

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

**Pseudodifferenziali definiti su aperti di
una cosfera fibrata**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 50 (1973), p. 167-171

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__50__167_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__50__167_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Pseudodifferenziali definiti su aperti di una cosfera fibrata.

GIULIANO BRATTI (*)

§ 1. Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e $T^*(\Omega)$ il fibrato cotangente di base Ω . $\dot{T}^*(\Omega)$ sia $R^*(\Omega) - \{0\}$. Introdotta su $\dot{T}^*(\Omega)$ la relazione di equivalenza R , $(x, \xi)R(y, \eta)$ se e solo se $x = y$ ed esiste $t > 0$ con $\xi = t\eta$, il quoziente di $\dot{T}^*(\Omega)$ modulo R si indicherà con $S^*(\Omega)$. $S^*(\Omega)$ si dice la cosfera fibrata su Ω . $S^*(\Omega)$ può esser identificata con il prodotto $\Omega \times S_{n-1}$, dove S_{n-1} indica la superficie sferica unitaria in $\mathbb{R}_n$ duale di $\mathbb{R}^n$.

Nel caso ordinario, se $A = A(x, D)$ è un operatore pseudodifferenziale di simbolo $a(x, \xi)$, (per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $A\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int \exp[ix\xi] a(x, \xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi$, $\hat{\varphi}(\xi)$ indica la trasformata di Fourier di φ), $a(x, \xi)$ è una funzione C^∞ (**) definita su $\Omega \times \mathbb{R}_n$; oggetto di questo articolo è di dare la definizione di operatore pseudodifferenziale con simbolo definito solo su un aperto di $S^*(\Omega)$, $\mathcal{O}$.

Si otterrà, per tali operatori:

- A) *un teorema di continuità tra spazi di Sobolev, relativamente definiti sull'aperto $\mathcal{O}$; e*
- B) *un teorema di pseudolocalità.*

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università - Via Belzoni 3 - I-35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R., presso la Rutgers University, New Brunswick, N.J., U.S.A.

(**) $a(x, \xi)$ soddisfa alla condizione ulteriore: se l'operatore A , di cui $a(x, \xi)$ è il simbolo, è di ordine $\leq m$, per ogni compatto K in Ω e per ogni coppia di multi-indici $(p, q) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, esiste $G_{p,q}(K) > 0$ con $|D_\xi^p D_x^q a(x, \xi)| \leq G_{p,q}(K)(1 + |\xi|)^{m-|p|}$, $x \in K$ e $\xi \in \mathbb{R}_n$, $|p|$ = lunghezza del multi-indice p , $D = (1/i)(\partial/\partial x)$.

Sarà dimostrato, inoltre, come nel caso ordinario, se $A(x, D)$ è un operatore pseudodifferenziale di ordine $\leq m$, $m \in \mathbf{R}$, la continuità di $A(x, D)$ tra $H_c^s(\Omega)$ e $H_{loc}^{s-m}(\Omega)$, $\forall s \in \mathbf{R}^*$, e la sua pseudolocalità, (se $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $\text{supp sing } A(x, D)u \subseteq \text{supp sing } u$), seguono da A) e B).

Le notazioni usate sono quelle in « *An introduction to Pseudodifferential operators and to Fourier integral operators* », di Francois Treves.

§ 2. $\pi: S^*(\Omega) \rightarrow \Omega$ sia la proiezione naturale della cosfera fibrata $S^*(\Omega)$ sulla sua base Ω , $\pi(x, \xi) = x$; $\mathcal{O}$ sia un aperto in $S^*(\Omega)$ e $\mathcal{K}$ un compatto in $\mathcal{O}$.

DEFINIZIONE 1.

$$\sum(\mathcal{K}) = \{\varphi(x, y) \in C^\infty(\Omega) \widehat{\otimes} \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) : \hat{\varphi}(x, \xi) = \int \exp[iy\xi] \varphi(x, y) dy$$

è zero se $(x, \xi) \notin \mathcal{K}\}$ (**).

DEFINIZIONE 2. $s \in \mathbf{R}$, $H^s(\mathcal{K})$ è il completamento con topologia relativa di $\sum(\mathcal{K})$ in $C^\infty(\Omega) \widehat{\otimes} H^s(\mathbf{R}^n)$.

