruire esempi di operatori che modificano completamente l'insieme $mr(u)$. Ecco i tre tipi principali:

a) sia $P_0 = (x_0, \xi^0) \in mr(u)$: se $A \in \Psi^\infty_0(\Omega)$ e $\mathcal{O}$ è un intorno di P_0, in $\Omega \times S_{n-1}$, tale che $A \in \Psi^{-\infty}(\mathcal{O}^*)$, allora $P_0 \notin mr(Au)$. Ciò perchè $\mathcal{O} \cap WF(Au) \subseteq [\mathcal{O} \cap WF(A)] \cap WF(u) = \emptyset$ (5).

---

(2) $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}^*) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega)$: $\forall \varphi(x) \in C^\infty_c(\Omega)$ e $\forall g(x, \xi) \in C^\infty_c(\mathcal{O})$, $g(x, D)(\varphi u) \in \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$. Qui $g(x, D)$ indica il pseudodifferenziale di ordine $\leqslant 0$ il cui simbolo si ottiene dalla funzione $g(x, \xi)$ prolungandola, per omogeneità, su $\Omega \times \{\mathbb{R}_n - \{0\}\}$. Per il seguito: se $\mathcal{O}$ è un aperto di $\Omega \times S_{n-1}$, $C^\infty(\mathcal{O}^*) = \bigcap_s H^s_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}^*)$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Se $\pi\colon \Omega \times S_{n-1} \to \Omega$ è la proiezione, $\pi(x, \xi) = x$, si noti che se $u \in C^\infty(\mathcal{O}^*)$ ciò *non* implica: $u \in C^\infty(\pi(\mathcal{O}))$.

(3) Per lo studio degli operatori sub-ellittici, si vedano: [5], nel quale è stato iniziato; [2], nel quale gli operatori sono stati caratterizzati.

Una stima del tipo: $\|\varphi\|_{m-1+\delta} \leqslant C\|P\varphi\|_0$ è equivalente ad una stima del tipo: $\forall s \in \mathbb{R}$ esiste V_s intorno di x_0 in Ω e $C_s > 0$ con: $\|\varphi\|_{s+m+1-\delta} \leqslant C_s\|P\varphi\|_s$, $\forall \varphi \in C^\infty_c(V_s)$. Per controllare la validità di tali stime è necessario e sufficiente controllarle sulla parte principale, $p(x, D)$, di $P(x, D)$: $p(x, D) = \sum_{|\alpha|=m} a^\alpha(x) D^\alpha$

(4) Per la definizione dei pseudodifferenziali si veda: [4], pag. 102. Per la definizione di pseudodifferenziale propriamente supportato: [4], pag. 103.

(5) Dire che $A \in \Psi^{-\infty}(\mathcal{O}^*)$ significa: $\forall g(x, \xi) \in C^\infty_c(\mathcal{O})$, se $\sigma_A(x, \xi)$ indica il simbolo di A, $g(x, \xi)\sigma_A(x, \xi) \in S^{-\infty}(\Omega) = \bigcap_m S^m(\Omega)$, $\forall m \in \mathbb{R}$. $S^m(\Omega)$ è lo spazio dei simboli di ordine $\leqslant m$ su Ω. Si veda [6].

b) In [1] l'A. ha dimostrato: se $P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a^\alpha D^\alpha$, $a^\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ il corpo complesso, è un operatore, ipoellittico, (e quindi strettamente ipoellittico), $mr(u) \equiv mr(Au)$.

c) Per ultimo si vuol costruire un esempio di pseudodifferenziale e una distribuzione $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ con: $mr(u) = \emptyset$ e $mr(Au) \neq \emptyset$.

In $\mathbb{R}^2$ si consideri una successione di corone circolari di centro $(0, 0)$, e raggi esterni decrescenti a zero. Sia $\{\Gamma_p\}$ tale successione; $\forall p \in \mathbb{N}$ sia $\alpha_p(x) \in C_c^\infty(\Gamma_p)$; si consideri la serie: $\sum_{1}^{\infty}{}_p \left(\alpha_p(x)/(1+|\xi|^2)^p\right)$. Tale serie determina, in $S^0(\mathbb{R}^2)$, un simbolo $a(x, \xi)$; il resto n-esimo di quella serie, poi, determina in $S^{-2n}(\mathbb{R}^n)$ un simbolo $a_p(x, \xi)$. ([6]).

