

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE GRIOLI

**Sui continui di Cosserat con rotazioni libere**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 47 (1972), p. 299-312

<[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1972\\_\\_47\\_\\_299\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__299_0)>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## SUI CONTINUI DI COSSERAT CON ROTAZIONI LIBERE

GIUSEPPE GRIOLI \*)

**SUNTO** - Si considera il problema dei continui di Cosserat con rotazioni libere nell'ambito della teoria delle deformazioni finite, supponendo la rotazione globale del generico elemento decomposta nel prodotto di due rotazioni di cui una coincidente con la rotazione locale dei continui classici. Si ha di conseguenza la esplicita dipendenza delle equazioni dalla deformazione pura. Questioni di compatibilità sono considerate.

Si determinano le variabili da cui dipende l'*energia libera* e si stabiliscono le corrispondenti equazioni costitutive nell'ipotesi di trasformazioni reversibili, considerando brevemente anche il caso che la teoria venga sviluppata senza fare uso della decomposizione in prodotto della rotazione globale libera.

Viene fatta inoltre qualche osservazione relativa alle equazioni di campo nel caso dinamico.

**SUMMARY** - Dealing with the theory of finite deformations, we consider the problem of the Cosserat's continua with free rotations. We presume that the global rotation of the typical element is resolved into the product of two rotations, of which one rotation is coincident with the local rotation of the classical continua. Therefore the general equations depend on the pure deformation. Compatibility questions are considered.

We determine the variables on which the *free energy* depends, and we settle the corresponding constitutive equations, by considering briefly also the case that the theory develops without the resolution into product of the free global rotation.

Some observations are made with reference to the dynamical case.

---

\*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università di Padova, Via Belzoni, 3, 35100 Padova.

In un recente lavoro [1] ho impostato lo studio dei continui di Cosserat con rotazioni libere supponendo la rotazione globale del generico elemento espressa come prodotto di una rotazione libera ausiliaria per la rotazione locale inerente al campo di spostamenti.

In tal modo è possibile una descrizione particolareggiata del contributo delle due rotazioni alla formazione dello stress e possono aversi utili informazioni sulla struttura analitica dell'*energia libera* del continuo. Ove la rotazione ausiliaria si riduca all'identità si ricade nel caso dei continui di Cosserat con rotazioni vincolate<sup>1)</sup>.

La trattazione contenuta in [1] si fonda su una speciale espressione della rotazione  $\delta\omega$  che si ha nel passaggio dalla configurazione attuale da  $C'$  a una *vicinissima*  $C''$ . Tale espressione dipende dallo spostamento  $\delta u$   $C'$  a  $C''$ , dalle corrispondenti variazioni dei parametri che caratterizzano la rotazione libera ausiliaria, ma, inoltre, dai loro valori inerenti allo stato  $C'$  e da quelli che caratterizzano la rotazione locale che, nel passaggio dalla configurazione di riferimento  $C$  a quella attuale  $C'$  è subordinata allo spostamento  $u$ .

Successivi sviluppi in [1] sono fondati su una semplificazione dell'espressione di  $\delta\omega$  che la rende indipendente da tali ultimi parametri. Tuttavia si deve osservare che tale semplificazione, certamente accettabile nella teoria linearizzata dei continui di Cosserat, non ha giustificazione in una teoria di deformazioni finite [3] e, pertanto, taluni punti di [1] vanno riconsiderati. In effetti, mentre i continui di Cosserat apparivano matematicamente compatibili nel caso linearizzato e in qualche caso speciale di deformazioni finite, essi non sembravano tali in generale.

Il problema della dimostrazione della loro compatibilità rimane tuttavia aperto anche dopo l'apparizione del recente lavoro [3] che consiste in una trattazione in coordinate generali dei continui di Cosserat con rotazioni libere ma non costituisce certo una dimostrazione della loro compatibilità. In esso ci si limita, in effetti, a stabilire espressioni molto generali delle equazioni di campo, del lavoro delle forze interne e di relazioni simboliche ma neppure si sfiora il problema delle equa-

---

<sup>1)</sup> Lo studio di tale tipo di sistema continuo nell'ambito della teoria delle deformazioni finite è stato ripreso sin dal 1960 in [2]. La relativa bibliografia è ben nota. Essa è in parte contenuta in [1].

zioni costitutive a livello delle quali può eventualmente presentarsi qualche caso di incompatibilità<sup>2)</sup>).

