

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANNA MARIA BRESQUAR

Sulla diseguaglianza di Wirtinger

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 51 (1974), p. 257-268

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__51__257_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sulla diseguaglianza di Wirtinger.

ANNA MARIA BRESQUAR (*)

SUMMARY - Some Wirtinger inequalities are constructed for functions with n zeros. Extremum properties of the constant and other features of the extremals are proved.

Introduzione.

È nota come diseguaglianza di Wirtinger la seguente

$$(1) \quad \int_0^h y^2 dx < \lambda \int_0^h \{y'\}^2 dx ,$$

dove y è una funzione di classe C^1 soddisfacente ad una delle seguenti condizioni:

$$(2) \quad \int_0^h y dx = 0 ,$$

$$(3) \quad y(0) = y(h) = 0 ,$$

$$(4) \quad y(0) = 0 ,$$

oppure

$$(5) \quad y(h) = 0 .$$

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata dell'Università di Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

Si sa che i corrispondenti valori di λ e le funzioni estremali sono rispettivamente:

$$(2') \quad \lambda = \frac{h^2}{4\pi^2}, \quad y = c_1 \sin \frac{2\pi x}{h} + c_2 \cos \frac{2\pi x}{h},$$

$$(3') \quad \lambda = \frac{h^2}{\pi^2}, \quad y = c \sin \frac{\pi x}{h},$$

$$(4') \quad \lambda = \frac{4h^2}{\pi^2}, \quad y = c \sin \frac{\pi x}{2h},$$

$$(5') \quad \lambda = \frac{4h^2}{\pi^2}, \quad y = c \cos \frac{\pi x}{2h}.$$

In questo lavoro (*) stabilisco la disuguaglianza (1) sotto le condizioni

$$y(x_1) = y(x_2) = \dots = y(x_n) = 0,$$

dove

$$0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq h,$$

determinando il valore di λ e le corrispondenti estremali.

Per non rinunciare a queste ultime, conviene supporre che $y(x)$ sia assolutamente continua con derivata in L^2 ; vengono tuttavia segnalati i casi in cui esistono estremali in C^1 . Si determina pure, per ogni scelta di x_1, x_2, \dots, x_n , la dimensione dello spazio lineare delle estremali.

Infine si ottengono minimo e massimo di λ . Il minimo viene assunto per $x_i = ((2i-1)h)/2n$ ($i = 1, 2, \dots, n$) e vale $h^2/(n^2\pi^2)$. Il massimo corrisponde al caso limite $x_i = 0$ (oppure $x_i = h$) per $i = 1, \dots, n$, e vale $4h^2/\pi^2$.

Per comodità di esposizione il problema viene trattato dapprima per $n = 1$ e per $n = 2$, poi nel caso generale.

1. La disuguaglianza di Wirtinger con $y(x_1) = 0$.

In questo paragrafo, preso $x_1 \in [0, h]$, studio la (1) con la condizione $y(x_1) = 0$ ottenendo così una prima generalizzazione delle con-

(*) L'origine di questa ricerca si trova in un'osservazione contenuta nel § 1 di [5].

dizioni (4) e (5). Se $0 \leq x_1 \leq h/2$ otterrò che la (1) sarà verificata per $\lambda = (4(h-x_1)^2)/\pi^2$ ed avrà come estremali

$$(6) \quad y = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq x_1), \\ c \sin \frac{\pi(x-x_1)}{2(h-x_1)} & (x_1 \leq x \leq h). \end{cases}$$

Se $h/2 \leq x_1 \leq h$ avrò $\lambda = 4x_1^2/\pi^2$ e le estremali saranno

$$(7) \quad y = \begin{cases} c \cos \frac{\pi x}{2x_1} & (0 \leq x \leq x_1), \\ 0 & (x_1 \leq x \leq h). \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\int_0^h y^2 dx = \int_0^{x_1} y^2 dx + \int_{x_1}^h y^2 dx.$$