Se $\mathcal{K}_n$ è una successione di compatti in $\mathcal{O}$ con: $\mathcal{O} = \bigcup_n \mathcal{K}_n$, $\mathcal{K}_n \subset \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{n+1}$, $\overset{\circ}{\mathcal{K}}_{n+1}$ l'interno di $\mathcal{K}_{n+1}$,

DEFINIZIONE 3. $H^s(\mathcal{O})$ è il limite induttivo degli F -spazi $H^s(\mathcal{K}_n)$.

DEFINIZIONE 4. $m \in \mathbf{R}$, $S^m(\mathcal{O}) = \{a(x, \xi) \in C^\infty \text{ per ogni } (x, \xi) \in \mathcal{O} : \text{per ogni } \mathcal{K} \text{ compatto in } \mathcal{O} \text{ e per ogni } (p, q) \in \mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^n \text{ esiste } C_{p,q}(\mathcal{K}) > 0 \text{ con } |D_\xi^p D_x^q a(x, \xi)| \leq C_{p,q}(\mathcal{K})(1 + |\xi|)^{m-|p|}, \text{ per ogni } (x, \xi) \in \mathcal{K}\}$. Ogni $a(x, \xi) \in S^m(\mathcal{O})$ si dice un simbolo di ordine $\leq m$ su $\mathcal{O}$.

Se su $S^m(\mathcal{O})$ si pone la topologia della famiglia di seminorme $p_{\mathcal{K}, p, q}$, $\mathcal{K}$, p e q come in def. 4), $p_{\mathcal{K}, p, q}(a) = \inf \{C_{p, q}(\mathcal{K}) : C_{p, q}(\mathcal{K}) \text{ come in def. 4)}\}$, $S^m(\mathcal{O})$ risulta F -spazio. $S^m(\Omega)$, F -spazio delle funzioni $(a(x, \xi) \in C^\infty(\Omega \times \mathbf{R}_n))$ soddisfacenti alla proprietà di cui al (**) di § 1), si inietta continua-

(*) $H_c^s(\Omega) = H^s \cap \mathcal{E}'(\Omega)$, H^s s -spazio di Sobolev; $H_{loc}^s(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \varphi u \in H^s\}$. $H_c^s(\Omega)$ è il limite induttivo degli F -spazi $H^s(K)$, K compatto in Ω , con la topologia relativa da H^s , la topologia su $H_{loc}^s(\Omega)$ è la più debole che rende continue le mappe $m_\varphi: H_{loc}^s(\Omega) \rightarrow H^s$, $m_\varphi(u) = \varphi u$, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

(**) La topologia sui prodotti tensoriali è la π di Grothendieck (per la nuclearità di $C^\infty(\Omega)$ essa coincide con la ϵ). Se $\xi \in \mathbf{R}_n$, $\xi \neq 0$, $\hat{\xi} = \xi/|\xi|$.

mente in $S^m(\mathcal{O})$. Se si pone: $S^{-\infty}(\mathcal{O}) = \bigcap S^m(\mathcal{O})$, $m \in \mathbf{R}$, $S^m(\Omega)$ è denso, modulo $S^{-\infty}(\mathcal{O})$, in $S^m(\mathcal{O})$ nel senso che: se $a(x, \xi) \in S^m(\mathcal{O})$ si può trovare $b_n(x, \xi) \in S^m(\Omega)$, $n \in \mathbf{N}$, con $b_n(x, \xi) \rightarrow b(x, \xi)$ in $S^m(\mathcal{O})$ e $a(x, \xi) - b(x, \xi) \in S^{-\infty}(\mathcal{O})$.

La dimostrazione è facile: è sufficiente prendere $b_n(x, \xi) = a(x, \xi)g_n(x, \xi)$ dove $g_n(x, \xi)$ è il prolungamento naturale di $g_n(x, \xi) \in C_c^\infty(\mathcal{K}_n)$ con $g_n(x, \xi) \equiv 1$ su $\mathcal{K}_{n-1}$. (Il prodotto $a(x, \xi)g_n(x, \xi)$ è zero se $(x, \xi) \notin \mathcal{K}_n$).

Se $\Sigma(\mathcal{O}) = \bigcup_n \Sigma(\mathcal{K}_n)$, per ogni $a(x, \xi) \in S^m(\mathcal{O})$, $A_r = A_r(x, D)$ sia la mappa definita su $\Sigma(\mathcal{O})$ con valori in $\mathcal{D}'(\pi(\mathcal{O}))$ così ottenuta: $A_r \varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int \exp[ix\xi] a(x, \xi) \hat{\varphi}(x, \xi) d\xi$.

