

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIA TERESA MOLFINO

**Su alcuni invarianti numerici associati a sistemi
di equazioni lineari in un modulo**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 46 (1971), p. 215-222

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__215_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__215_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MARIA TERESA MOLFINO *)

Introduco inoltre un nuovo invariante: l'ordine ridotto. Per questo ultimo stabilisco alcune relazioni con l'ordine globale e assegno un criterio di finitezza.

[illegible]

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R., riprendente in parte la tesi di laurea dell'A. (Genova, Febbraio 1968).

dove i coefficienti λ_{ij} appartengono a Λ e le incognite x_j ad X , indicata con $L = \{\lambda_{ij}\}$ la matrice dei coefficienti, l'insieme delle soluzioni del sistema si può esprimere come nucleo del morfismo di Λ -moduli:

$$\Phi : X^p \rightarrow X^q \text{ dove } \Phi = L \otimes X.$$

Infatti seguendo [1] la matrice dei coefficienti L può essere interpretata come morfismo tra Λ -moduli liberi di rango p e q .

$$L : \Lambda^p \rightarrow \Lambda^q$$

ed una risoluzione libera di $\text{Coker } L$ è:

$$0 \rightarrow \text{Ker } L \rightarrow \Lambda^p \xrightarrow{L} \Lambda^q \rightarrow \text{Coker } L \rightarrow 0.$$

Tensorializzando con X si ottiene il complesso

$$0 \rightarrow (\text{Ker } L) \otimes X \rightarrow X^p \xrightarrow{\Phi} X^q \rightarrow (\text{Coker } L) \otimes X \rightarrow 0$$

a cui è associata la sequenza esatta di Λ -moduli:

$$(2) \quad 0 \rightarrow (\text{Ker } L) \otimes X \rightarrow \text{Ker } \Phi \rightarrow \text{Tor}(\text{Coker } L, X) \rightarrow 0$$

che, essendo $(\text{Ker } L) \otimes X$ divisibile, risulta essere spezzante.

Essendo Λ principale $\text{Ker } L$ è isomorfo a Λ^k dove $k = p - \text{rang } L$ ($\text{rang } L$ è la caratteristica della matrice L); il numero k si dice rango del sistema $\Phi x = 0, x \in X^p$.

2. Se Λ è un dominio d'integrità per ogni Λ -modulo X indicheremo con μX il massimo sottomodulo divisibile di X . Questo si identifica con l'unione di tutti i sottomoduli divisibili. Poichè un morfismo di Λ -moduli $f : X \rightarrow Y$ subordina un morfismo $\mu f : \mu X \rightarrow \mu Y$, ne risulta il carattere functoriale di μ . Anzi il funtore μ è un funtore additivo della categoria dei Λ -moduli in sè.

Dimostriamo il seguente

TEOREMA 1. *Se Λ è un anello principale ed X un Λ -modulo divisibile il morfismo $j : (\text{Ker } L) \otimes X \rightarrow \text{Ker } \Phi$, nella sequenza spezzante (2), ha come immagine $\mu \text{Ker } \Phi$.*

DIM. Essendo $(\text{Ker } L) \otimes X$ un modulo divisibile, la sua immagine mediante j è ovviamente divisibile pertanto contenuta in $\mu \text{Ker } \Phi$.

Esiste quindi il monomorfismo $\iota : (\text{Ker } L) \otimes X \rightarrow \mu \text{Ker } \Phi$ che rende commutativo il primo quadrato del diagramma a righe esatte:

$$(3) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow (\text{Ker } L) \otimes X & \xrightarrow{j} & \text{Ker } \Phi & \rightarrow & \text{Tor}(\text{Coker } L, X) & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow & \parallel & & \downarrow \epsilon & & \\ 0 \rightarrow \mu \text{Ker } \Phi & \rightarrow & \text{Ker } \Phi & \rightarrow & \text{Ker } \Phi / \mu \text{Ker } \Phi & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Per provare che ι è isomorfismo basta verificare che $\mu \text{Tor}(\text{Coker } L, X) = 0$. Infatti poichè Λ è un anello principale e $\text{Coker } L$ è un modulo finitamente generato, la sua torsione $t(\text{Coker } L)$ si spezza nella somma diretta di un numero finito di moduli ciclici: $t(\text{Coker } L) = \bigoplus_{i \in I} M_i$ dove gli M_i ammettono una risoluzione del tipo:

$$0 \rightarrow \Lambda \xrightarrow{\lambda_i} \Lambda \rightarrow M_i \rightarrow 0 \quad \lambda_i \neq 0 \quad \lambda_i \in \Lambda.$$

Tensorializzando con X si ha la sequenza esatta:

$$0 \rightarrow \text{Tor}(M_i, X) \rightarrow X \xrightarrow{\lambda_i \otimes X} X \rightarrow M_i \otimes X \rightarrow 0$$

da cui:

$$\text{Tor}(M_i, X) = \text{Ker}(X \xrightarrow{\lambda_i \otimes X} X) \text{ per ogni } i \in I$$

è quindi ovvio che per ogni $i \in I$ si ha $\mu \text{Tor}(M_i, X) = 0$.