Sia $\{x_p\}$ una successione di punti in $\mathbb{R}^2$ con $\alpha_p(x_p) \neq 0$; sia u una distribuzione con supporto compatto, $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, tale che: se $\xi^0 \in S_1$, $WF(u) \ni \{(x_n, \xi^0), (0, \xi^0)\}$. Sia $A = A(x, D)$ il pseudodifferenziale di ordine ≤ 0 il cui simbolo, $\sigma_A(x, \xi)$, è $a(x, \xi)$ di sopra. Dimostriamo che $(0, \xi^0) \in WF(Au)$. Infatti, se così non fosse si potrebbe trovare, in $\mathbb{R}^2 \times S_1$, un intorno di $(0, \xi^0)$, $U \times V$, U intorno di 0 in $\mathbb{R}^2$ e V intorno di ξ^0 in S_1, tale che $Au \in C^\infty((U \times V)^*)$. Per p grande $(x_p, \xi^0) \in U \times V$ e si può supporre $\Gamma_p \subseteq U$. Se $\beta(x) \in C_c^\infty(\Gamma_p)$ e $\beta(x_p) = 1$ e $g(x, \xi) \in C_c^\infty((U \times V))$, deve essere $g(x, D)[\beta(x)Au] \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Il simbolo del pseudodifferenziale composto: $g(x, D)\circ\beta(x)\circ A(x, D)$ è influenzato dal solo termine p-esimo della serie che determina $A(x, D)$; ne deriva che: poichè il pseudodifferenziale $\beta(x)\circ A(x, D)$ è ellittico di ordine $-2p$ in (x_p, ξ^0) se $g(x_p, \xi^0) = 1$, $g(x, D)\circ\beta(x)\circ A(x, D)$ è ellittico in (x_p, ξ^0) e quindi (x_p, ξ^0) non può essere in $WF(u)$. Si è dimostrato così: $(0, \xi^0) \in WF(Au)$.

Dimostriamo ora che $(0, \xi^0) \in mr(Au)$ sicchè se si sceglie u con le proprietà indicate e con $mr(u) = \emptyset$ l'esempio con le proprietà indicate in *c*) è ottenuto. Infatti: sia $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$; se $\mathcal{O}$ è un intorno sufficientemente piccolo di $(0, \xi^0)$ per ogni $\alpha(x) \in C_c^\infty(\pi(\mathcal{O}))$ e $g(x, \xi) \in C_c^\infty(\mathcal{O})$, il pseudodifferenziale $g(x, D)\circ\alpha(x)\circ A(x, D)$ è di ordine $\leq -k$, k un intero positivo, con, al decrescere di $\mathcal{O}$, $-k \to -\infty$. Ne risulta: $A(x, D)u \in H^{k+s}_{\text{loc}}(\mathcal{O}^*)$.

([6]) Il senso con cui si deve intendere la convergenza della serie in $S^0(\mathbb{R}^2)$ o del suo resto n-esimo in $S^{-2n}(\mathbb{R}^2)$, è specificato in [6], pag. 146, Teorema 2.7.

3. Dimostrazione di A) del § 1.

Prima di passare alla dimostrazione diretta di A), si vogliono ricordare due proposizioni, a) e b), utili a quella dimostrazione. b) *rappresenta una estesione di un risultato di* [2]: là è dimostrato, pag. 332, che ogni sub-ellittico è ipoellittico; b) dice che ogni sub-ellittico è strettamente ipoellittico.

a) Sia $P = P(x, D)$ un polinomio differenziale, su Ω, ipoellittico, ($\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sing supp $(Pu) \equiv$ sing supp u). Se ${}^tP = {}^tP(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha(a^\alpha(x))$ è il suo trasposto, ${}^tP$ è localmente risolubile su Ω, cioè: $\forall x_0 \in \Omega$, si può trovare un intorno di x_0, V, tale che: $\forall \varphi(x) \in C_c^\infty(V)$ esiste $u \in \mathcal{D}'(V)$ con ${}^tPu = {}^tP(x, D)u = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha(a^\alpha(x)u) = \varphi$.

La dimostrazione di a) si può trovare in: Comunications on pure and Applied Mathematics, Vol. XXII, pagg. 637-651, (1970), pag. 640.

b) Sia $P = P(x, D)$ un polinomio differenziale su Ω, ipoellittico e localmente risolubile. P è strettamente ipoellittico, cioè: $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $WF(Pu) \equiv WF(u)$.

Osservazione. Poichè ogni sub-ellittico è ipoellittico [2], pag. 332, ed ha il suo trasporto ancora sub-ellittico, ogni sub-ellittico è strettamente ipoellittico.

