Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Giuliano Bratti

Sul comportamento degli operatori differenziali ipoellittici, a coefficienti costanti, sopra i « wave front sets »

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 51 (1974), p. 105-111

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__51__105_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 51 (1974)

Sul comportamento degli operatori differenziali ipoellittici, a coefficienti costanti, sopra i « wave front sets ».

GIULIANO BRATTI (*)

§ 1. Sia $A = A(x, D)$ un pseudodifferenziale, [2], pag. 102, su Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$: $A(x, D)$ *si dice ipoellittico* se $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sing supp $u =$ $=$ sing supp Au; *si dice strettamente ipoellittico* se $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $WF(u) =$ $= WF(Au)$, indicando con $WF(u)$ il wave front set della distribuzione u, [2], pag. 121 e § 2), definizione 2 di questo lavoro. È facile vedere che per i polinomi differenziali a coefficienti costanti le nozioni di ipoellitticità e stretta ipoellitticità coincidono.

Oggetto di questo lavoro è di mettere in evidenza come i polinomi differenziali ipoellittici conservino esattamente qualcosa di più del WF delle distribuzioni; si otterrà, infatti, il seguente:

$$\text{sia} \quad P(D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a^\alpha D^\alpha\,, \qquad \alpha^\alpha \in \mathbb{C}\,, \qquad \mathbb{C} \text{ il corpo complesso:}$$

a) $P(D)$ *è ipoellittico*; *b)* $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $MWF(u) = MWF(P(D)u)$ *e* $mr(u) = mr(P(D)\,u)$; *a)* *e* *b)* *sono proposizioni equivalenti.* (Le definizioni di $MWF(u)$ e $mr(u)$ sono in § 3). In § 4 si estenderà il teorema di sopra al caso di $P(D)$ parzialmente ipoellittico.

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Via Belzoni 3, 35100 Padova,
Lavoro eseguito presso la Rutgers University, New Brunswick, N. J.. U.S.A., con borsa di studio del C.N.R.

2. Preliminari. (1)

Sia Ω un aperto in $\mathbf{R}^n$; $S^*(\Omega)$ la cosfera fibrata di base Ω; π la proiezione di $S^*(\Omega)$ su Ω. u indicherà sempre una distribuzione su Ω, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\mathcal{O}$ un aperto di $S^*(\Omega)$.

1) $\forall s \in \mathbf{R}$, $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}^*) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \forall \varphi(x) \in C^\infty_c(\pi(\mathcal{O}))$ *e* $\forall g(x, \xi) \in C^\infty_c(\mathcal{O})$, $g(x, D)(\varphi u) \in H^s(\mathbf{R}^n)\}$ — $g(x, D)$ indica il pseudodifferenziale di ordine $\leqslant 0$ il cui simbolo è ottenuto prolungando, in $\Omega \times \{\mathbf{R}_n \setminus \{0\}\}$, per omogeneità la funzione $g(x, \xi)$. Posto: $C^\infty(\mathcal{O}^*) = \bigcap_s H^s_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}^*)$, $\forall s \in \mathbf{R}$ e $\mathcal{O}_u = \bigcup \{\mathcal{O} \subseteq S^*(\Omega) : u \in C^\infty(\mathcal{O}^*)\}$, il complementare di $\mathcal{O}_u$ in $S^*(\Omega)$ si dice il *« wave front set » di u e si indica con* $WF(u)$.

Indicato con $S^m(\Omega)$ lo spazio (di Frechet) dei simboli di ordine $\leqslant m$ su Ω (2), si pone: $S^m(\mathcal{O}^*) = \{a(x, \xi) \in S^\infty(\Omega) = \bigcup_m S^m(\Omega)$, $\forall m \in \mathbf{R}$: $\forall g(x, \xi) \in C^\infty_c(\mathcal{O})$, $g(x, \xi)\, a(x, \xi) \in S^m(\Omega)\}$ e si indica con $\Psi^m(\mathcal{O}^*)$ lo spazio dei pseudodifferenziali di ordine $\leqslant m$, $A(x, D)$, congruenti,

$$mod.\ \Psi^{-\infty}(\Omega) = \bigcap_m \Psi^m(\Omega)\,, \qquad \forall m \in \mathbf{R},$$

a qualche operatore $\tilde{A}(x, D)$ il cui simbolo è in $S^m(\mathcal{O}^*)$. Si pone:

2) $\mathcal{O}_A = \bigcup \{\mathcal{O} \subseteq S^*(\Omega) : A \in \Psi^{-\infty}(\mathcal{O}^*)\}$ *e* $WF(A) = S^*(\Omega) \sim \mathcal{O}_A$, $A = A(x, D)$.