Poichè $y(x_1) = 0$, al primo integrale posso applicare la (1) con una condizione di tipo (5) ed al secondo la (1) con una condizione di tipo (4). Si ottiene subito

$$\begin{aligned} \int_0^h y^2 dx &\leq \frac{4x_1^2}{\pi^2} \int_0^{x_1} \{y'\}^2 dx + \frac{4(h-x_1)^2}{\pi^2} \int_{x_1}^h \{y'\}^2 dx \leq \\ &\leq \max \left[\frac{4x_1^2}{\pi^2}, \frac{4(h-x_1)^2}{\pi^2} \right] \int_0^h \{y'\}^2 dx. \end{aligned}$$

Se

$$\lambda = \max \left[\frac{4x_1^2}{\pi^2}, \frac{4(h-x_1)^2}{\pi^2} \right] = \frac{4x_1^2}{\pi^2}, \quad \text{cioè se } \frac{h}{2} \leq x_1 \leq h,$$

le estremali sono proprio date da (7).

Se

$$\lambda = \max \left[\frac{4x_1^2}{\pi^2}, \frac{4(h-x_1)^2}{\pi^2} \right] = \frac{4(h-x_1)^2}{\pi^2}, \quad \text{cioè se } 0 \leq x_1 \leq \frac{h}{2},$$

le estremali sono ovviamente date da (6).

OSSERVAZIONE 1^a. Le funzioni estremali trovate non sono in generale di classe C^1 . Fanno eccezione i casi già noti, corrispondenti ad $x_1 = 0$ oppure $x_1 = h$, ed il caso $x_1 = h/2$ in cui posso prendere oltre alle (6) ed alle (7), in questo caso simultaneamente valide, anche

$$y = \begin{cases} c \cos \frac{\pi x}{h} & \left(0 \leq x \leq \frac{h}{2}\right), \\ -c \sin \frac{\pi(2x-h)}{2h} & \left(\frac{h}{2} \leq x \leq h\right), \end{cases}$$

cioè $y = c \cos(\pi x/h)$ in tutto l'intervallo $[0, h]$.

OSSERVAZIONE 2^a. Si noti che, mentre per un generico valore di x_1 le funzioni estremali dipendono da una costante arbitraria, per $x_1 = h/2$ le funzioni estremali dipendono da due costanti arbitrarie. Infatti le funzioni (6) e (7) sono in questo caso relative allo stesso valore di $\lambda = h^2/\pi^2$ e sono ortogonali, come pure le loro derivate, in $[0, h]$. Ne segue, indicata con y_1 una funzione (6) e con y_2 una funzione (7) che

$$\int_0^h (c_1 y_1 + c_2 y_2)^2 dx = \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^h (c_1 y_1' + c_2 y_2')^2 dx.$$

OSSERVAZIONE 3^a. Il caso $x_1 = h/2$ presenta un terzo motivo di interesse; infatti il minimo di

$$\lambda = \max \left[\frac{4x_1^2}{\pi^2}, \frac{4(h-x_1)^2}{\pi^2} \right],$$

al variare di x_1 in $[0, h]$, si ottiene per $4x_1^2/\pi^2 = (4(h-x_1)^2)/\pi^2$ cioè per $x_1 = h/2$ e vale h^2/π^2 .

Il massimo di λ al variare di x_1 in $[0, h]$ si ottiene evidentemente per $x_1 = 0$ ed $x_1 = h$ e vale $4h^2/\pi^2$.

2. La disuguaglianza di Wirtinger con $y(x_1) = y(x_2) = 0$.

In questo paragrafo considero una generalizzazione di (3) ponendo

$$(8) \quad y(x_1) = y(x_2) = 0 \quad \text{con } 0 \leq x_1 < x_2 \leq h.$$

Tenuto conto delle soluzioni del problema con condizioni di tipo (5), (3), (4) relative agli intervalli $[0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, h]$, in modo analogo al paragrafo precedente si ottiene

$$\int_0^h y^2 dx \leq \max \left[\frac{4x_1^2}{\pi^2}, \frac{(x_2 - x_1)^2}{\pi^2}, \frac{4(h - x_2)^2}{\pi^2} \right] \int_0^h \{y'\}^2 dx .$$

La formula rimane valida anche se $x_1 = 0$ oppure $x_2 = h$.

