Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Ferruccio Orecchia

Sul gruppo di Picard degli anelli di serie ristrette e la seminormalità

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 48 (1972), p. 205-218
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__48__205_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 48 (1973)

SUL GRUPPO DI PICARD DEGLI ANELLI DI SERIE RISTRETTE E LA SEMINORMALITÀ

FERRRUCCIO ORECCHIA *)

SOMMARIO - Siano A un anello commutativo, $\mathfrak{a}$ un ideale di A, $(A, \mathfrak{a})\{T\}$ l'anello delle serie ristrette in un numero finito di indeterminate T. Dimostriamo che nella decomposizione $\mathrm{Pic}\,(A,\mathfrak{a})\{T\} \cong \mathrm{Pic}\, A \oplus X$ il gruppo X è canonicamente isomorfo a X', essendo X' il fattore diretto della decomposizione $\mathrm{Pic}\,(A/\mathfrak{a})[T] \cong \mathrm{Pic}\, A/\mathfrak{a} \oplus X'$. In particolare, se A è un anello regolare e fattoriale otteniamo: $(A, \mathfrak{a})\{T\}$ è fattoriale se e solo se $A/\sqrt{\mathfrak{a}}$ è seminormale.

SUMMARY - Let A be a commutative ring, $\mathfrak{a}$ an ideal of A, $(A, \mathfrak{a})\{T\}$ the ring of restricted power series in a finite of number indeterminates T. We prove that in the decomposition $\mathrm{Pic}\,(A,\mathfrak{a})\{T\} \cong \mathrm{Pic}\, A \oplus X$ the group X is canonically isomorphic to X', X' being the direct factor of the decomposition $\mathrm{Pic}\,(A/\mathfrak{a})[T] \cong \mathrm{Pic}\, A/\mathfrak{a} \oplus X'$. In particular, if A is a regular and factorial ring we get: $(A, \mathfrak{a})\{T\}$ is factorial if and only fi $A/\sqrt{\mathfrak{a}}$ is seminormal.

INTRODUZIONE. In questo lavoro **) ci proponiamo di studiare una caratterizzazione della fattorialità degli anelli di serie ristrette.

Siano A un anello commutativo con identità, $\mathfrak{a}$ un ideale di A, $(A, \mathfrak{a})\{T\}$ l'anello delle serie ristrette in un numero finito di indeterminate T. L'anello $(A, \mathfrak{a})\{T\}$ è il completamento $(\mathfrak{a}T)$-adico dell'anello

*) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica, via L. B. Alberti, 4 - 16132 Genova.

**) L'A. ringrazia il prof. Salmon per l'incoraggiamento e gli utili colloqui avuti durante la redazione del presente lavoro.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo delle Strutture Algebriche e Geometriche e loro applicazioni del C.N.R.

di polinomi $A[T]$; ne segue l'isomorfismo di gruppi di Picard :

$$\text{Pic } (A, \mathfrak{a})\{T\} \cong Pic\ A[T]/(\mathfrak{a}T)$$

Considerate le due decomposizioni canoniche in somme dirette:

$$\text{Pic } (A/\mathfrak{a})[T] \cong \text{Pic } A/\mathfrak{a} \oplus X'$$

$$\text{Pic } A[T]/(\mathfrak{a}T) \cong \text{Pic } A \oplus X$$

si dimostra, nel n. 3 che i gruppi X e X' sono canonicamente isomorfi.

Nel n. 4 sfruttiamo il risultato precedente per caratterizzare mediante la seminormalità dell'anello $A/\sqrt{\mathfrak{a}}$ l'annullamento del gruppo Pic $(A, \mathfrak{a})\{T\}$, basandoci sulla seguente caratterizzazione degli anelli seminormali data da Traverso in [8]: se A è noetheriano e ridotto, A è seminormale se e solo l'omomorfismo Pic $A \to$ Pic $A[T]$ è un isomorfismo.

Il n. 5 contiene le applicazioni alla fattorialità degli anelli di serie ristrette. Il risultato principale è il seguente: siano A un anello regolare e fattoriale, $\mathfrak{a}$ un ideale di A; allora l'anello $(A, \mathfrak{a})\{T\}$ è fattoriale se e solo se $A\sqrt{\mathfrak{a}}$ è un anello seminormale.

Questa caratterizzazione permette di estendere largamente vari criteri sufficienti per la fattorialità di certi anelli di serie ristrette dati in [1] e consente altresì di trovare nuove classi di anelli di serie ristrette non fattoriali oltre a quelli determinati da P. Salmon in [6]. Va tuttavia notato che il nostro metodo basato sull'analisi dell'annullamento dei gruppi di Picard non consente di ritrovare tutti gli esempi di anelli di serie ristrette non fattoriali su un anello base fattoriale dati in [6]. Anzi proprio uno di questi esempi dimostra che l'ipotesi di regolarità d A è essenziale per ottenere la nostra caratterizzazione (cfr. oss. II del n. 5).

I risultati sono illustrati da vari esempi di natura geometrica che si ottengono da recenti caratterizzazioni della seminormalità di certe classi di anelli di tipo geometrico.