Se $A(x, D) \in \Psi^m(\mathcal{O}^*)$, risulta:

3) $A(x, D)\{H^s_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}^*)\} \subseteq H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}^*)$, da cui: $WF(Au) \subseteq WF(A) \cap \cap WF(u)$; ne segue:

I pseudodifferenziali decresono il wave front set delle distribuzioni.

---

(1) Quanto in questi preliminari si può trovare sviluppato in *An introduction to Pseudodifferential operators and to Fourier integral operators* di F. T. Per un'esposizione completa [2].

(2) $S^m(\Omega) = \{a(x, \xi) \in C^\infty(\Omega \times \mathbf{R}_n) : \forall K$ compatto in Ω e $\forall (p, q) \in \mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^n$, esiste una costante positiva, $C_{p,q}(K)$, tale che $|D^p_\xi D^q_x a(x, \xi)| \leqslant C_{p,q}(K)(1 + |\xi|)^{m-|p|}$, $\forall (x, \xi) \in K \times \mathbf{R}_n$. Al solito: $D_x = 1/i(\partial/\partial x)$. Se su $S^m(\Omega)$ si pone la topologia vettoriale fornita dalla famiglia di seminorme:

$$p_{p,q,K}(a) = \inf \{C_{p,q}(K) : |D^p_\xi D^q_x a(x, \xi)| \leqslant C_{p,q}(K)(1 + |\xi|)^{m-|p|}$$

se $(x, \xi) \in K \times \mathbf{R}_n$, $S^m(\Omega)$ risulta uno spazio di Frechet; vedere [2], pag. 83

4) Se $a(x, \xi) \in S^m(\Omega)$, $a(x, \xi)$ si dice ellittico in $(x_0, \xi^0) \in S^m(\Omega)$ se esiste un intorno $\mathcal{O}$ di (x_0, ξ^0) e una coppia di costanti positive, C e M, tali che: $\forall (x, \xi) \in \Omega \times \{\mathbb{R}_n \setminus \{0\}\}$ con $|\xi| > M$, $|\xi|^m \leqslant C|a(x, \xi)|$, se $(x, \xi/|\xi|) \in \mathcal{O}$. $a(x, \xi)$ si dice ellittico in $\mathcal{O}$ se è ellittico in ogni punto di $\mathcal{O}$.

5) se $A = A(x, D) \in \Psi^m(\Omega)$, A (3), è ellittico in $\mathcal{O}$ se per ogni aperto relativamente compatto $\mathcal{O}'$ in $\mathcal{O}$ esiste $B = B(x, D) \in \Psi^{-m}(\Omega)$ con $A \circ B \equiv B \circ A \equiv I \bmod . \Psi^{-\infty}(\mathcal{O}'^*)$.

Se si indica con C_A il complementare, in $S^*(\Omega)$, del più grande aperto su cui $A = A(x, D)$ è ellittico, risulta:

6) $WF(u) = \bigcap C_A$, $\forall A \in \Psi^\infty(\Omega)$: $Au \in C^\infty(\Omega)$ (4).

Prima di terminare questi preliminari, si vuol mettere in evidenza che ogni qualvolta si userà, come è già stata usata, la scrittura Au, A pseudodifferenziale, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, si intende che A è propriamente supportato [2], pag. 103 (se $A \in \Psi^n(\Omega)$, $A: C_c^\infty(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ in modo continuo e si può estendere, per continuità, da $\mathcal{E}'(\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$; se $A \in \Psi^m(\Omega)$ ed è propriamente supportato, $A(\mathcal{E}'(\Omega)) \subseteq \mathcal{E}'(\Omega)$ e si può estendere da $\mathcal{D}'(\Omega)$ in sè).

