

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

Distribuzioni funtoriali in una variabile quasi periodiche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 45 (1971), p. 315-326

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__45__315_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

DISTRIBUZIONI FUNTORIALI IN UNA VARIABILE QUASI PERIODICHE

GIULIANO BRATTI *)

§ 1. Seguendo la definizione di distribuzione data da N. Popa, [2], pag. 677, (in questo lavoro tali distribuzioni sono dette funtoriali), si introduce il concetto di distribuzione funtoriale quasi periodica.

Si ottiene: nel § 2, l'integrazione dell'equazione $T'=S$, S distribuzione funtoriale, (estensione del procedimento di L. Schwartz, [3], pag. 52), utile per la dimostrazione che il valor medio di una distribuzione funtoriale quasi periodica è una distribuzione funtoriale costante; nel § 3, il teorema di unicità dello sviluppo di Fourier per le distribuzioni funtoriali quasi periodiche e il teorema di numerabilità dei loro coefficienti di Fourier.

§ 2. Gli spazi vettoriali topologici considerati sono sul corpo complesso \mathbf{C} ; \mathcal{C} sia la categoria degli spazi di Hausdorff, localmente convessi, completi; $\mathcal{C}(F)$, la categoria degli spazi di Fréchet.

DEF. 1. *Un funtore F (covariante) di $\mathcal{C}(F)$ in \mathcal{C} è lineare e fortemente continuo se la mappa*

$$\varphi \in \text{Hom}_b(E; G) \rightarrow F(\varphi) \in \text{Hom}_b(F(E); F(G))$$

è lineare e continua (b su $\text{Hom}(H; K)$ è la topologia dell'uniforme convergenza sui limitati di H).

Se \mathfrak{D} è il dominio delle distribuzioni scalari, il funtore $\varepsilon_{\mathfrak{D}}$ di $\mathcal{C}(F)$

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico Università, 35100 Padova.

in \mathcal{C} così definito:

$$\varepsilon_{\mathfrak{D}}(E) = \mathfrak{D} \widehat{\otimes}_{\varepsilon} E, \quad \varepsilon_{\mathfrak{D}}(\varphi) = 1_{\mathfrak{D}} \widehat{\otimes}_{\varepsilon} \varphi,$$

$$\varphi \in \text{Hom}(H; K), \quad 1_{\mathfrak{D}} \widehat{\otimes}_{\varepsilon} \varphi \in \text{Hom}(\mathfrak{D} \widehat{\otimes}_{\varepsilon} H; \mathfrak{D} \widehat{\otimes}_{\varepsilon} K),$$

è lineare e fortemente continuo, [2], pag. 672, e [4], pag. 46.

Se il funtore F è come in Def. 1,

DEF. 2. Una distribuzione functoriale T in $\mathcal{C}(F)$ a valori in F è un morfismo functoriale di $\varepsilon_{\mathfrak{D}}$ in F con, $\forall E \in \mathcal{C}(F)$, $T^E : \mathfrak{D} \widehat{\otimes}_{\varepsilon} E \rightarrow F(E)$ lineare e continua.

Lo spazio di tali distribuzioni è indicato con $\{\varepsilon_{\mathfrak{D}} \rightarrow F\}$; su di esso, la topologia (vettoriale) $b, b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}} \rightarrow F\}$, è la topologia limite proiettivo della famiglia

$$(\text{Hom}_b(\mathfrak{D} \widehat{\otimes}_{\varepsilon} E; F(E)), v^E), \quad E \in \mathcal{C}(F),$$

$$v^E : \{\varepsilon_{\mathfrak{D}} \rightarrow F\} \rightarrow \text{Hom}_b(\mathfrak{D} \widehat{\otimes}_{\varepsilon} E; F(E)), \quad v^E(T) = T^E.$$

PRELEMMA. Se E e $G \in \mathcal{C}$ e $\varphi \in \text{Hom}(E; G)$, $\tilde{I}(\varphi) : \mathfrak{D} \widehat{\otimes}_{\varepsilon} E \rightarrow G$, $\langle \tilde{I}(\varphi) \cdot g(x) \rangle = \varphi(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt)$, è lineare e continua, $(I(\varphi) : \mathfrak{D} \widehat{\otimes}_{\varepsilon} E \rightarrow G)$, sarà l'estensione per continuità di $\tilde{I}(\varphi)$.