Tutti gli anelli che si considerano sono commutativi con identità e noetheriani, gli omomorfismi sono unitari.

1. In questo numero, dopo avere ricordato all'inizio la definizione

del gruppo Pic A, stabiliamo alcune proprietà relativve agli omomorfismi Pic $A \to$ Pic B (indotti dagli omomorfismi di anelli $A \to B$) di cui faremo uso costante nel seguito.

Sia A un anello. Indicheremo con Pic A il gruppo abeliano delle classi di A-moduli proiettivi di rango 1 (modulo la relazione di equivalenza data dall'isomorfismo). Se $\overline{E}$, $\overline{F}$ sono elementi di Pic A, classi rispettive degli A-moduli proiettivi di 1 E, F la somma di$\overline{E}$ e $\overline{F}$ è data dalla relazione $\overline{E}+F=\overline{E \oplus F}$ (cfr. [3], § 5, n. 4).

Se $f : A \to B$ è un omomorfismo di anelli, f induce un omomorfismo $\tilde{f}$: Pic $A \to$ Pic B definito da $f(\overline{E})=\overline{E \otimes B}$. Se f è l'identità anche $\tilde{f}$ è l'identità e se $g : B \to C$ è un secondo omomorfismo di anelli si ha $\widetilde{g \circ f}=\tilde{g} \circ \tilde{f}$. Vale quindi la:

Proposizione 1.1. *Siano* $f : A \to B$, $g : B \to A$ *omomorfismi di anelli tali che* $g \circ f = Id_A$. *Allora l'omomorfismo* $\tilde{f}$ *è iniettivo e l'omomorfismo* $\tilde{g}$ *è surgettivo.*

Dim. Si ha $\tilde{g} \circ \tilde{f}=\widetilde{g \circ f}=\widetilde{Id_A}=Id_{\text{Pic}\,A}$ e da ciò segue subito la tesi

In seguito, nella scrittura $\tilde{f}$: Pic $A \to$ Pic B il simbolo $\sim$ sovrapposto ad f sarà talvolta omesso, a meno che non si voglia notare esplicitamente che $\tilde{f}$: Pic $A \to$ Pic B è l'omomorfismo indotto da $f : A \to B$.

Ricordiamo anche che il gruppo Pic A è isomorfo al gruppo delle classi di ideali invertibili di A (cfr. [3], Remarque 2 au coroll. 2) e si verifica facilmente che ogni suo elemento è del tipo $\overline{\mathfrak{a}}$ dove $\mathfrak{a}$ è un ideale intero invertibile di A. Quindi d'ora in poi, *quando* $\overline{\mathfrak{a}}$ *indicherà la classe di un ideale invertibile di* A, $\mathfrak{a}$ *sarà intero.*

Vale la seguente caratterizzazione degli ideali invertibili non degeneri:

Proposizione 1.2. *Siano* A *un anello ed* $\mathfrak{a}$ *un ideale intero non degenere (cioè contenente qualche elemento non zero divisore) di* A. *Allora* $\mathfrak{a}$ *è un ideale invertibile se e solo se per ogni ideale massimale* $\mathfrak{m}$ *contenente* $\mathfrak{a}$, *l'ideale* $\mathfrak{a} A_{\mathfrak{m}}$ *è principale.*

Dim. (cfr. [3], § 6, prop. 4).

Siano A un anello ed S una parte moltiplicativa di A. Si ha il seguente:

LEMMA 1.3. *Sia* $\varphi: \mathrm{Pic}\, A \to \mathrm{Pic}\, A_S$ *l'omomorfismo canonico. Se* S *è priva di zero divisori, sa ha:*

$$\ker\ \varphi = \{-\bar{\mathfrak{b}} \in \ \mathrm{Pic}\ A/\mathfrak{b} \cap S \neq \emptyset\}$$

Dim. (Cfr., per esempio, [1], la dim. del teorema 2.1).

Inoltre si ha:

PROPOSIZIONE 1.4. *Siano* A *un anello ed* $\mathfrak{a}$ *un ideale di* A. *Se* $\mathfrak{a} \subseteq$ rad A, *l'omomorfismo canonico* $\varphi: \mathrm{Pic}\ A \to \mathrm{Pic}\ A/\mathfrak{a}$ *è iniettivo.*

Dim. (Cfr. [1], teor. 1. 18).

Da questi due ultimi risultati si ottiene la:

PROPOSIZIONE 1.5. *Sia* $\Psi: \mathrm{Pic}\ A \to \mathrm{Pic}\ A/\mathfrak{a}$ *l'omomorfismo canonico. Se la parte moltiplicativa* $S = 1 + \mathfrak{a}$ *è priva di zero divisori, si ha:*

$$\ker\ \Psi = \{-\bar{\mathfrak{b}} \in \ \mathrm{Pic}\ A \mid \mathfrak{b} \cap 1 + \mathfrak{a} \neq \emptyset\}$$

Dim. Posto $S = 1 + \mathfrak{a}$ si consideri il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}\ A & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Pic}\ A_S \\ \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\chi} \\ \mathrm{Pic}\,(A/\mathfrak{a}) & \xrightarrow{\nu} & \mathrm{Pic}\,(A_S/\mathfrak{a}A_S) \end{array}$$