Uno degli scopi del presente lavoro è, pertanto, l'approfondimento della questione della compatibilità dei continui di Cosserat con rotazioni libere sulla base di una decomposizione della rotazione globale analoga ma non identica a quella di [1]. Essa mi sembra più conveniente in quanto permette di illustrare l'intervento diretto della deformazione pura relativa allo spostamento  $\mathbf{u}$  nelle equazioni costitutive.

Sulla precisazione delle equazioni generali e costitutive dei continui di una trattazione dei continui di Cosserat fatta senza decomposizione alcuna della rotazione globale degli elementi è quasi inutile soffermarsi in quanto esse si ottengono come caso particolare di quelle contenute in [4], [5], [6] per le microstrutture: basta, com'è in seguito osservato, identificare certe matrici ivi usate con matrici dipendenti dalla rotazione globale. Ciononostante, ho voluto dedicare un breve spazio al caso di una trattazione dei Continui di Cosserat fatta senza decomposizione in prodotto della rotazione globale per mostrare come sia possibile, precisata un certo sistema di equazioni di compatibilità per l'*energia libera*, stabilire la più generale espressione analitica che lo soddisfa: in tal modo viene a essere precisata la struttura analitica dell'*energia libera*.

Aggiungo che sulla base di [5], [6] è possibile, come è in seguito osservato, stabilire rapidamente le equazioni generali dinamiche anche in presenza di azioni dissipative.

Per semplicità, non mi preoccuperò della dipendenza dell'*energia libera* dalla temperatura, dato che ciò è inessenziale per gli scopi che mi prefiggo: volendo possono considerarsi quali isoterme le trasformazioni del continuo.

---

<sup>2)</sup> Basta semplicemente osservare che nell'espressione euleriana [vedi (22) e i suoi risvolti lagrangiani] del lavoro delle forze interne nel passaggio dalla configurazione attuale a una vicinissima la parte antisimmetrica dello stress è legata sia al campo degli spostamenti sia alla rotazione globale e che tali elementi sono tra loro indipendenti in una teoria con rotazioni libere, per prevedere che l'*energia libera* dovrà soddisfare a certe equazioni di compatibilità (anche in uno sviluppo che non faccia uso di decomposizione alcuna per la rotazione globale [vedi n. 4]).

### 1. Qualche osservazione sulla rotazione del generico elemento del continuo.

Siano  $T$  e  $T'$  due terne trirettangole levogire con la medesima origine e  $R$  la matrice che caratterizza la rotazione che muta la  $T$  nella  $T'$ . Le componenti  $R_{rs}$  di  $R$  coincidono evidentemente con i coseni direttori degli assi della  $T$  rispetto alla  $T'$  e, com'è noto, sono esprimibili mediante tre parametri  $Q_i$ . Indicherò tale fatto scrivendo brevemente  $R=R(Q)$ . Fissata una rotazione  $R(\eta)$  dipendente dai valori  $\eta_i$  dei parametri di rotazione, esiste sempre una rotazione  $R(\bar{q})$  caratterizzata dai valori  $\bar{q}_i$  dei parametri per la quale risulta

$$(1) \quad R(Q)=R(\eta)R(\bar{q}).$$

Un continuo di Cosserat nello stato  $C$  è sostanzialmente costituito da un insieme (continuo) di punti  $P$  a ognuno dei quali è associato un triedro rigido. La sua deformazione è caratterizzata dallo spostamento  $\mathbf{u}$  del generico  $P$  e dalla rotazione del triedro associato. Tale schema matematico si può pensare quale descrizione di un insieme di molecole rigide di baricentri  $P$ . La deformazione del continuo costituito dai punti  $P$  è del tipo classico ed è caratterizzata dallo spostamento  $\mathbf{u}$ . Ad essa corrisponde una rotazione locale individuata dal campo vettoriale  $\mathbf{u}$  e nel seguito supporrò che i parametri  $\eta_i$  che intervengono nella (1) siano proprio quelli che caratterizzano tale rotazione locale. L'arbitrarietà della rotazione globale  $R(Q)$  dipenderà pertanto dall'arbitrarietà di scelta dei valori dei  $\bar{q}_i$ .

Siano dunque  $\mathbf{u}$  e  $Q_i$  i parametri da cui dipende la trasformazione del continuo dallo stato di riferimento  $C$  a quello attuale  $C'$  e  $\eta_i$ ,  $\bar{q}_i$  quelli associati in base alla decomposizione (1).