DIMOSTRAZIONE. Se $1 : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbf{C}$ è la distribuzione costante $\langle 1 \cdot g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$, e $i : \mathbf{C} \widehat{\otimes}_{\varepsilon} G \rightarrow G$ è l'isomorfismo canonico, risulta, facilmente, $\tilde{I}(\varphi) = i \circ (1 \widehat{\otimes}_{\varepsilon} \varphi)$.

LEMMA 1. Siano E e G come nel prelemma; $S \in \text{Hom}(\mathfrak{D} \widehat{\otimes}_{\varepsilon} E; G)$. Esiste $T_0 \in \text{Hom}(\mathfrak{D} \widehat{\otimes}_{\varepsilon} E; G)$ con $T'_0 = S$; ogni $T \in \text{Hom}(\mathfrak{D} \widehat{\otimes}_{\varepsilon} E; G)$ con $T' = S$ è del tipo $T = T_0 + I(\varphi)$. (La mappa $\chi : \text{Hom}_b(E; G) \rightarrow \text{Hom}_b(\mathfrak{D} \widehat{\otimes}_{\varepsilon} E; G)$, $\chi(\varphi) = T_0 + I(\varphi)$, è un omeomorfismo sulle primitive di S).

DIMOSTRAZIONE. Sia $g_0(x) \in \mathfrak{D}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} g_0(x) dx = 1$. Se $g(x) \in \mathfrak{D} \widehat{\otimes}_{\varepsilon} E$ e se $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = u \in E$, posto $\chi(x) = g(x) - g_0(x) \otimes u$, poichè $\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x) dx = 0$, esiste, unica, $\psi(x) \in \mathfrak{D} \widehat{\otimes}_{\varepsilon} E$ con $\psi'(x) = \chi(x)$.

Sia $\tilde{T}_0 : \mathfrak{D} \otimes_\varepsilon E \rightarrow G$, $\langle \tilde{T}_0 \cdot g(x) \rangle = -\langle S \cdot \psi(x) \rangle$; \tilde{T}_0 è continua; il suo prolungamento, per continuità, T_0 , è la mappa richiesta nella prima parte del lemma, (si tiene presente che l'operatore di derivazione p -esima, $\tilde{D}^{(p)} : \mathfrak{D} \otimes_\varepsilon E \rightarrow \mathfrak{D} \otimes_\varepsilon E$, $\langle \tilde{D}^{(p)} \cdot g(x) \rangle = g^{(p)}(x)$, coincide con $D^{(p)} \otimes_\varepsilon i$, $D^{(p)} : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$, $i : E \rightarrow E$, identità).

Sia $T \in \text{Hom}(\mathfrak{D} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; G)$, $T' = 0$. $\varphi \in \text{Hom}(E; G)$ sia così definita: $\varphi(u) = \langle T \cdot g_0(x) \otimes u \rangle$. Risulta: $\tilde{I}(\varphi) \equiv T$ su $\mathfrak{D} \otimes_\varepsilon E$. Nel fatto: $\langle \tilde{I}(\varphi) \cdot g(x) \otimes u \rangle = \varphi \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt \cdot u \right] = \langle T \cdot g_0(x) \otimes \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt u \rangle = \langle T \cdot g(x) \otimes u \rangle$; allora, su tutto $\mathfrak{D} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$, $I(\varphi) \equiv T$.

(Facilmente, $\chi : \text{Hom}_b(E; G) \rightarrow \text{Hom}_b(\mathfrak{D} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; G)$ è biunivoca e continua; dimostriamo che è relativamente aperta. Se A è limitato in E , $B = \{g_0(x) \otimes u, \forall u \in A\}$ è limitato in $\mathfrak{D} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$. Allora:

$$\begin{aligned} \chi[\varphi_1 + \mathcal{M}(A, V)] &= T_0 + I(\varphi_1) + I(\mathcal{M}(A, V)) = T_0 + I(\varphi_1) + \\ &+ \{\mathcal{M}(B, V) \cap I(\text{Hom}_b(E; G))\} = \\ &= \{T_0 + I(\varphi_1) + \mathcal{M}(B, V)\} \cap \chi(\text{Hom}_b(E; G)). \end{aligned}$$

Il lemma è concluso.