Si ha $A_S/\mathfrak{a}A_S \cong (A/\mathfrak{a})_{\bar{S}}$ dove $\bar{S}$ è l'immagine di S in $A/\mathfrak{a}$; poichè nel nostro caso $\bar{S} = 1$, ν è un isomorfismo. Inoltre gli elementi di $1 + \mathfrak{a} A_S$ sono invertibili in A_S e ciò equivale ad $\mathfrak{a} \cdot A_S \subseteq \mathrm{rad}\ A_S$; allora per la prop. 1.4, l'omomorfismo χ *è* iniettivo. Da quanto precede si trae $\ker\ \varphi \cong \ker\ \psi$ e quindi dal lemma 1.3 segue la tesi.

OSSERVAZIONE. La proposizione precedente e certi risultati che verranno dati successivamente (ad esempio la prop. 3.2) potrebbero essere essere ottenuti anche con le successioni esatte dellaK-teoria (cfr. ad es. H. Bass; *Algebraic K-theory*, Benjamin 1968). Abbiamo tuttavia preferito dare nei numeri 1, 2, 3 delle dimostrazioni dirette in quanto sono molto più elementari; le applicazioni successive, date nei numeri 4 e 5, fanno invece uso dei risultati di Traverso che si fondano sulle successioni esatte della K-teoria.

2. Siano A un anello, $\mathfrak{a}$ un ideale di A. Indichiamo con $T = \{T_1, \quad, T_n\}$ un numero finito di indeterminate sua A (oppure su $A/\mathfrak{a}$) e con (T) l'ideale generato dalle indeterminate; l'ideale $(\mathfrak{a}T)$ indica il prodotto dei due ideali (T) ed $\mathfrak{a}$ $A[T]$. Se $a_1, \ldots, a_n$ sono elementi di A poniamo $a = \{a_1, \quad, a_n\}$; indichiamo allora con $(T-a)$ l'ideale di $A[T]$ generato dalle differenze $T_1 - a_1 (1 \leqslant i \leqslant n)$.

Sia $\mathfrak{c}$ un ideale dell'anello $A[T]$ contenuto nell'ideale $(T-a)$ e si pona $A[t] = A[T]/\mathfrak{c}$. Resta allora definito l'A-omomorfismo canonico $\nu_a : A[t] \to A$ tale che $\nu_a(t) = a$ (cioè: $\nu_a(t_i) = a_i$ *se* $0 \leqslant i \leqslant n$) e quindi l'omomorfismo indotto $\tilde{\nu}_a : \mathrm{Pic}\ A[t] \to \mathrm{Pic}\ A$.

Proposizione 2.1. *Se la parte moltiplicativa* $1 + (t-a)$ *è priva di zero divisori in* $A[t]$, *si ha:*

$$\ker \tilde{\nu} = \{ -\bar{\mathfrak{b}} \in \ \mathrm{Pic}\ A[t] \mid \mathfrak{b} \cap 1 + (t-a) \neq \emptyset).$$

Dim. È una conseguenza immediata della propo. 1.5, tenendo conto che $\ker \nu_a — (t-a)$.

Ci proponiamo adesso di studiare i legami che sussistono tra i due gruppi $\mathrm{Pic}\ A[t]$, dove $A[t] = A[T]/(\mathfrak{a}T)$, e $\mathrm{Pic}\,(A/\mathfrak{a})[T]$. Indichiamo rispettivamente con $\nu : A[t] \to A$ e $\nu' : (A/\mathfrak{a})[T] \to A/\mathfrak{a}$ gli omomorfismi canonici tali che $\nu(t) = 0$ $\nu'(T) = 0$. Allora, osservando che le parti moltiplicative $1 + t\ A[t]$ e $1 + T(A/\mathfrak{a})[T]$ (useremo talvolta queste notazioni invece di quelle solite $1 + (t)$ e $1 + (T)$ per precisare, quando ciò occorra, a quali anelli appartengono gli ideali (t) e (T)) son prive di zero divisori, dalla propo. 2.1 segue immediatamente la:

Proposizione 2.2. Posto $X = \ker \tilde{\nu}$, $X' = \ker \tilde{\nu}'$ si ha:

$$(1) \qquad X = \{ -\bar{\mathfrak{b}} \in \mathit{Pic}\ A[t] \mid \mathfrak{b} \cap 1 + t\,A[t] \neq \emptyset \}$$

$$(2) \qquad X' = \{ -\bar{\mathfrak{b}}' \in \ \mathrm{Pic}\,(A/\mathfrak{a})[T] \mid \mathfrak{b} \cap 1 + T(A/\mathfrak{a})[T] \neq \emptyset \}$$