Posto

$$\gamma_1 = \frac{4x_1^2}{\pi^2}, \quad \gamma_2 = \frac{(x_2 - x_1)^2}{\pi^2}, \quad \gamma_3 = \frac{4(h - x_2)^2}{\pi^2},$$

se $\lambda = \max(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_1$ le estremali sono date da

$$(9) \quad y = \begin{cases} c \cos \frac{\pi x}{2x_1} & (0 \leq x \leq x_1) . \\ 0 & (x_1 \leq x \leq h) , \end{cases}$$

Se $\lambda = \max(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_2$ le estremali sono date da

$$(10) \quad y = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq x_1) , \\ c \sin \frac{\pi(x - x_1)}{x_2 - x_1} & (x_1 \leq x \leq x_2) , \\ 0 & (x_2 \leq x \leq h) . \end{cases}$$

Se $\lambda = \max(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_3$ le estremali sono date da

$$(11) \quad y = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq x_2) , \\ c \sin \frac{\pi(x - x_2)}{2(h - x_2)} & (x_2 \leq x \leq h) . \end{cases}$$

Per discutere le diseguaglianze fra γ_1 , γ_2 , γ_3 in funzione di x_1 ed x_2 conviene usare una rappresentazione grafica.

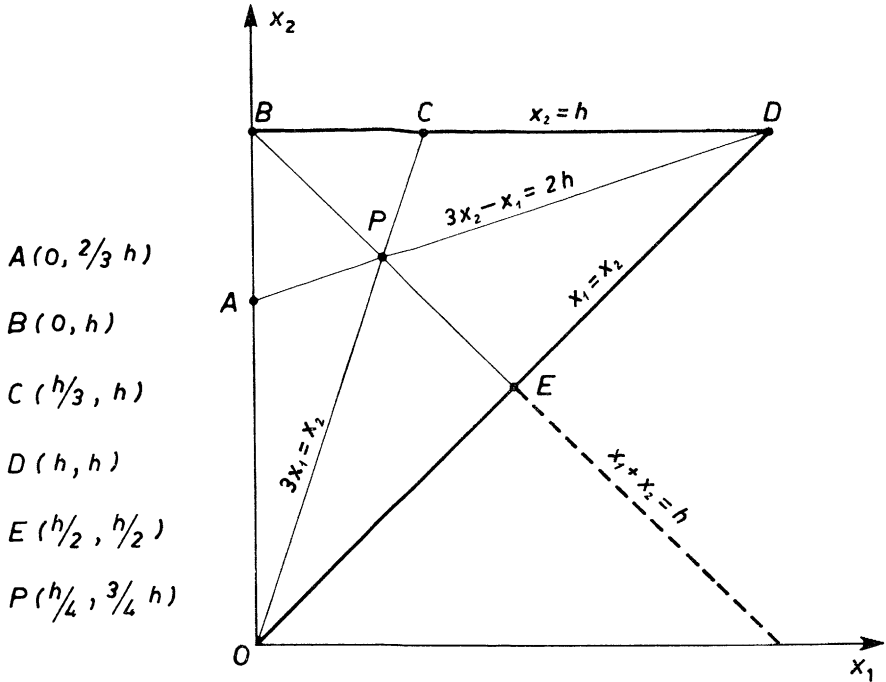
I punti del piano $x_1 x_2$ corrispondenti a valori accettabili per la (8) sono ovviamente tutti quelli del triangolo OBD escluso il lato OD in cui si ha $x_1 = x_2$. I punti di quest'ultimo lato corrispondono al problema trattato nel paragrafo precedente.

Si ha:

$\max(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_1$ nel quadrilatero $EPCD$,

$\max(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_2$ nel quadrilatero $APCB$,

$\max(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_3$ nel quadrilatero $OAPE$.