Una trasformazione « piccolissima » del continuo da  $C'$  a  $C''$  sarà caratterizzata dal campo vettoriale  $\delta\mathbf{u}$ , dalle conseguenti variazioni  $\delta\eta_i$  degli  $\eta_i$  e da variazioni  $\delta\bar{q}_i$  dei  $\bar{q}_i$ . In concomitanza si hanno della variazioni  $\delta Q_i$  dei parametri  $Q_i$  e risulta

$$(2) \quad \begin{cases} R(Q+\delta Q)=R_{\delta Q}R(Q), \\ R(\bar{q}+\delta\bar{q})=R_{\delta\bar{q}}R(\bar{q}), \end{cases} \quad R(\delta+\delta\eta)=R_{\delta\eta}R(\eta),$$

ove le  $R_{\delta Q}$ ,  $R_{\delta \bar{q}}$ ,  $R_{\delta \eta}$  rappresentano le rotazioni relative alla trasformazione da  $C'$  a  $C''$  e corrispondenti alle variazioni <sup>3)</sup>  $\delta Q_i$ ,  $\delta q_i$ ,  $\delta \eta_i$ .

Da (1), (2) e da ben note proprietà delle matrici di rotazione segue

$$(3) \quad R_{\delta Q} = R(\eta + \delta \eta) R(\bar{q} + \delta \bar{q}) R^{-1}(\bar{q}) R^{-1}(\eta) = R_{\delta \eta} R(\eta) R_{\delta \bar{q}} R^{-1}(\eta).$$

In base alla teoria degli spostamenti rotatori infinitesimi esisteranno tre vettori  $\delta \omega$ ,  $\delta \bar{\omega}$ ,  $\delta \omega_\eta$  per i quali risulta <sup>4)</sup>

$$(4) \quad R_{\delta Q} = 1 + \delta \omega \times, \quad R_{\delta \bar{q}} = 1 + \delta \bar{\omega} \times, \quad R_{\delta \eta} = 1 + \delta \omega_\eta \times.$$

Da (3), (4) segue

$$(5) \quad 1 + \delta \omega \times = (1 + \delta \omega_\eta) R(\eta) (1 + \delta \bar{\omega} \times) R^{-1}(\eta)$$

da cui <sup>5)</sup>

$$(6) \quad \delta \omega = \delta \omega_\eta + R(\eta) \delta \bar{\omega}.$$

Per esprimere le componenti del vettore  $\delta \bar{\omega}$  si osservi che da (2) segue <sup>6)</sup>

$$(7) \quad (R_{\delta \bar{q}})_{rs} = R(q + \delta \bar{q})_{r1} R_{1s}^{-1}(\bar{q}) = \frac{\partial R_{r1}(\bar{q})}{\partial \bar{q}_i} R_{s1}(\bar{q}) \delta q_i + \delta_{rs}$$

che in base a (4) permette di scrivere

$$(8) \quad \delta \bar{\omega}_r = \frac{1}{2} \varepsilon_{vrs} \frac{\partial R_{v1}(\bar{q})}{\partial \bar{q}_l} R_{s1}(\bar{q}) \delta \bar{q}_l,$$

ove  $\varepsilon_{vrs}$  denota l'indicatore di Ricci.

<sup>3)</sup> Si tenga presente che in generale i parametri caratteristici delle rotazioni  $R_{\delta Q}$ ,  $R_{\delta \eta}$ ,  $R_{\delta \bar{q}}$  non coincidono con  $\delta Q_i$ ,  $\delta \eta_i$ ,  $\delta \bar{q}_i$ .

<sup>4)</sup>  $\delta \omega_\eta$  corrisponde al  $\delta \omega^{is}$  di [1].

<sup>5)</sup> La (6) è analoga ma non identica alla (12) di [1]. Essa corrisponde alla decomposizione contenuta in [3] per la velocità angolare.

<sup>6)</sup> L'inversa di una matrice di rotazione coincide con la sua coniugata.

Si denotino con  $y_r$  le coordinate di  $P$  rispetto a un prefissato riferimento cartesiano trirettangolo legoviro e con  $x_r$  quelle del corrispondente  $P'$  di  $P$  in  $C'$ . Il vettore  $\delta\omega_\eta$  coincide, com'è ben noto, con il rotore rispetto a  $P'$  del vettore  $\delta\mathbf{u}$ . Posto

$$(9) \quad B_{il}(q) = \frac{1}{2} \varepsilon_{vis} \frac{\partial R_{vi}(\bar{q})}{\partial \bar{q}_l} R_{st}(\bar{q}), \quad B'_{ri}(\bar{q}, \eta) = R_{ri}(\eta) B_{il}(\bar{q}),$$

e denotando con la sbarretta la derivazione rispetto alle  $x_s$ , da (6), (9) segue, pertanto <sup>7</sup>,

$$(10) \quad B_{il}(\bar{q}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{rpt} (\delta u_i)_{/p} + B'_{ri}(\bar{q}, \eta) \delta \bar{q}_t.$$