Osserviamo che l'ideale $\mathfrak{a}$ di A è anche un ideale di $A[t]$ in quanto si ha $\mathfrak{a} A[t] = \mathfrak{a}$. Poichè vale l'isomorfismo $(A/\mathfrak{a})[T] \cong A[t]/\mathfrak{a}$, possiamo definire un omomorfismo canonico $\tau : A[t] \to (A/\mathfrak{a})[T]$ e un omomorfismo indotto $\bar{\tau} : \text{Pic } A[t] \to \text{Pic } (A/\mathfrak{a})[T]$. Si ottiene allora il seguente diagramma commutativo:

$$
(3) \qquad
\begin{tikzcd}
\text{Pic } A[t] \arrow[r, "\bar{\tau}"] \arrow[d, "\bar{\nu}"] & \text{Pic } (A/\mathfrak{a})[T] \arrow[d, "\bar{\nu}'"] \\
\text{Pic } A \arrow[r, "\bar{\sigma}"] & \text{Pic } A/\mathfrak{a}
\end{tikzcd}
$$

Il diagramma (3) può anzi completarsi nel modo seguente. Si osservi anzitutto che se $j : A \to A[t]$ e $j' : A/\mathfrak{a} \to (A/\mathfrak{a})[T]$ sono le immersioni canoniche si ha $\nu \circ j = Id_A$, e $\nu' \circ j' = Id_{A/\mathfrak{a}}$ e quindi, in virtù della Prop. 1.1, gli omomorfismi $\bar{\nu}$, $\bar{\nu}'$ sono surgettivi. Sussiste allora il diagramma commutativo ed esatto seguente:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & \text{Pic } A[t] \arrow[r, "\bar{\nu}"] \arrow[d, "\bar{\tau}"] & \text{Pic A} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\sigma}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "i'"] & \text{Pic } (A/\mathfrak{a})[T] \arrow[r, "\bar{\nu}'"] & \text{Pic } A/\mathfrak{a} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

in cui l'omorfismo α è definito da $\alpha(\bar{\mathfrak{b}}) = \bar{\tau}(\bar{\mathfrak{b}})$, dove $\bar{\mathfrak{b}} \in X$.

OSSERVAZIONE. Da $\nu \circ j = Id_A$ e $\nu' \circ j' = Id_{A/\mathfrak{a}}$ si ha $\bar{\nu} \circ \bar{j} = Id_{\text{Pic } A}$ e e $\bar{\nu}' \circ \bar{j}' = Id_{\text{Pic } A/\mathfrak{a}}$ e da ciò è facile dedurre che

$$\text{PiA}[t] = \bar{j}(\text{Pic } A) \oplus X \cong \text{Pic } A \oplus X$$

e $$\text{Pic } (A/\mathfrak{a})[T] = \bar{j}'(\text{Pic}(A/\mathfrak{a})) \oplus X' \cong \text{Pic } (A/\mathfrak{a}) \oplus X'.$$

Da quanto precede e dal diagramma (3′) segue la validità del diagramma:

$$
(3') \qquad
\begin{tikzcd}
\text{Pic } A[t] \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "\bar{\tau}"'] & \text{Pic } A \arrow[d, "\bar{\sigma}"'] & \oplus & X' \arrow[d, "\alpha"'] \\
\text{Pic } (A/\mathfrak{a})[T] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \text{Pic } (A/\mathfrak{a}) & \oplus & X
\end{tikzcd}
$$

3. In questo numero dimostreremo che l'omomorfismo α è un isomorfismo (Cfr. il teorema 3.5); da questo risultato è più precisamente

dal corollario 3.6 dedurremo le applicazioni dei n. 4 e 5. Si mantengono tutte le notazioni introdotte in precedenza.

LEMMA 3.1. Sia $\bar{\tau}$: Pic $A[t] \to$ Pic $(A/\mathfrak{a})[T]$ l'omomorfismo canonico Se $\mathfrak{b}$ è un ideale intero proiettivo di $A[t]$ tale che $\mathfrak{b} \cap 1+tA[t] \neq \emptyset$ allora $\bar{\tau}(\bar{\mathfrak{b}}) = \overline{\tau(\mathfrak{b})}$.

Dim. Ricordiamo innanzitutto che abbiamo posto $A[t] \cong A[T]/(\mathfrak{a}T)$ e che si ha $(A/\mathfrak{a})[T] \cong A[t]/\mathfrak{a}$.

Se $\mathfrak{b} \cap 1+(t) \neq \emptyset$ esiste un $f \in A[t]$ tale che $1+ft \in \mathfrak{b}$. Inoltre è noto che $\mathfrak{b} \otimes A[t]/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{b}/\mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Ne segue che $\bar{\tau}(\bar{\mathfrak{b}}) = \overline{\mathfrak{b}/\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$. Se $x \in \mathfrak{a}$ si ha $x = x(1+ft) \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ e da ciò si ottiene $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Quindi $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}/\mathfrak{a} \cong \tau(\mathfrak{b})$ (isomorfismo di $A[t]/\mathfrak{a}$-moduli). Perciò $\tau(\mathfrak{b}) = \overline{\tau(\mathfrak{b})}$ come volevasi.

PROPOSIZIONE 3.2. Se $\bar{\nu}$: Pic $A[t] \to$ Pic A e $\bar{\tau}$: Pic $A[t] \to$ *Pic* $(A/\mathfrak{a})[T]$ sono gli omomorfismi canonici e $X = \ker \bar{\nu}$ si ha: $X \cap \ker \bar{\tau} = 0$.