OSSERVAZIONE 1^a. Anche in questo problema le estremali non sono in generale di classe C^1 ; fanno eccezione i casi corrispondenti ai punti A, B, C, P .

Nel punto A si ha $x_1 = 0$, $x_2 = 2h/3$, quindi $\gamma_1 = 0$, $\lambda = \gamma_2 = \gamma_3 = 4h^2/9\pi^2$, e le estremali di classe C^1 sono date da

$$y = \begin{cases} c \sin \frac{3\pi x}{2h} & \left(0 \leq x \leq \frac{2}{3}h\right), \\ -c \sin \frac{\pi(3x-2h)}{2h} & \left(\frac{2}{3}h \leq x \leq h\right), \end{cases}$$

cioè da $y = c \sin(3\pi x/2h)$ in tutto l'intervallo $[0, h]$.

Il punto B corrisponde al caso già noto $x_1 = 0$, $x_2 = h$.

Nel punto C si ha (simmetricamente al caso del punto A) $x_1 = h/3$, $x_2 = h$, $\lambda = \gamma_1 = \gamma_2 = 4h^2/9\pi^2$, $\gamma_3 = 0$, e le estremali di classe C^1 sono date da $y = c \cos(3\pi x/2h)$ per $0 \leq x \leq h$.

Infine per il punto P si ha $x_1 = h/4$, $x_2 = 3h/4$, $\lambda = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = h^2/4\pi^2$ e le estremali di classe C^1 sono date da

$$y = \begin{cases} c \cos \frac{2\pi x}{h} & \left(0 \leq x \leq \frac{h}{4}\right), \\ -c \sin \frac{\pi(4x-h)}{2h} & \left(\frac{h}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}h\right), \\ c \sin \frac{\pi(4x-3h)}{2h} & \left(\frac{3}{4}h \leq x \leq h\right), \end{cases}$$

cioè $y = c \cos(2\pi x/h)$ in tutto l'intervallo $[0, h]$.

OSSERVAZIONE 2^a. Si noti che per una scelta generica di x_1 e x_2 le funzioni estremali dipendono da una costante arbitraria. Fanno eccezione i casi che in figura sono rappresentati dai punti dei segmenti AP , PC , PE .

Infatti nel punto P si ha

$$\lambda = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$$

e le funzioni estremali dipendono da tre costanti arbitrarie.

Sul segmento AP , privato del punto P , si ha

$$\lambda = \gamma_2 = \gamma_3 > \gamma_1$$

e le estremali dipendono da due costanti arbitrarie.

Condizioni analoghe si verificano sui segmenti CP , EP privati del punto P e le estremali dipendono sempre da due costanti arbitrarie.

Queste affermazioni si giustificano nello stesso modo di quelle fatte nell'Osservazione 2^a del paragrafo uno.

Come si vede, i casi in cui esistono estremali di classe C^1 sono compresi nella famiglia ora descritta.

OSSERVAZIONE 3^a. Anche in questo caso si possono ricercare il minimo ed il massimo di

$$\lambda = \max \left[\frac{4x_1^2}{\pi^2}, \frac{(x_2 - x_1)^2}{\pi^2}, \frac{4(h - x_2)^2}{\pi^2} \right]$$

al variare di x_1, x_2 in $[0, h]$.

Si ha che

$$\min \lambda = \frac{h^2}{4\pi^2} = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$$

è assunto per $x_1 = h/4, x_2 = 3h/4$.

La dimostrazione di questo risultato è rinviata all'Osservazione 3^a del successivo paragrafo, vale a dire al caso generale.

È poi evidente che

$$\sup \lambda = \frac{4h^2}{\pi^2},$$

e che questo valore può essere considerato un massimo se si ammette che x_1, x_2 possano coincidere.