§3. Siano $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $s \in \mathbb{R}$:

DEFINIZIONE 1. $R_s(u) = \bigcup \{\mathcal{O} \subseteq S^*(\Omega): u \in H^s_{\text{loc}}(\mathcal{O}^*)\}$; $WF_s(u) = S^*(\Omega) \setminus R_s(u)$; $R_\infty(u) = \bigcap_s R_s(u)$, $\forall s \in \mathbb{R}$; $mr(u) = WF(u) \cap R_\infty(u)$ *e* $MWF(u) = \bigcup_s WF_s(u)$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

Risulta subito da 1) di § 2 che l'interno di $R_\infty(u)$ coincide con $\mathcal{O}_u$; sicchè: $MWF(u)$ è denso in $WF(u)$ e $WF(u) = mr(u) \bigcup MWF(u)$. Il seguente esempio dà una distribuzione u per la quale $mr(u) \neq \emptyset$. In $\mathbb{R}^2$ sia Γ_n una successione di corone circolari di centro $(0, 0)$ e raggi $1/(n+1)$, $1/n$. $\forall n$, $u_n(x, y) \in \mathcal{E}'(\Gamma_n) \cap H^n(\mathbb{R}^2)$, $u_n(x, y) \notin H^{n+1}(\mathbb{R}^2)$, $\|u_n(x, y)\|_n \leqslant 1/n^2$. La serie $\sum_{1}^{\infty}{}_n u_n(x, y)$ è convergente in $H^1(\mathbb{R}^2)$ e il suo resto n-esimo, $\sum_{n}^{\infty}{}_k u_k(x, y)$ in $H^n(\mathbb{R}^2)$. Posto $C_m = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1/m\}$,

(3) Il suo simbolo.

(4) Risulta, anche: $WF(u) = \bigcap C_A$, $\forall A \in \Psi^0(\Omega)$: $Au \in C^\infty(\Omega)$, con il che si ha la definizione originale del WF, data da L. Hörmander [2], pag. 120. Si veda anche [3].

$\exists\varphi(x, y) \in \mathbb{C}_c^\infty(C_m)$, $\varphi(x, y)u \in H^m(\mathbb{R}^2)$ ma $\varphi(x, y)u \notin H^{m+1}(\mathbb{R}^2)$. Ne risulta che $(0, 0, \xi)$, $\forall \xi \in S_1$, la circonferenza unità in $\mathbb{R}_2$, è in $mr(u)$.

$\forall s \in \mathbb{R}$ e $Au \in \mathcal{D}'(\Omega)$, sia $w_s(u) = \{x \in \operatorname{sing\,supp} u\colon \forall V$ intorno di x $\exists \varphi(x) \in \mathbb{C}_c^\infty(V)$ con $\varphi(x)u \notin H^s(\mathbb{R}^n)\}$. Indicato, inoltre, con Ω' un aperto in Ω, e con u/Ω' la restrizione di u sopra Ω', risulta:

Proposizione 1. $\pi WF_s(u) = \omega_s(u)$; $WF_s(u/\Omega') = WF_s(u) \cap \pi^{-1}(\Omega')$.

Dimostrazione. $\pi WF_s(u) = \omega_s(u)$: l'inclusione da sinistra a destra risulta dal fatto che se $(x_0, \xi_0) \in WF_s(u)$ e $x_0 \notin \omega_s(u)$, $\exists V$ intorno di x_0 tale che $\forall \varphi(x) \in \mathbb{C}_c^\infty(V)$, $\varphi(x)u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Ciò implica che $V \times S_{n-1} \in R_s(u)$. L'inclusione inversa deriva dal fatto che se $x_0 \in \omega_s(u)$ e $\forall \xi \in S_{n-1}$, $(x_0, \xi) \notin WF_s(u)$, poichè (x_0, S_{n-1}) è compatto in $S^*(\Omega)$, $\exists V$ intorno di x_0 con $V \times S_{n-1} \subseteq R_s(u)$. Poichè $1 = 1(\xi) \in \mathbb{C}_c^\infty(S_{n-1})$, $\forall \varphi \in \mathbb{C}_c^\infty(V)$ si avrebbe $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Assurdo.