Dim. Sia $\bar{\mathfrak{c}} \in X$ tale che $\bar{\tau}(\bar{\mathfrak{c}}) = 0$. Da (1) di prop. 2.2 segue che esiste un ideale intero proiettivo $\mathfrak{b}$ di $A[t]$ tale che $\bar{\mathfrak{c}} = -\bar{\mathfrak{b}}$ e $\mathfrak{b} \cap 1+(t) \neq \emptyset$. Perciò $\bar{\tau}(\bar{\mathfrak{b}}) = \overline{\tau(\mathfrak{b})}$ (Cfr. lemma 3.1). Si ha $0 = \bar{\tau}(\bar{\mathfrak{c}}) = -\bar{\tau}(\bar{\mathfrak{b}}) = -\overline{\tau(\mathfrak{b})}$ e quindi $\tau(\mathfrak{b})$ è libero cioè $\tau(\mathfrak{b}) = \bar{f}(T)$, dove $\bar{f}(T)$ è la classe in $(A/\mathfrak{a})[T]$ di $f[T] \in A[T]$

Dalla relazione $\mathfrak{b} \cap 1+(t) \neq \emptyset$ si trae $\tau(\mathfrak{b}) \cap 1+(T) = (\bar{f}(T)) \cap 1+(T) \neq \emptyset$, onde un multiplo di $\bar{f}$ sta nell'insieme $1+(T)$ e il termine noto di $\bar{f}$ risulta perciò invertibile. Si può quindo porre $\tau(\mathfrak{b}) = (1+T\bar{g}(T))$, con $g(T) \in A[T]$, da cui $\mathfrak{b} = (1+t\,g(t)) + \mathfrak{a}$. Poichè $\mathfrak{a}\,t = 0$ si ha $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(1+tg(t)) \subseteq (1+tg(t))$ da cui $\mathfrak{b} = (1+tg(t))$, onde $\mathfrak{b}$ è libero. Ne segue $\bar{\mathfrak{c}} = -\bar{\mathfrak{b}} = 0$ come volevasi

LEMMA 3.3. *Sia* $\tau : A[T] \to (A/\mathfrak{a})[T]$ *l'omomorfismo canonico e* $\mathfrak{p}$ *un ideale primo di* $A[T]$.
Se $t \notin \mathfrak{p}$ *si ha* $A[t]_{\mathfrak{p}} \cong ((A/\mathfrak{a})[T]_{\tau(\mathfrak{p})})$.

Dim. Consideriamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} & A[T] \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ A[t] \arrow[rr, "\tau"'] & & (A/\mathfrak{a})[T] \end{tikzcd}$$

dobe β, γ, τ sono gli omomorfismi canonici.

Innanzitutto si ha $A[t]_{\mathfrak{p}} \cong A[T]_{\beta^{-1}(\mathfrak{p})} / (\mathfrak{a}T)_{\beta^{-1}(\mathfrak{p})}$ (Cfr. [3], § 3, prop. 3). Poiché per ipotesi $T \notin \beta^{-1}(\mathfrak{p})$ si ha $(\mathfrak{a}T)_{\beta^{-1}(\mathfrak{p})} = \mathfrak{a}A[T]_{\beta^{-1}(\mathfrak{p})}$ e $A[T]_{\beta^{-1}(\mathfrak{p})} / (\mathfrak{a}T)_{\beta^{-1}(\mathfrak{p})} = A[T]_{\beta^{-1}(\mathfrak{p})} / \mathfrak{a}A(T)_{\beta^{-1}(\mathfrak{p})} \cong ((A/\mathfrak{a})[T])_{\gamma(\beta^{-1}(\mathfrak{p}))}$ e poiché $\gamma(\beta^{-1}(\mathfrak{p})) = \tau(\mathfrak{p})$ si ha quanto volevamo.

Proposizione 3.4. *Ogni elemento di* $X' = \ker \tilde{\nu}'$ *è immagine di elemento di* $X = \ker \tilde{\nu}$ *secondo l'omomorfismo* $\tilde{\tau}$, *in altre parole* α *è surgettivo.*

Dim. Sia $\bar{\mathfrak{c}}' \in X'$. Da (2) di prop. 2.2 segue che esiste un ideale proiettivo $\mathfrak{b}'$ di $(A/\mathfrak{a})[T]$ tale che $-\bar{\mathfrak{b}}' = \bar{\mathfrak{c}}$ e $\mathfrak{b}' \cap 1 + (T) \neq \emptyset$. Quindi, poichè τ è surgettivo è $\tau(1+(t)) = 1+(T)$ si ottiene;

