

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

## **Sul teorema dei nuclei per le distribuzioni funtoriali**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 47 (1972), p. 109-113

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1972\\_\\_47\\_\\_109\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__109_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# SUL TEOREMA DEI NUCLEI PER LE DISTRIBUZIONI FUNTORIALI

GIULIANO BRATTI \*)

§ 1. In questa nota si ottiene il seguente

**TEOREMA.** *Sia  $F : (\mathcal{LB}) \rightarrow (\mathcal{LC})$  un funtore compatto-continuo della categoria degli spazi di Banach nella categoria degli spazi completi e di Hausdorff.*

*Lo spazio vettoriale topologico  ${}_c\{\mathfrak{E}\mathfrak{D}_{x,y} \rightarrow F\}$  è isomorfo, algebricamente e topologicamente, allo spazio  $\text{Hom}_c(\mathfrak{D}_x; {}_c\{\mathfrak{E}\mathfrak{D}_y \rightarrow F\})$  ( $\simeq \mathfrak{D}'_x \widehat{\otimes}_\varepsilon {}_c\{\mathfrak{E}\mathfrak{D}_y \rightarrow F\}$ , [4], p. 361). (Le notazioni sono quelle di Popa in [2];  $\mathfrak{D}_{x,y}$ ,  $\mathfrak{D}_x$  e  $\mathfrak{D}_y$  sono gli spazi delle « test fonctions » nelle variabili indicate).*

Tenuta presente la proposizione 2 di [2], p. 673, se  $F \equiv \varepsilon_C$ ,  $\mathbf{C}$  il corpo complesso, poichè  $\mathfrak{D}_{x,y}$  e  $\mathfrak{D}_x$  hanno la proprietà dell'approssimazione, [3], p. 6, si ha:

$${}_c\{\mathfrak{E}\mathfrak{D}_{x,y} \rightarrow F\} = \mathfrak{D}'_{x,y} \text{ e } {}_c\{\mathfrak{E}\mathfrak{D}_y \rightarrow F\} \simeq \mathfrak{D}'_y;$$

il teorema di sopra dà allora, come caso particolare, *il teorema dei nuclei di Schwartz*,  $\mathfrak{D}'_x \widehat{\otimes}_\varepsilon \mathfrak{D}'_y \simeq \mathfrak{D}'_{x,y}$ , [3], p. 93.

È facile vedere, e la dimostrazione è del tutto simile a quella riportata in § 2 per il teorema enunciato, che si può estendere, comprendendo parte della proposizione 28 di [3], p. 98, il teorema enunciato in questo modo:

---

\*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Via Belzoni, 3 - Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R.

Siano  $A_{x,y}$ ,  $A_x$  e  $A_y$  spazi vettoriali topologici con la proprietà dell'approssimazione, nucleari, di Fréchet o tali che  $\forall E$  spazio di Banach,  $A_{x,y} \widehat{\otimes}_\epsilon E = \lim \text{ind } A_{x,y}^{(n)} \widehat{\otimes}_\epsilon E$  se  $A_{x,y} = \lim \text{ind } A_{x,y}^{(n)}$  con  $A_{x,y}^{(n)}$  di Fréchet, analogamente su  $A_x$  e  $A_y$ ;  $A'_x$  abbia la proprietà dell'approssimazione. Si supponga che:

a)  $A_x \otimes A_y$  è denso in  $A_{x,y}$ ;  $\forall a_x \in A_x$  la mappa  $a_x : A_y \rightarrow A_{x,y}$ ,  $a_x(a_y) = a_x \otimes a_y$  è continua; così  $\forall a_y \in A_y$  da  $A_x$  in  $A_{x,y}$ ;

b)  $A_{x,y} \subset A_x \widehat{\otimes}_\epsilon A_y$  e l'iniezione è continua.

Allora:

$${}_c\{\varepsilon_{A_{x,y}} \rightarrow F\} \simeq \text{Hom}_c(A_x; {}_c\{\varepsilon_y \rightarrow F\}) \simeq A'_x \widehat{\otimes}_\epsilon {}_c\{\varepsilon_{A_y} \rightarrow F\}$$

algebricamente e topologicamente.