DEF. 3. Sia $\mathcal{M} \subset X\{\text{Hom}(E; F(E)), E \in \mathcal{C}\}$, tale che: se $\{\varphi_E\} \in \mathcal{M}$, $\forall \psi \in \text{Hom} L(E; G)$, $F(\psi) \circ \varphi_E = \varphi_G \circ \psi$. Si indica con $I(\Phi)$ l'elemento di $X\{\text{Hom}(\mathfrak{D} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; F(E)), E \in \mathcal{C}\}$, di componente E -esima, $I(\Phi)^E$, coincidente con $I(\varphi_E)$, $\{\varphi_E\} \in \mathcal{M}$.

LEMMA 2. $I(\Phi) \in \{\varepsilon_{\mathfrak{D}} \rightarrow F\}$ e $I(\Phi)' = 0$. Ogni $T \in \{\varepsilon_{\mathfrak{D}} \rightarrow F\}$, con $T' = 0$ è del tipo: $T = I(\Phi)$.

DIMOSTRAZIONE. Che $I(\Phi)$ sia un morfismo functoriale si ha in base alla def. 3; nel fatto: se E e $G \in \mathcal{C}$ e $\psi \in \text{Hom}(E; G)$, $F(\varphi) \circ \tilde{I}(\varphi_E) = \tilde{I}(\varphi_G) \circ (1 \otimes_\varepsilon \psi)$; ne segue $F(\psi) \circ I(\varphi_E) = I(\varphi_G) \circ (1 \otimes_\varepsilon \psi)$. $I(\Phi)'$ ha come componente E -esima $I(\varphi_E)'$; su $\mathfrak{D} \otimes_\varepsilon E$,

$$\langle I(\varphi_E)' \cdot g \otimes u \rangle = -\varphi_E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g'(t) \otimes u dt \right] = -\varphi_E(0);$$

dunque $I(\Phi)' \equiv 0$.

La seconda parte del lemma segue dal lemma 1.

TEOREMA. *L'equazione $T' = S$ ha soluzioni in ${}_b\{\varepsilon\mathfrak{D} \rightarrow F\}$. Se T_0 è una soluzione di $T' = S$ in ${}_b\{\varepsilon\mathfrak{D} \rightarrow F\}$, ogni altra soluzione è del tipo: $T_0 + I(\Phi)$, $I(\Phi)$ come nella definizione 3.*

DIMOSTRAZIONE. Dal lemma 1, se S^E è la E -esima componente di S , esiste $T_0^E \in \text{Hom}(\mathfrak{D} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; F(E))$ con $T_0^E{}' = S^E$. $T_0 \in X\{\text{Hom}(\mathfrak{D} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; F(E)), E \in \mathcal{C}\}$, $v^E(T_0) = T_0^E$, è un morfismo functoriale di $\varepsilon\mathfrak{D}$ in F . Nel fatto: se $\varphi \in \text{Hom}(E; G)$,

$$\begin{aligned} F(\varphi)\langle T_0^E \cdot g(x) \otimes u \rangle &= - \\ F(\varphi)\langle S^E \cdot \int_{-\infty}^x g(t) \otimes u dt - \left(\int_{-\infty}^x g_0(t) dt \otimes u \right) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt \rangle &= - \\ -\langle S^G \cdot \int_{-\infty}^x g(t) dt \otimes \varphi(u) - \left(\int_{-\infty}^x g_0(t) dt \otimes \varphi(u) \right) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt \rangle &= \\ = \langle T_0^G \circ 1 \otimes_\varepsilon \varphi \cdot g(x) \otimes u \rangle. \end{aligned}$$

Sicchè: $F(\varphi) \circ T_0^E = T_0^G \circ (1 \otimes_\varepsilon \varphi)$; ne risulta: $F(\varphi) \circ T_0^E = T_0^G \circ (1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \varphi)$.

Il lemma 2 conclude il teorema.

§ 3. Se \mathfrak{D}_{L^1} è definito come in [3], pag. 199, $\varepsilon\mathfrak{D}_{L^1} : \mathcal{C}(F) \rightarrow \mathcal{C}$, $\varepsilon\mathfrak{D}_{L^1}$ definito come $\varepsilon\mathfrak{D}$, è ancora lineare e fortemente continuo.