$$\tau^{-1}(\mathfrak{b}') \cap 1 + (t) \neq \emptyset . \tag{4}$$

Dimostriamo che $\tau^{-1}(\mathfrak{b}')$ è invertibile: basta dimostrare, per la prop. 1.2, che $\tau^{-1}(\mathfrak{b}')_{\mathfrak{n}}$ è principale per ogni ideale massimale $\mathfrak{n}$ di $A[t]$ tale che $\mathfrak{n} \supseteq \tau^{-1}(\mathfrak{b}')$. Ora, se $\mathfrak{n} \supseteq \tau^{-1}(\mathfrak{b}')$, da (4) segue che $\mathfrak{n} \cap 1 + (t) \neq \emptyset$ e perciò $t \notin \mathfrak{n}$. Allora, in virtù del lemma 3.3, si ha che $\tau^{-1}(\mathfrak{b}')_{\mathfrak{n}}$ è principale se e solo se lo è $\mathfrak{b}'_{\tau(\mathfrak{n})}$. Ma quest'ultimo ideale è principale poiché $\mathfrak{b}$ è invertibile. Quindi $\tau^{-1}(\mathfrak{b}')$ è invertibile. Inoltre da (4) segue che $\tau^{-1}(\mathfrak{b}') \in X$ (Cfr. (2) di prop. 2.2). Finalmente, in virtù del lemma 3.1, applicabile in quanto vale (4), otteniamo

$$\tilde{\tau}(-\overline{\tau^{-1}(\mathfrak{b}')}) = -\bar{\mathfrak{b}}' = \bar{\mathfrak{c}}$$

e ciò dimostra la tesi.

Teorema 3.5. *L'omomorfismo* α *è un isomorLsmo.*

Dim. L'iniettività dell'omomorfismo α segue dalla prop. 3.2 e la surgettività dalla prop. 3.4.

Corollario 3.6. *Siano* A *un anello ed* $\mathfrak{a}$ *un ideale di* A. *L'omomorfismo suggettivo* $\tilde{\nu}'$: $\mathrm{Pic}\,(A/\mathfrak{a})[T] \to \mathrm{Pic}\, A/\mathfrak{a}$ è *un isomorfismo se e solo se lo è l'omomorfismo sugettivo* $\tilde{\nu}$: $\mathrm{Pic}\ A[T]/(\mathfrak{a}T) \to \mathrm{Pic}\ A$.

Dim. Dal diagramma (3′) segue che dimostrare la tesi è equivalente a dimostrare che $X'=0$ se e solo se $X=0$. Ma ciò segue dal fatto che X' è isomorfo ad X (cfr. teor. 3.5).

OSSERVAZIONE. Si potrebbe dimostrare ulteriori proprietà relative al diagramma commutativo (3′), ad esempio che esiste un isomorfismo canonico tra ker $\bar{\tau}$ e ker $\bar{\sigma}$; non esporremo questi risultati in quanto non utili agli scopi del nostro lavoro.

4. Richiamiamo qui la definizione di anello seminormale e la successiva caratterizzazione degli anelli mediante i gruppi di Picard data in [8]. Da questa caratterizzazione e dai risultati del n. 3 potremo caratterizzare, sotto certe ipotesi, in termini di seminormalità l'annullamento del gruppo Pic $A[T]/(\mathfrak{a}T)$ che è isomorfo al gruppo Pic $(A,\mathfrak{a})\{T\}$ dove $(A,\mathfrak{a})\{T\}$ è l'anello delle serie ristrette rispetto alla topologia $\mathfrak{a}$-adica di A.

Siano A un anello, B un anello intero su A. Si definisce la seminormalizzazione ${}^{+}_{B}A$ di A in B nel modo seguente:

$${}^{+}_{B}A=\{x\in B \mid x\in A_{\mathfrak{p}}+\text{rad } B_{\mathfrak{p}} \text{ per ogni } \mathfrak{p}\in \text{Spec } A\}$$

Se $A={}^{+}_{B}A$ si dice che A è seminormale in B. Se $B=\overline{A}$(= chiusura integrale di A nel suo anello totale delle frazioni) si pone:

$${}^{+}A={}^{+}_{B}A \text{ ed A si dice seminormale se } A={}^{+}A$$

TEOREMA 4.1. (Traverso) *Sia A un anello ridotto. Allora l'omomorfismo canonico* $\bar{\nu}'$: Pic $A[T]\rightarrow$ Pic A *(associato all'A-omomorfismo* ν': $A[T]\rightarrow A$ *tale che* $\nu'(T)=0$ *è un isomorfismo se e solo se A è seminormale.*

Dim. (Cfr. [8], teor. 3.6.).

OSSERVAZIONE. Il teorema di Traverso, espresso nella sua forma originaria, asserisce che l'omomorfismo canonico $\bar{i}'$: Pic $A\rightarrow$ Pic $A[T]$ (associato all'immersione canonica i': $A\rightarrow A[T]$) è un isomorfismo se e solo se A è seminormale (Cfr. [8], teor. 3.6). Poichè $\nu'\circ i'=Id_A$, si ha $\bar{\nu}'\circ\bar{i}'=Id_{\text{Pic } A}$ e quindi $\bar{\nu}'$ è un isomorfismo se e solo se $\bar{i}'$ è un isomorfismo. Perciò il nostro enunciato equivale a quello dato da Traverso.

Conviene ora richiamare alcuni fatti ben noti relativi ai completamenti $\mathfrak{a}$-adici, in particolare agli anelli di serie ristrette.

PROPOSIZIONE 4.2. Siano A un anello, $\mathfrak{a}$ un ideale di A ed $\hat{A}$ il completato di A rispetto alla topologia $\mathfrak{a}$-adica. Vale allora l'isomorfismo Pica $\hat{A} \cong \text{Pic}\,(A/\mathfrak{a})$.