## 2. Qualche osservazione sulla deformazione pura e sulla rotazione locale nei continui classici.

In questo numero si considererà la deformazione di un continuo di tipo classico caratterizzata dal campo di spostamenti  $u_i = x_i - y_i$ . Denotando con la virgola la derivazione rispetto alle  $y_i$  sia  $a$  la matrice delle  $x_{r,s}$ :  $a = |x_{r,s}|$ . È ben nota la decomposizione in prodotto

$$(11) \quad a = R(\eta)d \Leftrightarrow x_{r,s} = R_{ri}(\eta)d_{is},$$

dove  $R(\eta)$  denota la rotazione locale e  $d$  la deformazione pura associata alla trasformazione del continuo. Precisamente,  $d$  è rappresentata da una matrice simmetrica che ammette almeno una terna di direzioni unite con coefficienti principali positivi.

Detta  $\varepsilon$  la matrice delle caratteristiche di deformazione e denotando con il soprassegno la matrice coniugata di una data matrice (ottenuta, cioè, mediante lo scambio di righe con colonne), si ha

$$(12) \quad \bar{a}a = dd = d^2 = b = 1 + 2\varepsilon,$$

---

<sup>7</sup>) In [1] le  $B'_{ri}$  sono state identificate con le  $B_{ri}$  ma ciò è lecito solo nel caso linearizzato.

o, più esplicitamente,

$$(13) \quad \kappa_{i,r} \kappa_{i,s} = d_{ir} d_{is} = b_{rs} = \delta_{rs} + 2\varepsilon_{rs}.$$

La corrispondenza tra la  $b$  e la  $d$  permette di derivare le  $d_{rs}$  rispetto alle  $\kappa_{p,t}$  per tramite delle  $b_{rs}$ . Ne segue, tenuto conto di (13),

$$(14) \quad \frac{\partial d_{i\tau}}{\partial \kappa_{p,t}} = \frac{\partial d_{i\tau}}{\partial b_{\sigma q}} (\kappa_{pq} \delta_{\sigma t} + \kappa_{p\sigma} \delta_{qt}),$$

da cui deriva l'uguaglianza <sup>8)</sup> (utile in seguito)

$$(15) \quad \varepsilon_{svp} \kappa_{v,t} \frac{\partial d_{i\tau}}{\partial \kappa_{p,t}} = \varepsilon_{svp} \frac{\partial d_{i\tau}}{\partial b_{\sigma q}} (\kappa_{p,q} \kappa_{v,\sigma} + \kappa_{p,\sigma} \kappa_{v,q}) = 0.$$

Vale la pena di segnalare una analoga relazione per la rotazione locale. Tenuto conto che da (11) segue  $d_{i\tau} = R_{ri}(\eta) \kappa_{r,\tau}$ , la (15) diviene

$$(16) \quad \varepsilon_{svp} \kappa_{v,t} \frac{\partial d_{i\tau}}{\partial \kappa_{p,t}} = \varepsilon_{svp} \kappa_{v,t} \left[ \frac{\partial R_{ri}(\eta)}{\partial \kappa_{p,t}} \kappa_{r\tau} + R_{pi}(\eta) \delta_{\tau t} \right] = 0.$$

Tenendo presente la relazione  $R_{li} R_{pi} = \delta_{lp}$ , da (16) segue

$$(17) \quad \varepsilon_{svp} \kappa_{v,t} \kappa_{r,\tau} \frac{\partial R_{li}(\eta)}{\partial \kappa_{p,t}} R_{ri}(\eta) + \varepsilon_{sr} \kappa_{r,\tau} = 0$$

e da questa

$$(18) \quad \varepsilon_{svp} \kappa_{v,t} \frac{\partial R_{li}(\eta)}{\partial \kappa_{p,t}} R_{qi}(\eta) = \varepsilon_{sqt}.$$

Si può osservare che mentre la più generale soluzione di (15) è un'arbitraria funzione delle  $b_{rs}$ , invece quella delle (18) che possa avere significato di rotazione locale è, come del resto è naturale in base alle stesse (11), esprimibile nella forma

$$(19) \quad R_{rs}(\eta) = \kappa_{r,i} \varphi_{is}$$

---

<sup>8)</sup> Del resto, la (15) si deduce subito dalla (9) di [4] identificando  $F'$  con  $d_{ir}$ .



con le  $\varphi_{is}$  funzioni simmetriche delle  $b_{lm}$  soddisfacenti alla condizione

$$(20) \quad \varphi_{\psi i} \varphi_{ti} = \frac{A_{i\psi} A_{it}}{\mathfrak{D}^2},$$

ove  $A_{i\psi}$  denota il complemento algebrico di  $\kappa_{i,\psi}$  nel determinante,  $\mathfrak{D}$ , delle  $\kappa_{i,\psi}$ .