Per la distributività dei funtori μ e $\text{Tor}(-, X)$ rispetto alla somma diretta, si ha $\mu \text{Tor}(\text{Coker } L, X) = \mu \text{Tor}(t \text{Coker } L, X) = 0$.

Resta quindi definito l'isomorfismo ϵ dalla commutatività del diagramma (3).

Noto $\text{Ker } \Phi$ possiamo considerare la sequenza esatta:

$$(2') \quad 0 \rightarrow \mu \text{Ker } \Phi \rightarrow \text{Ker } \Phi \xrightarrow{\iota} \text{Ker } \Phi / \mu \text{Ker } \Phi \rightarrow 0$$

che, essendo $\mu \text{Ker } \Phi$ divisibile, è spezzante; possiamo quindi scegliere un morfismo ν inverso a destra di τ :

$$\nu : \text{Ker } \Phi / \mu \text{Ker } \Phi \rightarrow \text{Ker } \Phi.$$

Lo spazio delle soluzioni $\text{Ker } \Phi$ è allora somma diretta dei suoi sotto-moduli $\mu \text{Ker } \Phi$ e $\text{Im } \nu$.

La sequenza spezzante (2') coincide a meno di isomorfismi con la (2), però non dipende più dalla matrice L che caratterizza il sistema, ma solo dallo spazio delle soluzioni $\text{Ker } \Phi$.

Nella nota citata al n. 1 s'introduce la nozione di ordine globale di un sistema del tipo (1), nell'ipotesi che Λ sia una K -algebra (principale), come $\dim_K \text{Tor}(\text{Coker } L, X)$.

Possiamo quindi enunciare il seguente:

TEOREMA 2. *L'ordine globale è invariante per sistemi equivalenti in quanto dipende unicamente dallo spazio delle soluzioni.*

3. Osserviamo che $\text{Ker } \Phi / \mu \text{Ker } \Phi$ è un modulo di torsione; infatti tale è $\text{Tor}(\text{Coker } L, X)$ (Cfr. [1], p. 310). Esso è perciò decomponibile nella somma diretta delle sue componenti $\mathfrak{p}$ -primarie: $X = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}} X_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{B}$ è l'insieme degli ideali primi di Λ .

Converrà introdurre la seguente:

DEFINIZIONE 1. *Diciamo ordine ridotto del sistema (1) il numero (eventualmente infinito) delle componenti primarie non nulle di $\text{Ker } \Phi / \mu \text{Ker } \Phi$.*

Vale in proposito il:

TEOREMA 3. *Per ogni sistema (1) l'ordine globale è maggiore od uguale dell'ordine ridotto; ed è uguale se e solo se*

$$\dim_K (\text{Ker } \Phi / \mu \text{Ker } \Phi)_{\mathfrak{p}} \leq 1$$

per ogni $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}$.

Ma se $\lambda = \lambda_0 \prod \pi_j^{n_j}$ con π_j elementi primi e λ_0 divisore dell'unità in Λ

$$\text{Ker}(X \xrightarrow{\lambda} X) = \bigoplus_j \text{Ker}(X \xrightarrow{\pi_j^{n_j}} X)$$

(cfr. [2] § 2, prop. 1) e quindi la tesi.

4. In questo numero dimostriamo che il rango (cfr. n. 1) è invariante per sistemi equivalenti. Al fine di provare ciò premettiamo alcuni lemmi.

LEMMA 1. Sia $X \neq 0$ e $\sigma: \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{k'}$ un morfismo di Λ -moduli. Se $\sigma \otimes X: X^k \rightarrow X^{k'}$ è un isomorfismo di Λ -moduli allora $\text{Coker } \sigma$ è un modulo di torsione.