DEF. 1. Se $F : \mathcal{C}(F) \rightarrow \mathcal{C}$ è un funtore lineare e fortemente continuo, ogni $T \in {}_b\{\varepsilon\mathfrak{D}_{L^1} \rightarrow F\}$ si dice una distribuzione functoriale limitata.

DEF. 2. Se $T \in {}_b\{\varepsilon\mathfrak{D}_{L^1} \rightarrow F\}$, T si dice quasi periodica se e solo se $\{\tau_h T\}$, $h \in \mathbb{R}$, è relativamente compatto in ${}_b\{\varepsilon\mathfrak{D}_{L^1} \rightarrow F\}$.

Si ha:

a) se $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow G$ è \mathcal{C}^∞ e quasi periodica assieme ad ogni sua derivata, e se $T \in {}_b\{\varepsilon\mathfrak{D}_{L^1} \rightarrow F\}$ è quasi periodica, $Q = g(x)T$ è quasi periodica;

b) se T è quasi periodica, anche $T^{(n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

c) se $Q = \lim_j T_j$, limite in ${}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \rightarrow F\}$, T_j quasi periodica, Q è quasi periodica.

DIMOSTRAZIONE. a) Se $T \in {}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \rightarrow B\}$ è quasi periodica, $\forall E \in \mathcal{C}(F)$ $T^E : \mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E \rightarrow F(E)$ è tale che $\{\tau_h T^E\}$ è relativamente compatto in $\text{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; F(E))$. Poichè $g(x)T$ ha componente E -esima $g(x)T^E$, ne segue: $\{\tau_h(g(x)T^E)\}$ relativamente compatto in $\text{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; F(E))$. Vista la topologia su $\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \rightarrow F\}$, $\{\tau_h(g(x)T)\}$ è relativamente compatto in ${}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \rightarrow F\}$.

b) $b)$ segue dal fatto che se $\tau_{h_i} T^E \rightarrow Q$, anche $(\tau_{h_i} T^E)^{(n)} \rightarrow Q^{(n)}$.

c) Se $Q = \lim_j T_j$, $Q^E = \lim_j T_j^E$; allora $\tau_h Q^E = \lim_j (\tau_h T_j^E)$, uniformemente rispetto a $h \in R$.

Sia $T : \mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E \rightarrow G$, $E \in \mathcal{C}(F)$, G completo, lineare e continua. La mappa $\theta_T(h) : R \rightarrow \text{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; G)$, $\theta_T(h) = \tau_h T$, è continua (è sufficiente tener presente che se A è limitato in $\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$, e se la successione reale $h_i \rightarrow h_0$, $g(x+h_i) \rightarrow g(x+h_0)$ in $\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$, uniformemente rispetto a $g(x) \in A$).

Si può considerare, allora, visto che $\text{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; F(E))$ è completo, l'integrale, $k \in R$, $k > 0$, $1/k \int_0^k (\tau_h T) dh$. Si ha:

PRELEMMA. Se $T \in {}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \rightarrow F\}$ e se $\varphi \in \text{Hom}(E; G)$,

$$F(\varphi) \circ \left(1/k \int_0^k (\tau_h T^E) dh \right) = 1/k \int_0^k (\tau_h T^G) dh \circ 1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \varphi.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $g(x) \in \mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$, l'applicazione (lineare) $g(x) : \text{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; F(E)) \rightarrow F(E)$, $g(x)(T) = \langle T \cdot g(x) \rangle$ è ovviamente continua. Se $g(x) \otimes u \in \mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$,

$$F(\varphi) \left[\left\langle 1/k \int_0^k (\tau_h T^E) dh \cdot g(x) \otimes u \right\rangle \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= F(\varphi) \left[\left\langle 1/k \int_0^k \langle T^E \cdot g(x+h) \otimes u \rangle dh \right\rangle \right] = \\
 &= 1/k \int_0^k \langle F(\varphi) \circ T^E \cdot g(x+h) \otimes u \rangle dh = \left\langle 1/k \int_0^k (\tau_h T^G) dh \cdot g(x) \otimes \varphi(u) \right\rangle
 \end{aligned}$$

poichè $F(\varphi) \circ T^E = T^G \circ 1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \varphi$.