$WF_s(u/\Omega') = WF_s(u) \cap \pi^{-1}(\Omega')$: passando ai complementari, l'inclusione da destra a sinistra è immediata; viceversa: se $(x_0, \xi^0) \in WF_s(u/\Omega')$, ovviamente $(x_0, \xi^0) \in \pi^{-1}(\Omega')$ e se non appartenesse a $WF_s(u)$, esisterebbe $\mathcal{O}$ aperto in $S^*(\Omega)$ con $(x_0, \xi^0) \in \mathcal{O} \subseteq R_s(u) \cap \pi^{-1}(\Omega')$. Ne deriverebbe: $(x_0, \xi^0) \in R_s(u/\Omega')$.

Osservazione 1. Si hanno buone proprietà dei WF_s e dell'mr sotto i diffeomorfismi. Se $\phi\colon \Omega \to \Omega'$, è un diffeomormismo di Ω su Ω', due aperti in $\mathbb{R}^n$, ϕ dà: *a*) un diffeomorfismo, ϕ_1, di $S^*(\Omega)$ su $S^*(\Omega')$; *b*) un isomorfismo, ϕ_2, di $\mathcal{D}'(\Omega)$ su $\mathcal{D}'(\Omega')$. Risulta, con facili computazioni: $WF_s(\phi_2(u)) = \phi_1 WF_s(u)$, $mr(\phi_2(u)) = \phi_1 mr(u)$.

Per la caratterizzazione dei WF_s si ha un risultato analogo a 6) di § 2:

Proposizione 2. *$WF_s(u) = \bigcap C_A$, $\forall A \in \Psi^\infty(\Omega)$ con $Au \in H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ se $A \in \Psi^m(\Omega)$; $WF_s(u) = \bigcap C_A$, $\forall A \in \Psi^0(\Omega)$ con $Au \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Se $A \in \Psi^m(\Omega)$ e $\mathcal{O}'_A$ è l'insieme di ellitticità di A, $\mathcal{O}'_A = S^*(\Omega) \setminus C_A$, risulta: $WF_s(u) \cap \mathcal{O}'_A = WF_{s-m}(Au) \cap \mathcal{O}'_A$. Infatti da 3) di § 2 risulta: $R_s(u) \cap \mathcal{O}'_A \subseteq R_{s-m}(Au) \cap \mathcal{O}'_A$.

Per l'inclusione inversa, basta osservare, usando 5) di § 2 che in $\mathcal{O}'_A$ A è invertibile: sicchè $R_s(u) \cap \mathcal{O}'_A = R_{s-m}(Au) \cap \mathcal{O}'_A$ da cui il risultato di sopra passando ai complementari del primo e del terzo termine. Si ha: se $A \in \Psi^n(\Omega)$ e $Au \in H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $R_{s-m}(Au) = S^*(\Omega)$, $R_s(u) \supseteq \mathcal{O}'_A$ così che $WF_s(u) \subseteq \bigcap C_A$. Se $(x_0, \xi^0) \notin WF_s(u)$ scelto $g(x, \xi) \in \mathbb{C}_c^\infty(R_s(u)^*)$ con $g(x_0, \xi^0) = 1$, $g(x, D)u \notin H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ così che $C_g \not\ni (x_0, \xi^0)$. L'ultima parte dimostra anche la seconda parte della proposizione.

Con gli stessi procedimenti si ha:

TEOREMA 1. *Sia* $A = A(x, D) \in \Psi^m(\Omega)$; *se* $\forall \mathcal{O}$ *relativamente compatto in* $S^*(\Omega)$ *esiste* $B = B(x, D) \in \Psi^{-m}(\Omega)$ *con* $A \circ B \equiv B \circ A \equiv I \cdot \operatorname{mod.} \Psi^{-\infty}(\mathcal{O}^*)$, *allora* $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $WF_s(u) = WF_{s-m}(Au)$ *e* $mr(u) = mr(Au)$.