### 3. Energia libera - Equazioni costitutive.

Siano  $|X_{rs}|$  e  $|\Psi_{rs}|$  le matrici generalmente non simmetriche che caratterizzano lo stress eulediano di un continuo di Cosserat<sup>9)</sup>, cioè, precisamente, la distribuzione degli sforzi e delle coppie di contatto nel generico  $P'$  dello stato attuale  $C'$ . Siano, invece,  $|Y_{rs}|$ ,  $|\lambda_{rs}|$  le matrici (di Piola Kirchoff, la prima) definite dalle uguaglianze

$$(21) \quad X_{rs} = \frac{1}{\mathfrak{D}} Y_{lm} \kappa_r, \kappa_{s,m}, \quad \Psi_{rs} = \frac{1}{\mathfrak{D}} \lambda_r, \kappa_{s,l}.$$

Il lavoro delle forze interne nel passaggio dallo stato attuale  $C'$  a uno vicinissimo  $C''$ , per unità di volume dello stato attuale, è espresso, com'è ben noto, da

$$(22) \quad \delta I^{(i)} = X_{rs} (\delta u_r)_{/s} + \Psi_{rs} (\delta \omega_r)_{/s} + \epsilon_{rlm} X_{lm} \delta \omega_r.$$

Usando gli sviluppi di [1] che si mantengono del tutto validi, salvo la formale sostituzione di  $B'_{ri}(\bar{q}, \eta)$  a  $B_{ri}(q)$ , si deduce la seguente espressione lagrangiana del lavoro delle forze interne per unità di volume dello stato di riferimento<sup>10)</sup>.

<sup>9)</sup> Detti  $c_r$  i versori della terna trirettangola levogira di riferimento e  $\varphi_s, \psi_s$  i vettori che caratterizzano gli sforzi e le coppie di contatto attraverso il generico elemento superficiale ortogonale all'asse di versore  $c_s$ , s'intende, precisamente,

$$X_{rs} = c_r \cdot \varphi_s, \quad \Psi_{rs} = c_r \cdot \psi_s.$$

<sup>10)</sup> A differenza che nella forma euleriana, nella forma lagrangiana (e nel seguito) il simbolo  $\delta$  indica proprio la variazione dell'entità a cui è preposto.

$$(23) \quad \delta^{*(i)} = [Y_{(pt)}\kappa_{m,l} + B_{rlmp}\lambda_{rl}]\delta u_{m,p} + \lambda_{rl}[\delta\mu_{rl} + B'_{ri}\delta(\bar{q}_{i,l})] + \\ + [\lambda_{rl}B'_{ri,l} + \varepsilon_{rpl}B'_{ri}Y_{[lm]}\kappa_{p,l}\kappa_{t,m}]\delta\bar{q}_i,$$

con

$$(24) \quad \mu_{rl} = \frac{1}{2\mathfrak{D}} \varepsilon_{rlm} A_{lp} u_{m,pl},$$

$$(25) \quad B_{rlmp} = \frac{u_{\nu,\sigma l}}{2\mathfrak{D}^2} [\varepsilon_{rl\nu} A_{lp} A_{m\sigma} - \varepsilon_{rlm} A_{l\sigma} A_{\nu p}].$$

Denotando con  $I$  l'energia libera del sistema, la solita tecnica fondata sui principi della termodinamica permette di dedurre la dipendenza di  $I$  dalle variabili  $\kappa_{r,s}$ ,  $\mu_{rs}$ ,  $\bar{q}_i$ ,  $\bar{q}_{i,l}$ , oltre che dalle temperature assolute degli stati  $C$  e  $C'$ , e che in ogni trasformazione reversibile le equazioni costitutive — prescindendo da quella esprimente l'entropia — hanno le espressioni <sup>11)</sup>

$$(26) \quad Y_{(pt)} = \frac{A_{mt}}{\mathfrak{D}} \left[ \frac{\partial I}{\partial \mu_{rl}} B_{rlmp} - \frac{\partial I}{\partial \kappa_{m,p}} \right],$$

$$(27) \quad \lambda_{rl} B'_{ri,l} + \varepsilon_{rpl} B'_{ri} Y_{[lm]}\kappa_{p,l}\kappa_{t,m} = - \frac{\partial I}{\partial \bar{q}_i},$$

$$(28) \quad \begin{cases} \lambda_{rl} + \tau A_{r,l} = - \frac{\partial I}{\partial \mu_{rl}} \\ \lambda_{rl} B'_{ri} = - \frac{\partial I'}{\partial \bar{q}_{i,l}}. \end{cases}$$