Sia F un funtore di $\mathcal{C}(F)$ in sè soddisfacente la seguente proprietà:

1) $F(\mathbf{C}) = B_1$, \mathbf{C} il corpo complesso, B_1 di Banach;

Si ha il seguente:

LEMMA FONDAMENTALE. $\forall T \in_b \{\varepsilon \mathfrak{D}_{L^1} \rightarrow F\}$ quasi periodica, se $T^E : \mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E \rightarrow F(E)$ è la sua E -esima componente, esiste il

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} 1/k \int_0^k (\tau_h T^E) dh$$

in $\text{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; F(E))$ e tale limite coincide con qualche $I(\varphi)$, (prelemma § 1), $\varphi \in \text{Hom}(E; F(E))$.

DIM. Se $T \in_b \{\varepsilon \mathfrak{D}_{L^1} \rightarrow F\}$ è quasi periodica e $T^E : \mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E \rightarrow F(E)$ è la sua E -esima componente, detto A un limitato di $\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ e $\{\alpha\}$ un equicontinuo di $F(E)'$, le funzioni $g_{\alpha, k}(x) : R \rightarrow \mathbf{C}$, $g_{\alpha, k}(x) = \langle \alpha \circ T_h^E \cdot k(x-h) \rangle$, $\forall k(h) \in A$, $\forall \alpha \in \{\alpha\}$, sono: a) equilimitate; b) equi-uniformemente continue; c) equinormali ($\forall \{h_i\}$ sequenza di reali esiste $\{h_{ij}\}$ sottosequenza di h_i con la proprietà: $\lim_j g_{\alpha, k}(x+h_{ij}) = f_{\alpha, k}(x)$ uniformemente rispetto a $x \in R$, uniformemente rispetto a α e k).

Una tale famiglia di funzioni è relativamente compatta¹⁾ in $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}(R; \mathbf{C})$, spazio vettoriale delle funzioni continue e limitate di R in

¹⁾ Che la famiglia $g_{\alpha, k}(x)$ sia relativamente compatta in $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}(R; \mathbf{C})$ si vede applicando il teorema di Amerio, Rend. Sem. Mat. di Padova, 1960, pag. 293. Nel fatto: sia $\{f_n(x)\}$, $n \in N$, una successione di funzioni equilimitate, equicontinue,

\mathbf{C} con la topologia della convergenza su R . È facile vedere che tali funzioni sono equiconvergenti al loro valor medio. Nel fatto: indicata la famiglia in questione con $\{f_\gamma(x)\}_{\gamma \in \Gamma}$, $\forall \varepsilon > 0$ esiste

$$V(\varepsilon) = \{l(x) \in \mathcal{C}(R; \mathbf{C}) : |l(x)| \leq \varepsilon\}$$

tale che

$$\{f_\gamma(x)\}_{\gamma \in \Gamma} \subset \bigcup_1^n f_{\gamma_i}(x) + V(\varepsilon).$$

Detto k_0 un reale con, $\forall k_1 \geq k_2 \geq k_0$,

$$\left| \frac{1}{k_1} \int_0^{k_1} f_{\gamma_i}(x) dx - \frac{1}{k_2} \int_0^{k_2} f_{\gamma_i}(x) dx \right| \leq \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq n, \text{ risulta, } \forall \gamma \in \Gamma,$$

$$\left| \frac{1}{k_1} \int_0^{k_1} f_\gamma(x) dx - \frac{1}{k_2} \int_0^{k_2} f_\gamma(x) dx \right| \leq 3\varepsilon;$$

sicchè:

$$\left| \frac{1}{k_1} \int_0^{k_1} f_\gamma(x) dx - M(f_\gamma) \right| \leq 3\varepsilon, \quad \Gamma \forall \gamma \in \Gamma, \quad \forall k_1 \geq k_0.$$

Si può dimostrare, facilmente, che la rete

$$\left\{ \frac{1}{k} \int_0^k (\tau_h E^E) dh, \quad k \geq 1, \quad k \in R \right\}$$

è di Cauchy in $\text{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; F(E))$.

$$\text{Sia } Q^E = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \int_0^k (\tau_h T^E) dh.$$

equinormali, di R in \mathbf{C} ; la funzione $f(x) = \{f_n(x)\}$ di R in \mathcal{C}^∞ è quasi periodica; ciò implica: le $f_n(x)$ equiquasiperiodiche. Poichè sono equicontinue (ed equilimitate) dalla $\{f_n(x)\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione convergente in $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}(R; \mathbf{C})$.