Dim. (Cfr. [1], teorema 1.18).

Siano A un anello ed $\mathfrak{a}$ un ideale di A. Supponiamo che A sia dotato della topologia $\mathfrak{a}$-adica. Si dice che una serie formale

$$f = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_r} a_{i_1 i_r} T_1^{i_1} \ldots T_r^{i_r}$$

dell'anello $A[[T_1, \ldots, T_r]]$ è ristretta se per ogni intorno $\mathfrak{a}^n$ di 0 in A solo un numero finito di coefficienti $a_{i_1 \ldots i_r}$ non appartengono ad $\mathfrak{a}^n$.

Le serie formali ristrette su A, formano un sottoanello di $A[[T_1, \ldots, T_r]]$ che si indica con $(A, \mathfrak{a})\{T_1, \ldots, T_r\}$ (e che uniformemente a quanto fatto precedentemente indicheremo abbreviatamente con $(A, \mathfrak{a})\{T\}$). Vale la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 4.3. *Siano A un anello,* $\mathfrak{a}$ *un ideale di A. Allora il completamento di* $A[T]$ *rispetto alla topologia* $(\mathfrak{a}T)$*-adica è isomorfo all'anello* $(A, \mathfrak{a})\{T\}$.

Dim. (Cfr. [6], prop. 1).

TEOREMA 4.4. *Siano A un anello,* $\mathfrak{a}$ *un ideale di A tali che* $A/\mathfrak{a}$ *è ridotto. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) $\text{Pic}\,(A, \mathfrak{a})\{T\} = 0$

(b) $\text{Pic}\,A[T]/(\mathfrak{a}T) = 0$

(c) $A/\mathfrak{a}$ è seminormale.

Dim. L'equivalenza di (a) e (b) è un corollario immediato delle prop. 4.2 e 4.3.

Dal corollario 3.6 si trae poi Pic $A[T]/(\mathfrak{a}T)=0$ se e solo se l'omomorfismo $\tilde{\nu}'$: Pic $(A/\mathfrak{a})[T] \rightarrow$ Pic $(A/\mathfrak{a})$ è un isomorfismo; quest'ultima condizione, è equivalente, per il teorema 4.1 alla seminormalit6 di $A/\mathfrak{a}$ e da ciò si trae l'equivalenza di b) e c).

COROLLARIO 4.5. *Siano A un anello* $\mathfrak{a}$ *un ideale di A. Si ha allora:* Pic $(A, \mathfrak{a})\{T\}=0$ *se e solo se* $A/\sqrt{\mathfrak{a}}$ *è seminormale.*

Dim. Basta osservare che essendo A noetheriano si ha per un intero n opportuno: $(\sqrt{\mathfrak{a}})^n \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$; ne segue $(A, \mathfrak{a})\{T\}=(A, \sqrt{\mathfrak{a}})\{T\}$. Il corollario segue allora dalla doppia implicazione (a)$\Leftrightarrow$(c) del teorema, una volta osservato che $A/\sqrt{\mathfrak{a}}$ è un anello ridotto.

5. I risultati precedenti trovano applicazione alla fattorialità degli anelli di serie ristrette. Ricordiamo il seguente risultato generale sulla fattorialità dei completamenti degli anell regolari.

PROPOSIZIONE 5.1. *Siano A un anello regolare,* $\mathfrak{a}$ *un ideale di A, Â il completato di A rispetto alla topologia* $\mathfrak{a}$*-adica. Allora: Â è fattoriale se e solo* spec $A/\mathfrak{a}$ *è connesso e* Pic $A/\mathfrak{a}=0$.

Dim. (Cfr. [5], teor. 7).

La proposizione precedente si può applicare nel caso particolare in cui si completi l'anello dei polinomi $A[T]$ all'anello delle serie ristrette $(A, \mathfrak{a})\{T\}$ (cfr. la prop. 4.3). Si ottiene allora la:

PROPOSIZIONE 5.2. *Siano A un dominio regolare,* $\mathfrak{a}$ *un ideale di A. Si ha:*

$$(A,\mathfrak{a})\{T\} \text{ è fattoriale} \Leftrightarrow \operatorname{Pic}(A[T]/(\mathfrak{a}T))=0$$

Tenendo conto adesso dei risultati del n. 4 siamo in grado di dare il teorema principale del presente lavoro:

TEOREMA 5.3. *Siano A un anello regolare e fattoriale e* $\mathfrak{a}$ *un ideale di A.*

$$(A, \mathfrak{a})\{T\} \text{ è fattoriale} \Leftrightarrow A/\sqrt{\mathfrak{a}} \text{ è seminormale.}$$

Dim. Segue dalla prop. 5.2 e dal teor. 4.4 tenuto conto della dimostrazione del cor. 4.5.