Nelle (28)  $\tau$  denota un parametro la cui presenza è dovuta al fatto che le variabili  $\mu_{rs}$  soddisfano alla condizione geometrica  $A_{rs}\mu_{rs} = 0$ .

Posto, formalmente

$$(29) \quad I' = I + \tau A_{rl}\mu_{rl},$$

<sup>11)</sup> Le (26), (28, 1) coincidono con le (37), (34, 1) di [1] rispettivamente; le (27), (28, 2) coincidono con le (33), (34,2) di [1], salvo la sostituzione delle  $B'_{ri}$  alle  $B_{ri}$  (e, naturalmente, di  $\bar{q}_i$  a  $q_i$ ).

le (28) divengono <sup>12)</sup>

$$(30) \quad \lambda_{ri} = - \frac{\partial I'}{\partial \mu_{ri}}, \quad \lambda_{ri} B'_{ri} = - \frac{\partial I'}{\partial \bar{q}_{i,l}},$$

la cui coesistenza richiede che la  $I'$  soddisfi al sistema

$$(31) \quad \frac{\partial I'}{\partial \mu_{ri}} B'_{ri} - \frac{\partial I'}{\partial \bar{q}_{i,l}} = 0,$$

analoghe alle [[1], (40)] ma differenti da esse per la sostituzione delle  $B'_{ri}$  alle  $B_{ri}$ .

La condizione di simmetria imposta dalle (26) ai secondi membri è proprio la [[1], (47)]:

$$(32) \quad \varepsilon_{spt} \left[ \kappa_{p,l} \frac{\partial I'}{\partial \kappa_{t,l}} + \mu_{pl} \frac{\partial I'}{\partial \mu_{tl}} \right] = 0,$$

la cui generale soluzione è una funzione arbitraria delle variabili  $b_{rs}$  [vedi (13)] e delle

$$(33) \quad l_{rs} = \kappa_{i,r} \mu_{is}.$$

È opportuno osservare che anche una qualunque funzione delle  $d_{rs}$ ,  $l_{rs}$  soddisfa alle (32). Infatti, detta  $F(d, l)$  una qualunque funzione delle  $d_{rs}$ ,  $l_{rs}$  e identificando con essa la  $I'$ , le (32) divengono

$$(34) \quad \varepsilon_{spt} \kappa_{p,l} \frac{\partial F}{\partial d_{i\tau}} \frac{\partial d_{i\tau}}{\partial \kappa_{t,l}} = 0,$$

che sono soddisfatte in base alle (15).

Tenendo conto di (9) e della circostanza che  $I'$  dipende dalle  $\mu_{rs}$  per tramite delle variabili  $l_{rs}$ , le condizioni di compatibilità (31) si

---

<sup>12)</sup> Le (30) mostrano che la conoscenza di  $\tau$  è inessenziale ai fini della determinazione dello stress.

scrivono

$$(35) \quad \frac{\partial I'}{\partial l_{i\sigma}} \kappa_{r,i} R_{rp}(\eta) B_{pi}(\bar{q}) - \frac{\partial I'}{\partial \bar{q}_{i,\sigma}} = 0$$

o, anche, in base a (11),

$$(36) \quad \frac{\partial I'}{\partial l_{i\sigma}} d_{ip} B_{pi}(\bar{q}) - \frac{\partial I'}{\partial \bar{q}_{i,\sigma}} = 0.$$

Non è difficile riconoscere che la soluzione generale delle (36) è una funzione arbitraria delle  $b_{rs}$ ,  $\bar{q}_i$  e delle variabili

$$(37) \quad m_{rs} = l_{rs} + B_{if}(\bar{q}) d_{ri} \bar{q}_{f,s}.$$

Una tale funzione, per quanto è stato osservato a proposito delle  $d_{rs}$  soddisfa anche alle (32). Le (30) — e così pure le (28) — risultano pertanto compatibili. Di esse si può fare a meno di considerarne un gruppo; è, cioè, sufficiente considerare le sole (30, 1).