Per la seconda parte si ha: la topologia su $\text{Hom}_b \{ \mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\epsilon E; F(E) \}$ non è meno fine della topologia su $\text{Hom}_b (\mathfrak{D} \widehat{\otimes}_\epsilon E; F(E))$, poichè i limitati di $\mathfrak{D} \widehat{\otimes}_\epsilon E$ sono limitati anche in $\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\epsilon E$ (la topologia che \mathfrak{D}_{L^1} induce su \mathfrak{D} è meno fine dell'originale). Sicchè: se la rete $\frac{1}{k} \int_0^k (\tau_h T^E) dh$ è di Cauchy in $\text{Hom}_b (\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\epsilon E; F(E))$ essa è di Cauchy anche in $\text{Hom}_b (\mathfrak{D} \widehat{\otimes}_\epsilon E; F(E))$, (T^E , ristretta a $\mathfrak{D} \widehat{\otimes}_\epsilon E$, resta continua). Se S^E è una primitiva di T^E in $\text{Hom}_b (\mathfrak{D} \otimes_\epsilon E; F(E))$, si ha:

$$\int_0^k (\tau_h T^E) dh = S^E - \tau_k S^E.$$

Nel fatto: se $F(E) \equiv \mathbf{C}$ e se $g(x) \otimes u \in \mathfrak{D} \otimes E$, sia:

$$\left\langle \int_0^k (\tau_h T^E) dh \cdot g(x) \otimes u \right\rangle \neq \langle S^E \cdot g(x) \otimes u \rangle - \langle S^E \cdot g(x+k) \otimes u \rangle.$$

Il primo membro coincide con $\left\langle \int_0^k \langle T^E \cdot g(x+h) \otimes u \rangle dx \right\rangle$; per $k=0$, le funzioni di destra e sinistra coincidono e hanno la stessa derivata. Per il teorema di Hahn-Banach, segue:

$$\left\langle \int_0^k (\tau_h T^E) dh \cdot g(x) \otimes u \right\rangle = \langle S^E \cdot g(x) \otimes u \rangle - \langle S^E \cdot g(x+k) \otimes u \rangle,$$

vero qualunque sia $F(E)$. Se A è limitato in $\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\epsilon E$, anche $A' = \{g'(x), \forall g(x) \in A\}$; ne segue: $(Q^E)' = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \langle T^E - \tau_k T^E \rangle$; poichè se $\{\alpha\}$ è equicontinuo in $F(E)$, $\{\alpha \circ T^E\}$ è limitato in $\text{Hom}_b (\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\epsilon E; \mathbf{C})$ si ha:

$$\left| \frac{1}{k} \langle \alpha \circ T^E \cdot A \rangle - \frac{1}{k} \langle \alpha \circ T^E \cdot \tau_k A \rangle \right| \leq 1$$

se $k \geq k_0$, k_0 conveniente. Ciò significa che $(Q^E)' \in \mathcal{M}(A, \{\alpha\})$ intorno di zero arbitrario di $\text{Hom}_b (\mathfrak{D} \widehat{\otimes}_\epsilon E; F(E))$. Allora $Q^{E'} \equiv 0$ e, su $\mathfrak{D} \widehat{\otimes}_\epsilon E$,

lemma 1, § 2, $Q^E = I(\varphi)$, $\varphi \in \text{Hom}(E; F(E))$. Poichè $\mathfrak{D} \otimes E$ è denso in $\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$, $Q^E = I(\varphi)$ anche su $\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$. $\forall \varphi \in \text{Hom}(E; F(E))$ si ha: $F(\varphi) \circ Q_k^E = Q_k^G \circ 1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \varphi$, $Q_k^E = \frac{1}{k} \int_0^k (\tau_h T^E) dh$; l'eguaglianza mantenendosi per $k \rightarrow +\infty$, $F(\varphi) \circ Q^E = Q^G \cdot 1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \varphi$.

Il lemma dimostrato permette la:

DEF. 3. Se $T \in \{\varepsilon \mathfrak{D}_{L^1} \rightarrow F\}$ è quasi periodica, si dice valor medio, $M(T)$, di T la distribuzione funtoriale costante $I(\Phi)_{\varepsilon_b} \in_b \{\varepsilon \mathfrak{D}_{L^1} \rightarrow F\}$,

$$I(\varphi)^E = I(\varphi_E) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \int_0^k (\tau_h T^E) dh,$$

integrazione e limite in $\text{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; F(E))$, $\varphi_E \in \text{Hom}(E; F(E))$.