DIM. Tensorializzando con X la sequenza esatta:

$$0 \rightarrow \text{Ker } \sigma \rightarrow \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{k'} \rightarrow \text{Coker } \sigma \rightarrow 0$$

si ha la sequenza pure esatta:

$$0 \rightarrow \text{Tor}(\text{Coker } \sigma, X) \rightarrow \text{Ker } \sigma \otimes X \rightarrow X^k \rightarrow X^{k'} \rightarrow \text{Coker } \sigma \otimes X \rightarrow 0$$

in cui $\text{Coker } \sigma \otimes X = 0$.

Posto $\text{Coker } \sigma = \bigoplus_i M_i$ (somma diretta finita), gli M_i essendo dei moduli ciclici, risulta $\text{Coker } \sigma \otimes X = \bigoplus_i M_i \otimes X = 0$ da cui segue che gli M_i devono essere moduli di torsione e tale dovrà essere anche $\text{Coker } \sigma$.

LEMMA 2. Sia T un Λ -modulo di torsione e

$$(4) \quad \Lambda^k \xrightarrow{\sigma} \Lambda^{k'} \rightarrow \Lambda^n \oplus T \rightarrow 0$$

una sequenza esatta di Λ -moduli.

Se $k < k'$ allora $n > 0$.

DIM. Sia K il corpo delle frazioni su Λ . Tensorializzando con K la sequenza (4) si ha la sequenza esatta di spazi vettoriali:

$$0 \rightarrow (\text{Ker } \sigma) \otimes K \rightarrow K^k \rightarrow K^{k'} \rightarrow K^n \rightarrow 0$$

da cui:

$$\dim_K(\text{Ker } \sigma) \otimes K + k' = k + n$$

essendo $k' \leq k + n$ segue la tesi.

LEMMA 3. Sia $X \neq 0$ e $\sigma: \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{k'}$ un morfismo di Λ -moduli, se $\sigma \otimes X: X^k \rightarrow X^{k'}$ è un isomorfismo di Λ -moduli allora $k = k'$.

DIM. Ovviamente si ha $(\text{Ker } \sigma) \otimes X = 0$; essendo $\text{Ker } \sigma$ isomorfo a Λ^n si ha, tensorializzando con X , $(\text{Ker } \sigma) \otimes X = X^n = 0$ da cui $n = 0$. L'asserto è allora immediata conseguenza dei lemmi precedenti.

TEOREMA 5. *Il rango è invariante per sistemi equivalenti.*

DIM. Siano L ed L' due matrici a termini in Λ del tipo (p, q) e (p, q') rispettivamente e siano $\Phi = L \otimes X: X^p \rightarrow X^q$ e $\Phi' = L' \otimes X: X^p \rightarrow X^{q'}$ i morfismi associati.

Poichè $\text{Ker } L$ è sottomodulo di Λ^p esiste un monomorfismo $\vartheta: \Lambda^k \rightarrow \Lambda^p$ che fornisce una rappresentazione di $\text{Ker } L$. Poichè $\text{Ker } L$ è componente diretta in Λ^p esisterà un morfismo $\eta: \Lambda^p \rightarrow \Lambda^k$ inverso a destra di ϑ ; analogamente sia $\vartheta': \Lambda^{k'} \rightarrow \Lambda^p$ una rappresentazione di $\text{Ker } L'$ ed η' un inverso a destra di ϑ' .

Posto $\sigma = \eta' \circ \vartheta: \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{k'}$ si ha che $\sigma \otimes X: X^k \rightarrow X^{k'}$ è isomorfismo; infatti nel diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} X^k & \xrightarrow{\vartheta \otimes X} & X^p & \xrightarrow{\eta' \otimes X} & X^{k'} \\ & \searrow \vartheta & \uparrow & \nearrow \eta & \\ & & \mu \text{ Ker } \Phi & & \end{array}$$

in cui la freccia verticale è l'inclusione, i morfismi $\overline{\vartheta}$ ed $\overline{\eta}$ sono isomorfismi.

Allora, atteso che k e k' sono il rango dei sistemi di equazioni aventi rispettivamente L ed L' come matrici associate, per il lemma 3 si ha $k=k'$ da cui l'asserto.

BIBLIOGRAFIA

- [1] DARBO, G.: *Sulla rappresentazione parametrica della soluzione generale di un sistema di equazioni lineare in un modulo sopra un anello principale*, Rend. Sem. Mat. Un. Padova, 1967, pp. 307-311.
- [2] BOURBAKI, N.: *Algebra Cap. VII (Moduli su anelli principali)*.
- [3] BOERO, P.: *Metodi omologici elementari ...*, Rend. del Sem. Mat. Un. Padova, 1967, pp. 289-306.

Manoscritto pervenuto in redazione il 21 maggio 1971.