Sia $\hat{A}$ il completamento $\mathfrak{a}$-adico di A. Il completamento di $A[T]$ rispetto alla topologia $\mathfrak{a}A[T]$-adica è l'anello delle serie ristrette $(\hat{A},\mathfrak{a}\hat{A})\{T\}$. Si ottiene allora la:

PROPOSIZIONE 5.4. *Nelle ipotesi della proposizione 5.2 sia inoltre Spec $A/\mathfrak{a}$ connesso. Si ha allora:*

$$(\hat{A},\, \mathfrak{a}\hat{A})\ \{T\}\ \textit{fattoriale} \Leftrightarrow \mathrm{Pic}\ (A/\mathfrak{a}[T]=0$$

Dim. Segue dalla prop. 5.1.

La seguente proposizione fornisce dei legami tra la fattorialità dell'anello $(A,\, \mathfrak{a})\{T\}$ e quella dell'anello $(\hat{A},\, \mathfrak{a}\hat{A})\{T\}$:

PROPOSIZIONE 5.5. *Siano A un dominio regolare ed $\mathfrak{a}$ un ideale di A.*
Supponiamo che A sia fattoriale, si ha allora:

$$(5) \qquad (\hat{A},\, \mathfrak{a}\hat{A})\{T\}\ \textit{fatloriale} \Rightarrow (A,\, \mathfrak{a})\{T\}\ \textit{fattoriale}.$$

Supponiamo che sia Pic $A/\mathfrak{a}=0$ *e* Spec $A/\mathfrak{a}$ *connesso; si ha allora:*

$$(6) \qquad (A,\mathfrak{a})\{T\}\ \textit{fattoriale} \Rightarrow (\hat{A},\, \mathfrak{a}\hat{A})\{T\}\ \textit{fattoriale}.$$

Dim. (5) segue dal cor. 3,6, dalla prop. 5.2 e dalla prop. 5.4 ricordando che, se A è un anello fattoriale, si ha Pic $A=0$.

(6) segue, ancora dal cor. 3.6, dalla prop. 5.4 e dalla prop. 5.2.

COROLLARIO 5.6. *Siano A un anello locale regolare (quindi fattoriale) ed $\mathfrak{a}$ un ideale di A. Sia $\hat{A}$ il completamento di A rispetto alla topologia $\mathfrak{a}$-adica Allora:*

$$(A,\mathfrak{a}\{T\}\ \textit{è fattoriale} \Leftrightarrow (\hat{A},\, \mathfrak{a}\hat{A})\{T\}\ \textit{è fattoriale}.$$

Dim. Se A è un anello locale lo è anche $A/\mathfrak{a}$ e quindi Pic $A/\mathfrak{a}=0$ (cfr. [3], § 5, n. 4, prop. 5). Inoltre lo spettro di un anello è connesso se non contiene elementi indepotenti $\neq 0,1$ (cfr. [3], § 4, n.3 cor. 2) ed è facile verificare che quest'ultima proprietà vale in un anello locale. Quindi dalla prop. 5.5 segue la tesi.

OSSERVAZIONE I. Per le applicazioni del teorema 5.3, occorre dunque rispondere alla questione seguente: sia A un anello regolare e fattoriale; si possono dare delle condizioni per un ideale $\mathfrak{a}$ affinché l'anello $A/\sqrt{\mathfrak{a}}$ sia seminormale?

Non si conoscono delle caratterizzazioni generali. Tuttavia la letteratura fornisce già delle condizioni sufficienti e caratterizzazioni parziali interessanti. Ci limitamo a citare in proposito qualche risultato.

1) Un anello normale è seminormale (segue subito dalla definizione).

2) Sia $A=k[X, Y]_{(X,Y)}$ oppure $A=k[[X, Y]]$, $\sqrt{\mathfrak{a}}=(f)$, dove f rappresenta una curva piana semplice passante per l'origine. Si ha allora $A/\sqrt{\mathfrak{a}}$ è seminormale se e solo se f ha nell'origine un punto semplice oppure un punto doppio nodale. Una dimostrazione di questo fatto è stata data in [7], basandosi sulla codizione $\operatorname{Pic}(A/\sqrt{\mathfrak{a}})[T]=0$ equivalente alla seminormalità di $A/\sqrt{\mathfrak{a}}$.

3) (Delocalizzazione del caso precedente). Sia $k[X, Y]/(f)$ l'anello delle coordinate di una curva piana semplice su un corpo algebricamente chiuso. Allora $k[X, Y]/(f)$ è seminormale se e solo se la curva f ha al più singolarità nodali (cfr. [4], dove si estende la dimcstrazione precedente).

4) Estensione del caso precedente alle curve di uno spazio qualsiasi. L'anello delle coordinate di una curva semplice su un corpo algebricamente chiuso è seminormale se e solo se i punti singolari soddisfano a questa condizione: detta n la molteplicità del punto il cono tangente è costituito da n rette linearmente indipendenti (cfr. [3]; la dimostrazione è di tipo completamente diverso dalle precedenti).

5) L'anello delle coordinate di una superficie dello spazio ordinario dotata di singolarità ordinarie (cioè proiezione generica di una superficie non singolare di uno spazio a cinque dimensioni) è seminormale (cfr. [3]).

OSSERVAZIONE II. Con i metodi usati in questo lavoro otteniamo quasi tutti i più significativi risultati sulla fattorialità delle serie ristrette