§ 2. Per la dimostrazione del teorema enunciato in § 1 si farà uso essenziale del teorema di A. Grothendieck di [1], p. 52; si ha:

Se  $E$  e  $F$  sono spazi di Fréchet ogni parte compatta di  $E \widehat{\otimes}_\pi F$  è contenuta nell'involuppo convesso bilanciato e chiuso di un insieme  $A \otimes B$  dove  $A$  (risp.  $B$ ) è una parte compatta di  $E$  (risp.  $F$ ).

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI § 1. Sia  $x : {}_c\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{x,y}} \rightarrow F\} \rightarrow \text{Hom}_c(\mathfrak{D}_x; {}_c\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_y} \rightarrow F\})$  la mappa lineare così definita:

$$\forall \varphi(x) \in \mathfrak{D}_x \text{ e } \forall E \in \mathcal{O}b(\mathcal{L}B), \langle \chi(T) \cdot \varphi \rangle^E : \mathfrak{D}_y \widehat{\otimes}_\epsilon E \rightarrow F(E), \\ \langle \langle \chi(T) \cdot \varphi \rangle^E \cdot \psi(y) \rangle = \langle T^E \cdot \varphi(x) \otimes \psi(y) \rangle.$$

Che  $\varphi(x) \otimes \psi(y) \in \mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\epsilon E$  se  $\psi(y) \in \mathfrak{D}_y \widehat{\otimes}_\epsilon E$  è facile vedere; che la  $\chi(T)$  sia continua si può vedere così: se  $K$  è un compatto di  $\mathfrak{D}_x$  e  $K_1$  è compatto in  $\mathfrak{D}_y \widehat{\otimes}_\epsilon E$ ,  $K_1 \subset \mathfrak{D}_y(H) \widehat{\otimes}_\epsilon E$  con  $H$  conveniente compatto dei reali e quindi, per il teorema di Grothendieck ricordato,  $K_1 \subset \Gamma_b(A \otimes B)$  con  $A$  e  $B$  compatti in  $\mathfrak{D}_y(H)$  e in  $E$  rispettivamente;  $K \otimes A$  è compatto in  $\mathfrak{D}_{x,y}$  poichè la mappa  $m : \mathfrak{D}_x(H_1) \times \mathfrak{D}_y(H) \rightarrow \mathfrak{D}_{x,y}$ ,  $m(\varphi, \psi) = \varphi \otimes \psi$  è separatamente continua su spazi di Fréchet e quindi continua, [4], p. 354; ne deriva che  $(K \otimes A) \otimes B$  è compatto in  $\mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\epsilon E$ . Allora, per la continuità di  $T^E : \mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\epsilon E \rightarrow F(E)$ ,

$\langle T^E \cdot (K \otimes A) \otimes B \rangle = \langle \langle \chi(T) \cdot K \rangle^E \cdot A \otimes B \rangle$  è limitato in  $F(E)$ ; è quindi limitato in  $F(E)$  anche  $\langle \langle \chi(T) \cdot K \rangle^E \cdot K_1 \rangle$ . Dunque  $\chi(T)$  è un morfismo (la commutatività dei diagrammi relativi è immediata) continuo di  $\mathfrak{D}_y$  in  $F$ . È immediato vedere che anche la  $\langle \chi(T) \cdot \varphi \rangle^E : \mathfrak{D}_y \widehat{\otimes}_\epsilon E \rightarrow F(E)$  è continua.

a)  $\chi$  è iniettiva:

se

$$\chi(T) = 0, \quad \forall E \in \mathcal{O}b(\mathcal{L}B), \quad \langle T^E \cdot \varphi(x) \otimes \psi(y) \otimes e \rangle = 0.$$

Poichè  $(\mathfrak{D}_x \otimes \mathfrak{D}_y) \otimes E$  è denso in  $\mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\epsilon E$ ,  $T^E = 0$  e quindi  $T = 0$ .

b)  $\chi$  è suriettiva:

$\{ \varepsilon \mathfrak{D}_{x,y} \rightarrow F \}$  è completo poichè sottospazio chiuso del prodotto, con la topologia prodotto,  $X\{\text{Hom}_c(\mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\epsilon E; F(E)), \forall E \in \mathcal{O}b(\mathcal{L}B)\}$  e questi spazi sono completi, [4], p. 345. Se

$$L \in {}_c\{\varepsilon \mathfrak{D}_{x,y} \rightarrow F\}, \quad L = \lim_j \Sigma_k^{(j)} U_k \otimes V_k,$$

somme finite,  $U_k \in \mathfrak{D}'_x$ ,  $V_k \in {}_c\{\varepsilon \mathfrak{D}_y \rightarrow F\}$ . Se  $U$  e  $V$  sono del tipo di sopra, la mappa lineare  $U \widehat{\otimes}_\epsilon V^E : \mathfrak{D}_x \widehat{\otimes}_\epsilon (\mathfrak{D}_y \widehat{\otimes}_\epsilon E) \rightarrow F(E)$  è continua; visto che  $\mathfrak{D}_x \widehat{\otimes}_\epsilon (\mathfrak{D}_y \widehat{\otimes}_\epsilon E)$  è isomorfo a  $(\mathfrak{D}_x \widehat{\otimes}_\epsilon \mathfrak{D}_y) \widehat{\otimes}_\epsilon E$ , [1], p. 51, e che esiste isomorfismo algebrico e continuo fra  $\mathfrak{D}_{x,y}$  e  $\mathfrak{D}_x \widehat{\otimes}_\epsilon \mathfrak{D}_y$ ,  $(\mathfrak{D}_{x,y} = \mathfrak{D}_x \widehat{\otimes}_i \mathfrak{D}_y$  e  $i \geq \epsilon$ , [4], p. 95),  $U \widehat{\otimes}_\epsilon V^E$  si può pensare con dominio  $\mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\epsilon E$  e codominio  $F(E)$ .

Indicati con  $(\Sigma_k^{(j)} U_k \otimes V_k)^\sim$  i morfismi funtoriali di  $\varepsilon \mathfrak{D}_{x,y}$  in  $F$  ottenuti come sopra dai termini del limite per  $L$ , dimostriamo che in  $\{ \varepsilon \mathfrak{D}_{x,y} \rightarrow F \}$  la rete  $(\Sigma_k^{(j)} U_k \otimes V_k)^\sim$  è di Cauchy, per il che è sufficiente far vedere che la rete  $\Sigma_k^{(j)} U_k \widehat{\otimes}_\epsilon V_k^E$  è di Cauchy in

$$\text{Hom}_c(\mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\epsilon E; F(E));$$

è immediato vedere poi che se  $L' = \lim_j (\Sigma_k^{(j)} U_k \otimes V_k)^\sim$   $\chi(L') = L$ .

Se  $A$  è compatto in  $\mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\epsilon E$ ,  $A \subseteq \Gamma_b^-(A_1 \otimes A_2)$   $A_2$  compatto in  $E$ ; a causa della proposizione 1 di [3'], p. 17,  $A_2 \subseteq \Gamma_b^-(A_3 \otimes A_4)$ . In definitiva:  $A \subseteq \Gamma_b^-(\Gamma_b^-(A_3 \otimes A_4) \otimes A_2)$ . Poichè la rete  $\Sigma_k^{(j)} U_k \otimes V_k$  è di

Cauchy in  $\text{Hom}_c(\mathfrak{D}_x; {}_c\{\varepsilon\mathfrak{D}_y \rightarrow F\})$  se  $V$  è intorno di zero in  $F(E)$  esiste  $J_0$  tale che se  $J_1$  e  $J_2 \geq J_0$ :

$$\Sigma_k^{(J_1)} \langle U_k \cdot \varphi \rangle \langle V_k^E \cdot \psi(y) \otimes e \rangle - \Sigma_k^{(J_2)} \langle U_k \cdot \varphi \rangle \langle V_k^E \cdot \psi(y) \otimes e \rangle \in V,$$

$$\forall \varphi \in A_3, \forall \psi \in A_4 \text{ e } \forall e \in A_2.$$

Se

$$\varphi(x, y) \in \Gamma_b(A_3 \otimes A_4) \otimes A_2, \langle (\Sigma_k^{(J_1)} \dots) \sim -(\Sigma_k^{(J_2)} \dots) \cdot \varphi(x, y) \rangle \in V$$

così come se

$$\varphi(x, y) \in \Gamma_b^-(A_3 \otimes A_4) \otimes A_2$$

e se

$$\varphi(x, y) \in \Gamma_b^-(\Gamma_b^-(A_3 \otimes A_4) \otimes A_2).$$

Ciò significa che la rete  $\Sigma_{(J)}^k U_k \widehat{\otimes}_\varepsilon V_k$  è di Cauchy.

c)  $\chi$  è un omeomorfismo.