DEFINIZIONE 5. $\Psi^m(\mathcal{O}) = \{A_r(x, D), \text{ per ogni } a(x, \xi) \in S^m(\mathcal{O})\}$. Ogni $A_r(x, D) \in \Psi^m(\mathcal{O})$ si dice un pseudodifferenziale di ordine $\leq m$ su $\mathcal{O}$.

A) TEOREMA. Per ogni $s \in \mathbf{R}$, se $A_r = A_r(x, D) \in \Psi^m(\mathcal{O})$, A_r (è lineare e) continua da $H^s(\mathcal{O})$ in $H_{\text{loc}}^{s-m}(\pi(\mathcal{O}))$.

DIMOSTRAZIONE. Poichè $H^s(\mathcal{O})$ è $\mathcal{LF}$ -spazio, è sufficiente dimostrare che se $\varphi_n(x, y)$, $n \in \mathbf{N}$, converge a zero in $H^s(\mathcal{K})$, $\mathcal{K} \in \mathcal{O}$, $A_r \varphi_n(x)$ converge a zero in $H_{\text{loc}}^{s-m}(\pi(\mathcal{O}))$. Dire che $\varphi_n(x, y)$ converge a zero in $H^s(\mathcal{K})$ è equivalente dire che $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{\varphi}_n(x, \xi)$ converge a zero in $C^\infty(\Omega) \hat{\otimes} L^2(\mathbf{R}_n)$. Poichè $\hat{\varphi}_n(x, \xi)$ è nulla se $(x, \xi) \notin \mathcal{K}$, e poichè su $\mathcal{K}$ si ha: $|a(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^m$, il prodotto $(1 + |\xi|^2)^{(s-m)/2} a(x, \xi) \hat{\varphi}_n(x, \xi)$ rimane convergente a zero in $C^\infty(\Omega) \hat{\otimes} L^2(\mathbf{R}_n)$. Si ha:

$$\chi_n(x, y) = (2\pi)^{-n} \int \exp[iy\xi] a(x, \xi) \hat{\varphi}_n(x, \xi) d\xi$$

è in $C^\infty(\Omega) \hat{\otimes} H^{s-m}(\mathbf{R}^n)$ e rimane convergente a zero. La mappa $\tilde{r}|_{\mathbf{v}=x}: C^\infty(\Omega) \otimes_\pi H^s(\mathbf{R}^n) \rightarrow H_{\text{loc}}^s(\Omega)$, $\tilde{r}|_{\mathbf{v}=x}(\varphi(x) \otimes u(y)) = \varphi(x)u(x)$ è continua, conseguenza del fatto che la moltiplicazione per ogni $\varphi(x) \in C_c^\infty(\Omega)$ è una mappa continua di $H^s(\mathbf{R}^n)$ in se stesso. Indicata con $r|_{\mathbf{v}=x}$ il suo prolungamento per continuità, risulta, facilmente, $A_r \varphi(x) = r|_{\mathbf{v}=x}(\chi(x, y))$, se $\chi(x, y) = (2\pi)^{-n} \int \exp[iy\xi] a(x, \xi) \hat{\varphi}(x, \xi) d\xi$. Il teorema è dimostrato.

R.A. Sia $\mathcal{O} = S^*(\Omega)$ e φ_n , $n \in \mathbf{N}$, $\in C_c^\infty(K)$, K compatto in Ω , con φ_n convergente a zero in $H^s(K)$. Se $\alpha(x) \in C^\infty(\Omega)$, $\alpha(x) \otimes \varphi_n(y) \in H^s(S^*(\Omega))$ ed ivi converge a zero. Da A) segue facilmente che se $a(x, \xi) \in S^m(\Omega)$, $\alpha(x)(2\pi)^{-n} \int \exp[ix\xi] a(x, \xi) \hat{\varphi}_n(\xi) d\xi$ converge a zero in $H_c^{s-m}(\Omega)$. Allora $(2\pi)^{-n} \int \exp[ix\xi] a(x, \xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi$ converge a zero in $H_{\text{loc}}^{s-m}(\Omega)$. Ciò dimostra che ogni operatore pseudodifferenziale di ordine $\leq m$ è continuo da $H_c^s(\Omega)$ in $H_{\text{loc}}^{s-m}(\Omega)$.