È facile riconoscere che ove si linearizzino tutte le equazioni, come pure ove si supponga (nel problema non linearizzato) la  $I$  indipendente dalle  $\bar{q}_{i,l}$ , si ottengono esattamente i risultati di [1].

Da quanto detto si riconosce che l'energia libera  $I$  è funzione delle caratteristiche di deformazione  $\epsilon_{rs} = \frac{1}{2}(b_{rs} - \delta_{rs})$ , delle  $\bar{q}_i$  e delle variabili  $m_{rs}$  che dipendono linearmente dalle  $d_{ih}$ . Le equazioni costitutive e di campo dipendono pertanto oltre che dalle  $u_r$  e  $\bar{q}_r$ , anche dalle  $d_{rs}$  esplicite e ciò crea delle complicazioni data la difficoltà in generale di esprimere le  $d_{rs}$  mediante le  $u_i$ . Ne segue la necessità — ai fini del pareggiamento nelle equazioni generali del numero delle incognite con quello delle equazioni — di associare alle equazioni costitutive e di campo le sei equazioni (13) che legano le  $d_{rs}$  alle  $\kappa_{i,h}$ . Per quanto concerne la presenza delle  $R_{rs}(\eta)$ , basta tenere presenti le relazioni  $R_{rs}(\eta) = \kappa_{r,i} d_{is}^{-1} = \frac{A_{ri} d_{is}}{\mathfrak{D}}$ .

Nel caso che invece della decomposizione (1) si faccia uso della

decomposizione

$$(38) \quad R(Q) = R(q)R(\eta),$$

come in [1], si ha il vantaggio della indipendenza delle equazioni generali dalla deformazione pura. In tal caso, però, si presentano maggiori difficoltà per la determinazione della struttura analitica dell'energia libera.

#### 4. Sulla trattazione dei continui di Cosserat con intervento diretto della rotazione globale.

La teoria dei continui di Cosserat senza l'uso della decomposizione (1) ma riferendosi soltanto allo spostamento  $u$  e ai tre parametri che caratterizzano la rotazione globale si stabilisce rapidamente osservando che ora sussistono le relazioni (6), (8), (9), (10) dopo avere posto in esse  $\delta_{rs}$  al posto di  $R_{rs}(\eta)$ , zero al posto di  $\delta\omega_\eta$  e  $Q_i$  al posto di  $\bar{q}_i$ . Di conseguenza nella (10) manca il primo termine e la (23) diviene

$$(39) \quad \delta^* I^{(i)} = Y_{lp} \chi_{m, l} \delta u_{m, p} + \lambda_{ri} B_{ri}(Q) \delta Q_i + \\ + [\lambda_{rl} B_{ri, l} + \varepsilon_{rpt} B_{ri} Y_{[lm]} \chi_{p, l} \chi_{t, m}] \delta Q_i.$$

Il confronto (di natura termodinamica) di  $\delta^* I$  con  $\delta I$  porta alla conclusione che la  $I$  dipende dalle variabili  $x_{r, s}$ ,  $Q_i$ ,  $Q_{r, s}$  (oltre, s'intende, dalle temperature di  $C$  e  $C'$ ) e porta alle equazioni costitutive

$$(40) \quad \begin{cases} Y_{lp} = -\frac{A_{ml}}{\mathfrak{D}} \frac{\partial I}{\partial \chi_{m, p}}, & \lambda_{ri} = -B_{ir}^{-1} \frac{\partial I}{\partial Q_i}, \\ \varepsilon_{rpt} Y_{[lm]} \chi_{p, l} \chi_{t, m} B_{ri} = -\frac{\partial I}{\partial Q_i} + B_{pr}^{-1} B_{ri, l} \frac{\partial I}{\partial Q_{p, l}}, \end{cases}$$

ove le  $B_{rs}^{-1}$  denotano le componenti della matrice inversa della matrice  $|B_{rs}| : B_{ri} B_{it}^{-1} = \delta_{rt}$ .

Le (40) implicano le equazioni di compatibilità

$$(41) \quad \frac{\partial I}{\partial Q_i} - \frac{\partial I}{\partial Q_{p, l}} B_{ri, l} B_{pr}^{-1} + \varepsilon_{rlm} \chi_{l, p} B_{ri} \frac{\partial I}{\partial \chi_{m, p}} = 0.$$

Si può dimostrare che la più generale soluzione del sistema (41) è una funzione arbitraria delle  $b_{rs}$  e delle variabili

$$(42) \quad v_{rs} = \kappa_{i,r} R_{is}(Q), \quad v_{rs}^{(t)} = \kappa_{i,r} \frac{\partial R_{is}}{\partial Q_l} Q_{l,t}.$$

Per la dimostrazione riesce utile l'uso delle (9) e delle relazioni

$$(43) \quad \frac{\partial R_{is}}{\partial Q_p} = \varepsilon_{iil} B_{ip} R_{l,s},$$

da esse immediatamente deducibili.