Sia  $\mathcal{O}\mathcal{L} = \mathcal{O}\mathcal{L}(A; \mathcal{O}\mathcal{L}(B; V))$  intorno di zero in

$$\text{Hom}_c(\mathfrak{D}_x; {}_c\{\varepsilon\mathfrak{D}_y \rightarrow F\})$$

della pre-base,  $A$  compatto in  $\mathfrak{D}_x$ ,  $B$  in  $\mathfrak{D}_y \widehat{\otimes}_\varepsilon E$  e  $V$  intorno di zero in  $F(E)$ . Dire che  $\chi(T) \in \mathcal{O}\mathcal{L}$  equivale a dire che  $\langle T^E \cdot \varphi(x) \psi(y) \rangle \in V$   $\forall \varphi(x) \in A, \forall \psi(y) \in B$ . Se

$$m: \mathfrak{D}_x(K) \times \mathfrak{D}_y(H) \widehat{\otimes}_\varepsilon E \rightarrow \mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$$

è la mappa  $m(\varphi, \psi) = \varphi \otimes \psi$ , essa è separatamente continua<sup>1)</sup> e quindi continua. Ne segue  $A \otimes B$  è compatto  $\mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ ; sicchè al fine che

<sup>1)</sup> Se  $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_x(K)$ ,  $m_\varphi: \mathfrak{D}_y \widehat{\otimes}_\varepsilon E \rightarrow \mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ ,  $m_\varphi(\psi(y)) = \varphi(x) \otimes \psi(y)$  è continua poichè  $m_\varphi = \tilde{m}_\varphi \widehat{\otimes}_\varepsilon 1_E$  dove  $\tilde{m}_\varphi: \mathfrak{D}_y \rightarrow \mathfrak{D}_{x,y}$  è la moltiplicazione e  $1_E$  l'identità di  $E$ . Se  $\psi(y) \in \mathfrak{D}_y(H) \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ ,  $m_\varphi: \mathfrak{D}_x(K) \rightarrow \mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$  è continua, per verificarlo è sufficiente tener presente che la topologia in  $\mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$  ha un sistema di intorni dello zero negli  $\mathcal{O}\mathcal{L}(\{\alpha\}; V)$ ,  $\{\alpha\}$  equicontinuo in  $E'$ ,  $V$  intorno di zero in  $\mathfrak{D}_{x,y}$ ;  $\varphi(x, y) \in \mathcal{O}\mathcal{L}(\{\alpha\}, V)$  se  $\forall \alpha \in \{\alpha\}, \alpha(\varphi(x, y)) \in V$ .

$\chi(T) \in \mathcal{M}$  è sufficiente che  $T^E \in \mathcal{M}(A \otimes B, V)$  intorno di zero in  $\text{Hom}_c(\mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; F(E))$ , ciò implica la continuità di  $\chi$ . Si ha pure, con il procedimento ed i simboli della dimostrazione in b), che

$$\chi(p_E^{-1}(\mathcal{M}(A; V))) \supset \mathcal{M}(A_3, \mathcal{M}(A_4; V)),$$

$\mathcal{M}(A; V)$  intorno di zero in  $\text{Hom}_c(\mathfrak{D}_{x,y} \otimes_\varepsilon E; F(E))$ ,  $p_E$   $E$ -esima proiezione di  $\varepsilon\{\mathfrak{D}_{x,y} \rightarrow F\}$  in

$$x\{\text{Hom}_c(\mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; F(E)), E \in \mathcal{O}b(\mathcal{L}B)\}.$$

Segue che  $\chi$  è bicontinua e la dimostrazione è del tutto conclusa.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] GROTHENDIECK, A.: *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Amer. Math. Society, number 16, 1966.
- [2] POPA, N.: *Quelques applications de la théorie des catégories dans la théorie des distributions*, Revue Roumaine des mathématiques pures et appliquées, 1968.
- [3] SCHWARTZ, L.: *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*, Ann. Ist. Fourier, Tomo 7, 1957 et
- [3'] SCHWARTZ, L.: *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*, Ann. Ist. Fourier, Tomo 8, 1958.
- [4] TREVES, F.: *Topological vector spaces, distributions and Kernels*, Ac. Press, 1967.

Manoscritto pervenuto in redazione il 14 ottobre 1971.