Se $\mathcal{O}'$ è un aperto in $\mathcal{O}$,

DEFINIZIONE 6. $\tilde{H}_{\text{loc}}^s(\mathcal{O}') = \{u(x, y) \in C^\infty(\pi(\mathcal{O})) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(\pi(\mathcal{O})_{x=y}) : \text{ per ogni } g(x, \xi) \in C_c^\infty(\mathcal{O}) \text{ e per ogni } h(y) \in C_c^\infty(\pi(\mathcal{O})_{x=y}), G_r u h(x) \in H_{\text{loc}}^s(\Omega), G_r \text{ definito da } g(x, \xi), \text{ prolungamento di } g(x, \xi), \in S^0(\mathcal{O})\} (*)$.

È facile verificare che se $S^*(\pi(\mathcal{O}))$ è la cosfera fibrata di base $\pi(\mathcal{O}) \subset \Omega$, e se $u \in \mathcal{D}'(\pi(\mathcal{O}))$, $1(x) \otimes u(y) \in \tilde{H}_{\text{loc}}^s(\mathcal{O}')$ se e solo se $u \in H_{\text{loc}}^s(\mathcal{O}')$ secondo la definizione di [2] cap. 1, § 5.

DEFINIZIONE 7. $\tilde{C}^\infty(\mathcal{O}') = \bigcap H_{\text{loc}}^s(\mathcal{O}'), \forall s \in \mathbf{R}$. Se $u(x, y) \in C^\infty(\pi(\mathcal{O})) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(\pi(\mathcal{O})_{x=y})$, si pone $\mathcal{O}_u = U\{\mathcal{O}' \subset S^*(\pi(\mathcal{O})) : u(x, y) \in \tilde{C}^\infty(\mathcal{O}')\}$. Si indica con $WF_0(u)$, e si dice l'insieme fronte d'onda della distribuzione u , il complementare, in $S^*(\pi(\mathcal{O}))$, di $\mathcal{O}_u$.

Si pone: $\Psi^{-\infty}(\mathcal{O}) = \bigcap \Psi^m(\mathcal{O})$, per ogni $m \in \mathbf{R}$. (Dire che $A_r \in \Psi^\infty(\mathcal{O}) = U\Psi^m(\mathcal{O})$, $m \in \mathbf{R}$, è in $\Psi^{-\infty}(\mathcal{O})$ significa dire che se $a(x, \xi)$ è il simbolo su $\mathcal{O}$ che definisce A_r , per ogni $l \in \mathbf{N}$, per ogni $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$, per ogni coppia di multi-indici $(p, q) \in \mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^n$, esiste $G_{p,q}(\mathcal{K}; l) > 0$ con:

$$|D_\xi^p D_x^q a(x, \xi)| \leq C_{p,q}(\mathcal{K}; l) (1 + |\xi|)^{-l}, \quad (x, \xi) \in \mathcal{K}.$$

DEFINIZIONE 8. Se $A_r \in \Psi^\infty(\mathcal{O})$, $\mathcal{O}_{A_r} = U\{\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}, \mathcal{O}' \text{ aperto} : A_r \in \Psi^{-\infty}(\mathcal{O}')\}$. Si indica con $WF_{\mathcal{O}}(A_r)$ il complementare in $\mathcal{O}$, di $\mathcal{O}_{A_r}$.

B) TEOREMA. Sia $A_r \in \Psi^\infty(\mathcal{O})$ e $u = u(x, y) \in H^\infty(\mathcal{O}) = UH^s(\mathcal{O})$, $s \in \mathbf{R}$. $WF_0(1(x) \otimes (A_r u)(y)) \cap \mathcal{O} \subseteq WF_{\mathcal{O}}(A_r) \cap WF_0(u)$.