D'altronde, il risultato è una conseguenza immediata di quanto è detto in [4], [6] sulle microstrutture: basterà ivi identificare le  $\gamma_{rs}$  con la matrice di rotazione  $R_{rs}(Q)$ .

## 5. Osservazioni sul caso dinamico.

Per lo studio di un problema dinamico sui continui di Cosserat occorre stabilire le espressioni delle forze d'inerzia. A ciò si giunge facilmente sulla base di quanto è contenuto in [5] nello studio delle microstrutture con deformazioni finite. Precisamente, si trova che la forza viva e il momento intrinseco delle quantità di moto (rispetto a  $P$ ) per unità di volume dello stato di riferimento hanno le espressioni

$$(44) \quad \begin{cases} T = \frac{1}{2} \mu [\dot{u}^2 + A_{lm} \dot{R}_{rl}(Q) \dot{R}_{rm}(Q)], \\ K_r^{(P)} = \mu \varepsilon_{rln} A_{sp} R_{ls}(Q) \dot{R}_{np}(Q), \end{cases}$$

ove  $\mu$  denota la densità in  $C$  e  $A_{sp}$  è una matrice simmetrica strutturale indipendente dal tempo (ma, eventualmente, dipendente da  $P$ ).

Rinuncio a scrivere esplicitamente le equazioni indefinite dinamiche (deducibili da [6] con qualche sviluppo), ma mi limito a osservare che dette,  $\mu F_r$ ,  $\mu M_r$  le componenti delle forze di massa e del momento delle coppie di massa per unità di volume di  $C$ , i secondi membri,  $\bar{F}_r$ ,  $\bar{M}_r$ , delle equazioni dinamiche indefinite hanno le espressioni

$$(45) \quad \begin{cases} \bar{F}_r = \mu(F_r - \ddot{u}_r), \\ \bar{M}_r = \mu(M_r - \varepsilon_{rli} A_{pn} R_{ln} \ddot{R}_{ip}). \end{cases}$$

Le (44), (45) sono espresse mediante l'uso della rotazione globale  $R_{rs}(Q)$ . Nel caso si voglia sviluppare la teoria dinamica sulla base della decomposizione (1), è conveniente tenere presente che da (11) segue

$$(46) \quad d = \bar{R}a \rightarrow \bar{R} = da^{-1},$$

da cui

$$(47) \quad R = \overline{a^{-1}}d \rightarrow R_{rs}(\eta) = \frac{A_{rt}}{\mathfrak{D}} d_{ts}.$$

Si presenta così la possibilità di esprimere le  $R_{rs}(\eta)$  e le loro derivate temporali mediante le  $x_{r,s}$ ,  $d_{rs}$  e le loro derivate.

In ultima analisi, le sei equazioni indefinite dipenderanno dalle dodici variabili  $u_r$ ,  $d_{rs}$ ,  $\bar{q}_i$  e ad esse vanno associate — come del resto è stato già osservato — le sei relazioni (13).

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] GRIOLI, G.: *Questioni di compatibilità per i continui di Cosserat*, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Symposia Mathematica, Vol. I (1968).
- [2] GRIOLI, G.: *Elasticità asimmetrica*, Annali di Mat. Pura e Applicata (IV), 4, pp. 389-418 (1960).
- [3] FERRARESE, G.: *Sulla compatibilità dei continui di Cosserat*, Rendiconti di Matematica (1), Vol. 4, Serie VI, pp. 151-173 (1971).
- [4] GRIOLI, G.: *Energia libera e stato tensionale dei continui*, Annali di Matematica Pura e Applicata (IV), Vol. LXXXVII, pp. 45-58 (1970).
- [5] GRIOLI, G.: *Microstrutture*, Rend. Acc. Nazionale dei Lincei - Classe di Sc. fis. mat. e natur. Ser. VIII, Vol. XLIX, fasc. 5, pp. 261-267 (1970).
- [6] GRIOLI, G.: *Microstrutture*, Nota II, ibidem, fasc. 6, pp. 379-385 (1970).

Manoscritto pervenuto in redazione il 19 gennaio 1972.