In base ad *a*) del § 3, se $\lambda \in R$.

DEF. 4. Si dice spettro di T , $Sp.(T)$, $T \in_b \{\varepsilon \mathfrak{D}_{L^1} \rightarrow F\}$, quasi periodica, l'insieme dei $\lambda \in R$ tali che il valor medio di $(e^{-i\lambda x} T)$ è diverso da zero.

Le distribuzioni funtoriali costanti $I(\Phi)_\lambda(T) = M(e^{-i\lambda x} T)$ diconsi coefficienti di Fourier della distribuzione quasi periodica T .

Si hanno i seguenti teoremi:

TEOREMA 1 (di unicità). Sia T una distribuzione funtoriale quasi periodica in $\mathcal{C}(F)$ a valori nel funtore F soddisfacente la proprietà 1).

Se $I(\Phi)_\lambda(T) = 0 \quad \forall \lambda \in R$, $T \equiv 0$.

TEOREMA 2 (di numerabilità). Nelle ipotesi di Teorema 1 per T e F , $Sp.(T)$ è numerabile.

DIMOSTRAZIONE T. 1. Si supponga, $E \in \mathcal{C}(F)$, $T^E \neq 0$. Esiste $g(x) \otimes \otimes u \in \mathfrak{D} \otimes E$, $\alpha \in F(E)'$ con,

$$\langle \alpha \circ T^E \cdot g(x+h) \otimes u \rangle : R \rightarrow \mathbf{C}$$

funzione quasi periodica non identicamente nulla. Esiste $\lambda_0 \in R$ con

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \int_0^k e^{-i\lambda_0 h} \langle \alpha \circ T^E \cdot g(x+h) \otimes u \rangle dh \neq 0.$$

Per l'ipotesi su T , risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \int_0^k \tau_h(e^{i\lambda_0 x} T^E) dh &= 0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \int_0^k \tau_h(e^{i\lambda_0 x} \alpha \circ T^E) dh = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \int_0^k e^{-i\lambda_0 h} [e^{i\lambda_0 x} \tau_h(\alpha \circ T^E)] dh = e^{i\lambda_0 x} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \int_0^k e^{-i\lambda_0 h} (\tau_h \alpha \circ T^E) dh. \end{aligned}$$

Ciò implica:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \int_0^k e^{-i\lambda_0 h} (\tau_h \alpha \circ T^E) dh = 0.$$

Ma allora:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \int_0^k e^{-i\lambda_0 h} \langle \alpha \circ T^E \cdot g(x+h) \otimes u \rangle dh = 0.$$

Assurdo.

Per la dimostrazione del teorema 2, si premette il

LEMMA 1. Se $T \in_b \{\varepsilon \mathfrak{D}_{L^1} \rightarrow F\}$ è quasi periodica e

$$\text{Sp.}(T^E) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \int_0^k \tau_h(e^{-i\lambda x} T^E) dh \neq 0 \right\},$$

$\text{Sp.}(T^E) \equiv \text{Sp.}(T^G)$, T^E , al solito, la E -esima componente di T .

DIMOSTRAZIONE. Sia $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 \in \text{Sp.}(T^G)$, $\lambda_0 \notin \text{Sp.}(T^E)$.

$$I(\varphi_G)(\lambda_0) = \lim_k \frac{1}{k} \int_0^k (\tau_h T^G) dh \neq 0,$$

$\varphi_G \in \text{Hom}(G; F(G)); I(\varphi_E)(\lambda_0) = 0. \forall \psi \in \text{Hom}(E; G)$ deve essere:

$$F(\psi) \circ I(\varphi_E)(\lambda_0) = I(\varphi_G)(\lambda_0) \circ 1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \psi.$$

Si può trovare $g(x) \otimes v \in \mathfrak{D}_{L^1} \otimes G$ con: $\langle I(\varphi_G)(\lambda_0) \cdot g(x) \otimes v \rangle \neq 0$ e $\psi_1 \in \text{Hom}(E; G)$ con $\psi_1(u) = v$. Ne risulta:

$$F(\psi_1) \circ I(\varphi_E)(\lambda_0)[g(x) \otimes u] = 0 = \langle I(\varphi_G)(\lambda_0) \cdot g(x) \otimes \psi_1(u) \rangle \neq 0.$$

Invertendo il ruolo di E e G si ha la tesi.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2. Se $\lambda_0 \notin \text{Sp.}(T), \lambda_0 \notin \text{Sp.}(T^E)$. Poichè $\text{Sp.}(T^{\mathbf{C}}), \mathbf{C}$ corpo complesso, è numerabile, $\text{Sp.}(T)$ è numerabile.