Sia $A = A(D) \in \psi^m(\mathbb{R}^n)$ un pseudodifferenziale a coefficienti costanti $\big(\sigma(A(D) = a(\xi)$ indipendente da $x\big)$; risulta:

PROPOSIZIONE 3. *a*) $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $WF_s(u) = WF_{s-m}(Au)$; *b*) $A(D)$ *è ellittico*; *a*) *e* *b*) *sono proposizioni equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. L'implicazione $b) \Rightarrow a)$ è nel teorema 1); per il viceversa; nel caso che $A(D)$ sia un polinomio differenziale, il risultato deriva da una applicazione degli spazi $\mathcal{B}^{\text{loc}}_{p,k}(\Omega)$ [1], cap. 2; infatti: se $u \in \mathcal{B}^{\text{loc}}_{p,k_s\tilde{P}}(\Omega)$, $P(D)u \in H^s_{\text{loc}}(\Omega)$; $WF_s(P(D)u) = \emptyset$ così che $WF_{s+m}(u) = \emptyset$ Ne deriva che: $\mathcal{B}^{\text{loc}}_{p,k_s\tilde{P}}(\Omega) \subseteq \mathcal{B}^{\text{loc}}_{p,k_{g+m}}(\Omega)$. Per il teorema 2.3.3, pag. 43 di [1] risulta: $(1 + |\xi|^2)^n \leqslant C\tilde{P}(\xi)^2$, $C > 0$. La conclusione è allora nel teorema 3.3.6 di pag. 75 di [1] ($P(D)$ *è ellittico se e solo se è più forte di ogni operatore di ordine non superiore*). Nel caso generale la dimostrazione è quasi la stessa.

La proposizione 3) dimostra che se $A(x, D) \in \psi^\infty(\Omega)$ ed è strettamente ipoellittico, senza essere localmente invertibile a sinistra su $S^*(\Omega)$, l'analisi del comportamento di $A(x, D)$ sopra i singoli WF_s risulta piuttosto complicata. Comunque, se ci si limita al caso dei polinomi differenziali a coefficienti costanti ed alla loro analisi sopra l'MWF si può ottenere, per mezzo di una definizione opportuna degli spazi $\mathcal{B}^{\text{loc}}_{p,K}(\mathcal{O}^*)$ sopra gli aperti $\mathcal{O}$ di $S^*(\Omega)$, qualche risultato.

DEFINIZIONE 2. $1 \leqslant p < +\infty$, $k = k(\xi)$ *come in* [1], *pag.* ($\xi \in$ $\mathcal{O}$ *aperto in* $S^*(\Omega)$. $\mathcal{B}^{\text{loc}}_{p,k}(\mathcal{O}^*) = \big\{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \forall \varphi(x) \in C^\infty_c(\pi(\mathcal{O}))$ *e* $\forall g(x,$ 43, $\in C^\infty_c(\mathcal{O})$, $g(x, D)(\varphi u) \in \mathcal{B}^c_{p,k}(\Omega)\big\}$.

L'unico risultato utile al seguito a proposito degli spazi $\mathcal{B}^{\text{loc}}_{p,K}(\mathcal{O}^*)$ è il seguente: se si indica con: $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a^\alpha \xi^\alpha$, $a^\alpha \in \mathbb{C}$, un polinomio di grado $\leqslant m$, posto $\tilde{P}(\xi)^2 = \sum_{|\alpha| \geqslant 0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2$, $P^{(\alpha)}(\xi) = \partial^\alpha P(\xi)$, risulta: ${}^{\text{loc}}_{p_1 k}(\mathcal{O}^*) \subseteq \mathcal{B}^{\text{loc}}_{p_1 k/\tilde{P}}(\mathcal{O}^*)$.

L'inclusione si dimostra applicando la definizione di sopra ed il teorema 2.2.2 di [1], pag. 37.