DIMOSTRAZIONE. a) sia $(x, \xi) \in \mathcal{O}_{A_r}$; si può trovare $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ con $A_r \in \Psi^{-\infty}(\mathcal{O}')$. Se $u(x, y) \in H^s(\mathcal{O})$, $\hat{u}(x, \xi) \equiv 0$ se $(x, \xi) \notin \mathcal{K} \subset \mathcal{O}$, per qualche $\mathcal{K}$; sicchè: se $g(x, \xi) \in C_c^\infty(\mathcal{O}')$ e $g(x, \xi) \equiv 1$ su $\mathcal{K}$, $A_r u(x) = (2\pi)^{-n} \cdot \int \exp[ix\xi] b(x, \xi) \hat{u}(x, \xi) d\xi$, $b(x, \xi) = a(x, \xi) g(x, \xi)$, che definisce A_r , $g(x, \xi)$ prolungamento di $g(x, \xi)$, (come funzione positivamente omogenea di grado zero). Sia $\alpha(x) \otimes \beta(y) \in C^\infty(\Omega) \otimes H^s(\mathbf{R}^n)$: $g_1(x, D) [(2\pi)^{-n} \int \exp[ix\xi] b(x, \xi) \alpha(x) \hat{\beta}(\xi) d\xi] \in C^\infty(\Omega)$ non appena $g_1(x, \xi) \in C_c^\infty(\mathcal{O}')$ ed il suo prolungamento, $g_1(x, \xi)$, definisce $g_1(x, D)$. Infatti: a meno di una funzione in $C^\infty(\Omega)$, $g_1(x, D) [\dots]$, come sopra, coincide con $(2\pi)^{-n} \cdot \int \exp[ix\xi] b g_1(x, \xi) \hat{\beta}(\xi) d\xi$, con $b g_1(x, \xi) = \sum_p (1/p!) \hat{c}_\xi^p g_1(x, \xi) D_\xi^p(b(x, \xi) \cdot \alpha(x))$ (**), ed è chiaro che $b g_1(x, \xi) \in S^\infty(\Omega)$ poichè i prodotti nella serie sono non nulli solo se $(x, \xi) \in \text{supp } g_1(x, \xi) \subset \mathcal{O}'$ ed ivi, in $\mathcal{O}'$,

(*) $\tilde{H}_{\text{loc}}^s(\mathcal{O}')$, come in def. 7 $\tilde{C}^\infty(\mathcal{O}')$, per distinguerli dai relativi spazi su $\mathcal{O}'$ come varietà.

(**) Il modo con cui si deve intendere la convergenza di questa serie in $S^m(\Omega)$, se $a(x, \xi) \in S^m(\mathcal{O})$, è indicato in [2], cap. 1, § 4.

$b(x, \xi)\alpha(x) \in S^{-\infty}(\mathcal{O}')$. La mappa $g_1(x, D)$ [...], come sopra, è continua da $C^\infty(\Omega) \otimes_\pi H^s(\mathbf{R}^n)$ in $C^\infty(\Omega)$, sicchè $g_1(x, D)(A_r u) \in C^\infty(\Omega)$ per ogni $g_1(x, \xi) \in C_c^\infty(\mathcal{O}')$. Segue: $(x, \xi) \notin WF(1(x) \otimes A_r u(y))$.

b) Sia $(x, \xi) \in \mathcal{O} \cap \mathcal{O}_u$: si può trovare $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ con $u \in \tilde{C}^\infty(\mathcal{O}')$. Per dimostrare che $(x, \xi) \notin WF(1(x) \otimes A_r u(y))$ il procedimento è lo stesso che in [2], cap. 1 § 5, Teorema 5.1. B) è completamente dimostrato.

R.B. Sia $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $\alpha \in C_c^\infty(\Omega)$, $A = A(x, D) \in \Psi^\infty(\Omega)$.

Nel caso che $\mathcal{O} = S^*(\Omega)$, B) dà:

$$WF_0(1(x) \otimes A(\alpha \otimes u)) \cap S^*(\Omega) \subseteq WF_0(A) \cap WF(\alpha(x) \otimes u(y)).$$

Risulta, facilmente, $WF_0(\alpha(x) \otimes u(y)) \subseteq WF(u)$ e, per l'osservazione che segue la def. 6, $WF_0(1(x) \otimes A(\alpha \otimes u)) \equiv WF(A(\alpha \otimes u))$ (*). Allora $\forall \alpha \in C_c^\infty(\Omega)$, $WF(A(\alpha \otimes u)) \subseteq WF(u)$; cioè: $WF(Au) \subseteq WF(u)$.

(*) La definizione di $WF(A)$, $A \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$, e quello di $WF(u)$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, sono dati in [2], cap. 1, § 5.

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. HÖRMANDER, *Fourier Integral Operators, I*, Acta Mathematica, giugno 1971.
- [2] F. TREVES, *An introduction to pseudodifferential operators and to Fourier integral operators*, in pubblicazione.

Manoscritto pervenuto in redazione il 12 gennaio 1973.