A questo proposito, si riconosce che il caso limite $x_1 = x_2$ ci riporta al precedente paragrafo, e non dà luogo a condizioni speciali del tipo

$$y(x_1) = y'(x_1) = 0.$$

3. La disuguaglianza di Wirtinger con $y(x_1) = \dots = y(x_n) = 0$.

Per comodità di discorso supponiamo $n \geq 2$; scelti i valori $0 \leq x_1 < x_2 < x_3 \dots < x_n \leq h$, impongo le condizioni

$$(12) \quad y(x_1) = y(x_2) = \dots = y(x_n) = 0.$$

Si ha allora

$$\int_0^h y^2 dx \leq \max \left[\frac{4x_1^2}{\pi^2}, \frac{(x_2 - x_1)^2}{\pi^2}, \dots, \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{\pi^2}, \frac{4(h - x_n)^2}{\pi^2} \right] \int_0^h \{y'\}^2 dx.$$

Posto

$$\gamma_1 = \frac{4x_1^2}{\pi^2}, \quad \gamma_2 = \frac{(x_2 - x_1)^2}{\pi^2}, \quad \dots, \quad \gamma_n = \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{\pi^2}, \quad \gamma_{n+1} = \frac{4(h - x_n)^2}{\pi^2},$$

se $\lambda = \max(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}) = \gamma_1$ le estremali sono date da

$$(13) \quad y = \begin{cases} c \cos \frac{\pi x}{2x_1} & (0 \leq x \leq x_1), \\ 0 & (x_1 \leq x \leq h). \end{cases}$$

Se $\lambda = \max(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}) = \gamma_i$ (per $i = 2, 3, \dots, n$) le estremali sono date da

$$(14) \quad y = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq x_{i-1}), \\ c \sin \frac{\pi(x - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} & (x_{i-1} \leq x \leq x_i), \\ 0 & (x_i \leq x \leq h). \end{cases}$$

Se $\lambda = \max(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}) = \gamma_{n+1}$ le estremali sono date da

$$(15) \quad y = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq x_n), \\ c \sin \frac{\pi(x - x_n)}{2(h - x_n)} & (x_n \leq x \leq h). \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 1^a. Anche in questo caso le estremali trovate non sono in generale di classe C^1 ; fanno eccezione i casi:

Caso a)

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{h}{n-1}, \quad x_3 = 2 \frac{h}{n-1}, \dots, x_{n-1} = (n-2) \frac{h}{n-1},$$

$$x_n = h,$$

a cui corrispondono

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \gamma_n = \frac{h^2}{\pi^2(n-1)^2}, \quad \gamma_{n+1} = 0,$$

e le estremali di classe C^1

$$y = c \sin \frac{(n-1)\pi x}{h} \quad \text{per } 0 \leq x \leq h.$$

Caso b)

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2h}{2n-1}, \quad x_3 = \frac{4h}{2n-1}, \dots, x_n = \frac{2(n-1)h}{2n-1}$$

a cui corrispondono

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \gamma_{n+1} = \frac{4h^2}{\pi^2(2n-1)^2}$$

e le estremali di classe C^1

$$y = c \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2h} \quad \text{per } 0 \leq x \leq h.$$

Caso c)

$$x_1 = \frac{h}{2n-1}, \quad x_2 = 3 \frac{h}{2n-1}, \dots, x_{n-1} = (2n-3) \frac{h}{2n-1}, \quad x_n = h,$$

a cui corrispondono

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n = \frac{4h^2}{\pi^2(2n-1)^2}, \quad \gamma_{n+1} = 0,$$

e le estremali di classe C^1

$$y = c \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2h} \quad \text{per } 0 \leq x \leq h.$$

Caso d)

$$x_1 = \frac{h}{2n}, \quad x_2 = 3 \frac{h}{2n}, \dots, x_n = (2n-1) \frac{h}{2n},$$

a cui corrispondono

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{n+1} = \frac{h^2}{\pi^2 n^2},$$

e le estremali di classe C^1

$$y = c \cos \frac{n\pi x}{h} \quad \text{per } 0 \leq x \leq h.$$

OSSERVAZIONE 2^a. Anche ora per una scelta generica delle x_1, \dots, x_n le funzioni estremali dipendono da una costante arbitraria; fanno eccezione i casi in cui $\lambda = \max(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1})$ coincida con due o più delle $\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}$: Precisamente se k delle costanti $\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}$ confluiscono nel massimo λ le corrispondenti estremali dipendono da k costanti arbitrarie.