TEOREMA 2. *Sia* $P(D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a^\alpha D^\alpha$, $a^\alpha \in \mathbb{C}$; *se* $P(D)$ *è ipoellittico*: $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^n$, $MWF(u) = MWF(P(D)u)$ *e* $mr(u) = mr(P(D)u)$. *E viceversa.*

Dimostrazione. Il viceversa è immediato: deriva dal fatto che $MWF(u)$ è denso in $WF(u)$. Per il resto, basterà limitarsi alle $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ e dimostrare: $mr(u) = mr(P(D)u)$. L'inclusione da sinista a destra è vera qualunque sia $A(x, D) \in \Psi^{\infty}(\Omega)$ strettamente ipoellittico; rimane da dimostrare, allora, $mr(P(D)u) \subseteq mr(u)$. Sia $(x_0, \xi_0) \in mr(P(D)u)$; fissato $s \in \mathbb{R}$, siano ω e ω' intorni di x_0 e ξ_0 rispettivamente, in Ω ed in S_{n-1}, con la proprietà: se $k_s(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2}$ risulti: $P(D)u \in \in \mathcal{B}^{\mathrm{loc}}_{2,k_s/\tilde{P}}((\omega \times \omega')^*)$. L'esistenza di siffatti intorni deriva dall'osservazione al seguito della definizione 2). $\forall \varphi(x)$ e $\psi(x) \in C^{\infty}_c(\omega)$, fissata $g(\xi) \in C^{\infty}_c(\omega')$ con $g(\xi_0) = 1$, risulta: $(\varphi(x) \otimes g(D)(\{\psi(x)(P(D)u)\} \in \mathcal{B}^{c}_{2,k_s/\tilde{P}}(\omega)$ così che scegliendo $\psi(x) \equiv 1$ sul supporto di $\varphi(x)$, risulta anche $(\varphi(x) \otimes \otimes g(D))\{P(D)u\}$ nello stesso spazio. Ne segue: $g(D)(P(D)u) \in \mathcal{B}^{\mathrm{loc}}_{2,k_s/\tilde{P}}(\omega)$. Gli operatori $g(D)$ e $P(D)$ sono invertibili e per la ipoellitticità di $P(D)$, $g(D)u \in \mathcal{B}^{\mathrm{loc}}_{2,k_s}(\omega) = H^s_{\mathrm{loc}}(\pi^{-1}(\omega))$. $g(D)$ è ellittico in (x_0, ξ^0): scelto $\mathcal{O}$ in $\pi^{-1}(\omega)$ in modo che esista $h(D) \in \Psi^0{\circ}(\Omega)$ con $h(D) \circ g(D) \equiv I$ mod. $\Psi^{-\infty}(\mathcal{O}^*)$, risulta: $h(D)(g(D)u) \in H^s_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}^*)$, per 3) di § 2, e $h(D)(g(D)u) - u \in C^{\infty}(\mathcal{O}^*)$. Così che: $(x_0, \xi^0) \in R_s(u)$. Per la ipoellitticità di $P(D)$ si ha allora: $MW(u) = MWF(P(D)u)$ e $mr(u) = mr(P(D)u)$.

§4. Usando le nozioni del paragrafo 4.2 di pag. 104 di [1] e leggere modifiche al teorema 4.2.4 di pag. 106 di [1], si può estendere il risultato precedente al caso che $P(D)$ sia parzialmente ipoellittico. Indicando con x la variabile in $\mathbb{R}^n$ e ponendo $x = (x', x'')$, $x' \in \mathbb{R}^j$, $x'' \in \mathbb{R}^{n-j}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, rimandando a [1], pag. 106 per la definizione di polinomio differenziale a coefficienti costanti, ipoellittico rispetto al piano $x'' = 0$, dimostriamo subito che: se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $u \in \bigcap_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{B}^{\mathrm{loc}}_{2,k_\nu}(\Omega)$, $k_\nu(\xi) = k_0(\xi) \cdot \cdot (1 + |\xi'|)^\nu$, $k_\nu(\xi)$ funzioni peso temperate, $\xi = (\xi', \xi'')$ variabile in $\mathbb{R}_n$, e se $P(D)$ è parzialmente ipoellittico rispetto al piano $x'' = 0$, $WF(P(D)u) = WF(u)$. Infatti: sia $\mathcal{O}$ un aperto in $S^*(\Omega)$ e $u \in \bigcap_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{B}^{\mathrm{loc}}_{2,k_\nu}(\mathcal{O}^*)$ e $P(D)u \in C^{\infty}(\mathcal{O}^*)$. Fissati: ω un aperto relativamente compatto in Ω, $\alpha(x) \equiv 1$ su ω con $\alpha(x) \in C^{\infty}_c(\Omega)$, $\omega' \subset \omega''$ aperti in S_{n-1} con ω' relativamente compatto, $h(\xi) \in C^{\infty}_c(\omega'')$ con $h(\xi) \equiv 1$ su ω', $\forall \beta(x) \in C^{\infty}_c(\omega)$ risulta: $(\beta(x) \otimes h(D))\{\alpha u\} \in \bigcap_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{B}^{c}_{2,k_\nu}(\omega)$, $\{\beta(x) \otimes h(D)\}(P(D)\alpha u) \in C^{\infty}_c(\omega)$, se $\omega \times \times \omega'' \subseteq \mathcal{O}$. Da ciò: $h(D)(\alpha u) \in \bigcap_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{B}^{\mathrm{loc}}_{2,k_\nu}(\omega)$, $P(D)\{h(D)(\alpha u)\} \in C^{\infty}(\omega)$ e per il teorema 4.2.4 citato di sopra, $h(D)(\alpha u) \in C^{\infty}(\omega)$. Poichè $h(D)$ è ellittico su $\omega \times \omega'$, $\alpha u \in C^{\infty}((\omega \times \omega')^*)$ cioè $u \in C^{\infty}(\mathcal{O}^*)$. Risulta, sempre, $WF(P(D)u) \subseteq WF(u)$; sicchè la dimostrazione è completa.