Si conclude il presente § con l'esempio di un funtore non di Schwartz, def. 1, [2], pag. 672, soddisfacente la proprietà 1)' di questo §.

$()^{**} : \mathcal{C}(B) \rightarrow \mathcal{C}(B)$ sia così definito: $E \in \mathcal{C}(B), (E)^{**} = E^{**}$, biduale di E (con topologia forte);

$$\varphi \in \text{Hom}_b(E; G) \rightarrow (\varphi)^{**} = {}''\varphi \in \text{Hom}_b(E^{**}; G^{**}),$$

${}''\varphi$ bitrasposta della φ . Il funtore $()^{**}$ è lineare e fortemente continuo; se esistesse $K \in \mathcal{L}, \mathcal{L}$ come in [2] pag. 671, si avrebbe, se fosse $\varepsilon_K = ()^{**}, K \widehat{\otimes}_\varepsilon \mathbf{C} \cong \mathbf{C}$. Ne deriva $\widehat{K} \cong \mathbf{C}, \widehat{K}$ completamento di K e quindi $K \cong \mathbf{C}$. Scelto E non riflessivo, si avrebbe: $E^{**} \cong \mathbf{C} \widehat{\otimes}_\varepsilon E \cong E, (E \text{ completo})$. Assurdo.

Il biduale (forte di \mathbf{C} è isomorfo a \mathbf{C} (verifica di 1)').

[Nel caso di $F = ()^{**}, \mathfrak{B}'_{q.p.}, [3], \text{ pag. } 206$, si può immergere nello spazio delle distribuzioni funtoriali quasi periodiche. È sufficiente, per vederlo, tener presente che: se $T \in \mathfrak{B}'_{q.p.}, T \widehat{\otimes}_\varepsilon E \rightarrow E^{**}, v_E$ mappa di valutazione di E in E^{**} , è lineare e continua e, $\forall \varphi \in \text{Hom}(E, G)$,

$${}''\varphi \circ T \widehat{\otimes}_\varepsilon v_E = T \widehat{\otimes}_\varepsilon v_G \circ 1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \varphi;$$

inoltre:

$$\chi: \mathfrak{B}'_{q.p.} \rightarrow \text{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; E^{**}),$$

$\chi(T) = T \widehat{\otimes}_\varepsilon v_E$, è lineare continua.

Ciò implica che $T \otimes v \in \{\varepsilon \mathfrak{D}_{L^1} \rightarrow (\)^{**}\}$, $(T \otimes v)^E = T \widehat{\otimes}_\varepsilon v_E$, è senz'altro quasi periodica poichè $\{\tau_h(T \widehat{\otimes}_\varepsilon v_E)\} \equiv \{(\tau_h T) \widehat{\otimes}_\varepsilon v_E\}$ è relativamente compatto in $\text{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; E^{**})$.

L'autore non sa se questa immersione (algebraica e continua) è anche suriettiva].

BIBLIOGRAFIA

- [1] BRATTI, G.: *Un altro modo di costruire la serie di Fourier delle distribuzioni di una variabile quasi periodiche.*
- [2] POPA, N.: *Quelques applications de la théorie des catégories dans la théorie des distributions*, Revue Roumaine de Mathématiques pures et appliquées, 1968.
- [3] SCHWARTZ, L.: *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.
- [4] SCHWARTZ, L.: *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*, Ann. Ist. Fourier, Tomo 7, 1957.
- [5] SCHWARTZ, L.: *Espaces des fonctions différentiables à valeurs vectorielles*, Journal d'analyse mathématiques, 1953.
- [6] TREVES, F.: *Linear topological spaces, distribution and Kernels*, Academic Press, 1967.

Manoscritto pervenuto in redazione il 19 dicembre 1970.