Come si vede i casi *a*), *b*), *c*), *d*) dell'osservazione precedente sono compresi nella famiglia ora descritta; le loro estremali dipendono rispettivamente da $n-1$, n , n , $n+1$ costanti arbitrarie.

OSSERVAZIONE 3^a. Ricerchiamo il minimo ed il massimo di

$$\lambda = \max \left[\frac{4x_1^2}{\pi^2}, \frac{(x_2 - x_1)^2}{\pi^2}, \dots, \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{\pi^2}, \frac{4(h - x_n)^2}{\pi^2} \right]$$

al variare di x_1, x_2, \dots, x_n in $[0, h]$.

TEOREMA. $\min \lambda = h^2/(n^2\pi^2)$, cioè $\lambda = \gamma_1 = \dots = \gamma_{n+1}$; il minimo è assunto quando

$$x_i = \frac{(2i-1)h}{2n} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano a_1, \dots, a_{n+1} numeri non negativi e siano p_1, \dots, p_{n+1} dei pesi (non negativi, non tutti nulli).

Osserviamo che nella disequaglianza

$$(16) \quad \left[\frac{\sum_1^{n+1} p_i a_i}{\sum_1^{n+1} p_i} \right]^2 \leq \frac{\sum_1^{n+1} p_i a_i^2}{\sum_1^{n+1} p_i} \leq \max \{a_i^2\},$$

il segno uguale vale soltanto se $a_1 = a_2 = \dots = a_{n+1}$.

Poniamo

$$a_i = \sqrt{\gamma_i}, \quad (i = 1, \dots, n+1),$$

cioè

$$a_1 = \frac{2x_1}{\pi}, \quad a_2 = \frac{x_2 - x_1}{\pi}, \dots, a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{\pi}, \quad a_{n+1} = \frac{2(h - x_n)}{\pi},$$

ed ancora

$$p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = 1, \dots, p_n = 1, \quad p_{n+1} = \frac{1}{2}.$$

Si trova

$$\frac{\sum_1^{n+1} a_i p_i}{\sum_1^{n+1} p_i} = \frac{h}{n\pi}$$

e quindi sostituendo nella (16)

$$\frac{h^2}{n^2\pi^2} \leq \max \{\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}\} = \lambda.$$

Il segno uguale, come detto sopra, vale solo se

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{n+1}.$$

Questa condizione si traduce in un sistema lineare nelle x_i che ha la soluzione prevista

$$x_i = \frac{(2i-1)h}{2n} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Rimane evidentemente vero che

$$\sup \lambda = \frac{4h^2}{\pi^2}$$

e che questo valore può essere considerato un massimo soltanto se si ammette che x_1, \dots, x_n possano coincidere assumendo tutte il valore zero oppure il valore h .

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. H. HARDY - J. E. LITTLEWOOD - G. PÓLYA, *Inequalities*, Cambridge University Press, II ed., 1959.
- [2] E. F. BECKENBACH - R. BELLMAN, *inequalities*, Berlin, Springer, 1965.
- [3] K. FAN - O. TAUSKY - J. TODD, *Discrete analogs of inequalities of Wirtinger*, Monatshefte für Mathematik, **59** (1955), 73-90.
- [4] P. R. BEESACK, *Integral inequalities of the Wirtinger type*, Duke Mathematical Journal, **25** (1958), 477-498.
- [5] U. RICHARD, *Sur des inégalités du type de Wirtinger et leur application aux équations différentielles ordinaires*, Proceedings of Colloquium of Analysis, Rio de Janeiro 1972 (in corso di stampa presso Hermann, Parigi).

Manoscritto pervenuto in redazione il 25 luglio 1973.