Come conseguenza si può dimostrare il

TEOREMA 2'. *Sia* $\mathcal{O}$ *un aperto in* $S^*(\Omega)$; $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *con* $u \in \bigcap_0^\infty \mathcal{B}_{2,k_\nu}^{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}^*)$ *con* $k_\nu = k_\nu(\xi) = k_0(\xi)(1+|\xi'|)^\nu$. *Se* $P(D)$ *è parzialmente ipoellittico rispetto al piano* $x''=0$, *risulta*: $MWF(u) \cap \mathcal{O} = MWF(P(D)u) \cap \mathcal{O}$ *e* $mr(u) \cap \mathcal{O} = mr(P(D)u) \cap \mathcal{O}$.

DIMOSTRAZIONE. Da quanto sopra risulta: $WF(u) \cap \mathcal{O} = WF(P(D)u) \cap \mathcal{O}$. Dimostriamo che: $R_\infty(P(D)u) \cap \mathcal{O} \subseteq R_\infty(u) \cap \mathcal{O}$, (l'inclusione inversa risulta sempre vera).

Se $(x_0, \xi^0) \in R_\infty(P(D)u) \cap \mathcal{O}$, fissato $s \in \mathbb{R}$, $\exists \mathcal{O}_s$ aperto in $S^*(\Omega)$ con: $(x_0, \xi^0) \in \mathcal{O}_s \subseteq R_s(P(D)u) \cap \mathcal{O}$. Con il ragionamento di sopra e quello del teorema 2), con gli stessi simboli: $h(D)\{P(D)(\alpha u)\} \in \mathcal{B}_{2,k_s/P}^{\mathrm{loc}}(\omega)$ e $h(D) \cdot (\alpha u) \in \bigcap_{\nu,0}^{\infty} \mathcal{B}_{2,k_\nu}^{\mathrm{loc}}(\omega)$.

Invertendo $h(D)$ e $P(D)$ nel primo termine e tenuto presente il teorema 4.2.4 citato, si ritrova $\alpha u \in H_{\mathrm{loc}}^s((\omega \times \omega')^*)$ cioè $(x_0, \xi^0) \in R_s(u)$. Allora: $mr(u) \cap \mathcal{O} = mr(P(D)u) \cap \mathcal{O}$. La dimostrazione è completa.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. HÖRMANDER, *Linear Partial Differential Operators,* Springer-Verlag 1969.

[2] L. HÖRMANDER, *Fourier Integral Operators.*

[3] L. HÖRMANDER, *Uniqueness Theorems and Wave Front Sets for Solutions of Linear Differential Equations with Analytic Coefficients,* Comunications in Pure and Applied Mathematics, **24** (1971), 671-704.

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 maggio 1973.