Dimostrazione di b). Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, si indica con $\mathcal{O}_u$ il complementare, in $\Omega \times S_{n-1}$, di $WF(u)$. Nelle ipotesi di b) si deve far vedere che: $\mathcal{O}_{Pu} \subseteq \mathcal{O}_u$, risultando sempre $\mathcal{O}_{Pu} \supseteq \mathcal{O}_u$. Sia allora $P_0 = (x_0, \xi^0) \in \mathcal{O}_{Pu}$, Scelti $\alpha(x) \in C_c^\infty(\Omega)$ e $g(x, \xi) \in C_c^\infty(\mathcal{O}_{Pu})$ in modo che: $\alpha(x^0) = 1$ e $g(x^0, \xi^0) = 1$. si ha: $g(x, D)[\alpha(x)Pu] \in C^\infty(\pi(\mathcal{O}_{Pu}))$ e quindi, senza restrizioni, si può supporre $g(x, D)[\alpha(x)Pu] \in C^\infty(\omega)$, ω intorno di x_0, e P risolubile in ω. Esiste allora $v \in C^\infty(\omega)$ con $Pv = g(x, D)(\alpha(x)Pu)$ e per l'ellitticità di $g(x, D) \circ \alpha(x)$, $P_0 \in \mathcal{O}_u$.

La dimostrazione è completa.

Dimostrazione di A). Sia $P_0 = (x^0, \xi^0) \in mr(Pu)$. Se s è un numero reale, esiste $\mathcal{O}_s$, un aperto di $\Omega \times S_{n-1}$, $P_0 \in \mathcal{O}_s$, tale che $Pu \in$

Nota: *L'autore non sa se*: ogni $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a^\alpha(x) D^\alpha$, $a^\alpha(x) \in C^\infty(\Omega)$, che è ipoellittico sia anche strettamente ipoellittico.

$\in H^s_{loc}(\mathcal{O}^*_s)$. Scelte: $\alpha(x) \in C^\infty_c(\Omega)$ e $g(x, \xi) \in C^\infty_c(\mathcal{O}_s)$ con $\alpha(x_0) = 1$ e $g(P_0) = 1$, si può supporre $v = g(x, D)[\alpha(x) Pu]$, $(v \in H^s(\mathbb{R}^n))$, con supporto compatto in ω, un intorno di x_0 in Ω, e ω tale che: $\forall \varphi(x) \in C^\infty_c(\omega)$, $\|\varphi\|_s \leqslant C_s \|{}^tP\varphi\|_{(s+m-1+\delta_0)}$. Con il solito procedimento per i teoremi di esistenza per gli operatori differenziali tra spazi normali di distribuzioni, spazi che sono bilbertiani, si ha: esiste $v_1 \in H^{s+m-1+\delta_0}_{loc}(\omega_1)$, $\omega_1 \subset \omega$, ω_1 un aperto intorno di x_0 tale che: $Pv_1 = v$ in ω_1 (1). Poichè v è la trasformata di Pu mediante un operatore pseudodifferenziale ellittico in un intorno di P_0, $Pv_1 \equiv Pu$ mod. $C^\infty(\mathcal{O}'^*)$, con $\mathcal{O}'$ un conveniente intorno di P_0.

Poichè P è strettamente ipoellittico su Ω, $v_1 = u + v_2$ con $v_2 \in \in C^\infty(\mathcal{O}'^*)$ e quindi $u \in H^{s+m-1+\delta_0}_{loc}(\mathcal{O}'^*)$.

La dimostrazione è completa risultando: $mR(u) \supseteq mR(Pu)$.

Osservazione. Se si paragona il risultato di [1], ((ogni operatore differenziale su Ω, a coefficienti costanti ed ipoellittico è tale che: $mr(Pu) \equiv mr(u)$), con il risultato del presente lavoro, si può notare un interessante parallelo: in ambedue i casi sono verificate le ipotesi di ipoellitticità e locale risolubilità dell'operatore, (che garantiscono, come si può vedere dalla dimostrazione di b) di sopra, la sua stretta ipoellitticità e quindi il fatto che $mR(u) \subseteq mR(Pu)$).

A conseguenza si può prospettare la validità della seguente congettura:

Ogni operatore ipoellittico e localmente risolubile è tale che: $mr(Pu) = = mr(u)$.

BIBLIOGRAFIA

1] G. Bratti, *Sul comportamento degli operatori differenziali ipoellitticia, coefficienti costanti, sopra il «wave front set» delle distribuzioni*, Rend. Sem. Mat. dell'Università di Padova, (1973), Vol. 51,

[2] J. V. Egorov, *Pseudodifferential operators of principal type*, Math. USSR-Sbornik, **2** (1967), no. 3.

---

(1) I teoremi di esistenza ai quali si allude si possono ritrovare in *Linear Partial Differential Equations with constant coefficients*, Gordon and Breach, 1966, pagg. 142-145.

[3] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, 1969.
[4] L. HÖRMANDER, *Fourier Integral Operators, I*, Acta Math., **127** (1971)-
[5] L. HÖRMANDER, *Pseudodifferential operators and nonelliptic boundary prob. lems*, Annals of Math., **83** (1966).
[6] L. HÖRMANDER, *Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations* Proc. Symp. Pure Math., **10** (1967).
[7] L. HÖRMANDER, *Hypoelliptic differential operators*, Ann. Inst. Fourier (1961).

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 novembre 1973.