

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

V. CHVÀL

## **Piani di Möbius $k$ -aperti**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 45 (1971), p. 223-228

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1971\\_\\_45\\_\\_223\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__45__223_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## PIANI DI MÖBIUS $k$ -APERTI

V. CHVÁL \*)

Nel lavoro [1] A. Barlotti ha proposto una classificazione dei piani grafici secondo il tipo delle configurazioni « chiuse » contenute in essi. Ha dato la definizione di piano  $k$ -aperto, ha inoltre costruito un esempio di un piano grafico 4-aperto non banale ed ha provato che un piano desarguesiano infinito non è  $k$ -aperto per nessun valore di  $k$ .

In questa nota studieremo da questo punto di vista i piani di Möbius e stabiliremo alcuni risultati analoghi a quelli validi per i piani proiettivi.

1. Una struttura di incidenza  $\mathcal{K} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{C}, I)$  — in cui gli elementi di  $\mathfrak{P}$  sono punti, gli elementi di  $\mathfrak{C}$  sono cerchi — sarà chiamata  $M$ -configurazione se:

a) *tre diversi punti di  $\mathcal{K}$  sono incidenti al più con un medesimo cerchio di  $\mathcal{K}$ ,*

b) *per ogni  $P$  nell'insieme  $\mathcal{K}_P$  di tutti i cerchi passanti per  $P$  è definita una relazione di equivalenza  $\rho$ , chiamata tangenza, tale che ogni coppia  $\alpha, \beta \in \mathcal{K}_P$ , per cui  $\alpha \rho \beta$ , ha a comune in  $\mathcal{K}$  soltanto il punto  $P$ ,*

c) *dati un cerchio  $\alpha$  e i punti  $A \ I \ \alpha \ \bar{I} \ B$  esiste al più un cerchio  $\beta \in \mathcal{K}$  tale che  $\alpha \rho \beta \ I \ A, B$ .*

Se è data una  $M$ -configurazione  $\mathcal{K}$  chiamiamo *fascio con punto base  $P$*  ogni classe dell'equivalenza  $\rho$  nell'insieme  $\mathcal{K}_P$ , che contiene almeno due cerchi.

---

\*) Indirizzo dell'A.: Univerzita P. J. Šafárika, Košice, Cecoslovacchia.

Lavoro eseguito mentre l'autore fruiva di una borsa di ricerca del C.N.R. presso l'Istituto di Matematica dell'Università di Perugia.

Per un dato cerchio  $\alpha$  sia  $i_\alpha$  il numero di punti incidenti con  $\alpha$  e  $t_\alpha$  il numero di fasci contenenti il cerchio  $\alpha$ .

Per un punto  $P \in \mathcal{K}$  si denoti con  $i_P$  il numero dei cerchi incidenti con  $P$  e con  $t_P$  il numero dei fasci con punto base  $P$ .

Si chiama *grado di libertà di un punto*  $P \in \mathcal{K}$  il numero

$$r(P) = 2 - i_P - t_P$$

e *grado di libertà di un cerchio*  $\alpha \in \mathcal{K}$  il numero

$$r(\alpha) = 3 - i_\alpha - t_\alpha.$$

(Per queste nozioni cfr. [3]).

Diciamo che una  $M$ -configurazione  $\mathcal{K}$  è  $k$ -chiusa (dove  $k$  è un intero positivo) se è finita ed ogni elemento di  $\mathcal{K}$  ha grado di libertà  $-k$  al più.

Chiamiamo un piano di Möbius  $\mathfrak{M}$   $k$ -aperto se non contiene nessuna  $M$ -configurazione  $k$ -chiusa, ma contiene almeno una  $M$ -configurazione  $(k-1)$ -chiusa.

Osserviamo che le  $M$ -configurazioni 1-chiuse sono le  $M$ -configurazioni dette chiuse nel lavoro [3] e che ogni piano di Möbius libero (in senso [3]) è 1-aperto.

**2.** In questo paragrafo sarà descritta una costruzione di un piano di Möbius 2-aperto non banale.

Sia dato un insieme finito di punti  $\mathfrak{M}_0$ ,  $|\mathfrak{M}_0| \geq 7$ . Costruiamo per induzione la successione

$$\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{M}_i \subseteq \dots$$

di  $M$ -configurazioni come segue.

Supponiamo che  $\mathfrak{M}_{3k}$  sia già costruito. Sia  $S_{3k}$  il sistema di tutti i 3- e 4-insiemi di punti  $\mathfrak{M}_{3k}$  ordinato in modo tale che ogni 4-insieme di  $S_{3k}$  precede tutti i 3-insiemi di  $S_{3k}$ .

Ampliamo induttivamente (relativamente all'ordinamento in  $S_{3k}$ ) l' $M$ -configurazione  $\mathfrak{M}_{3k}$  nel modo seguente: se  $\alpha \in S_{3k}$  è tale che per ogni tre diversi punti di  $\alpha$  non passa qualche cerchio (di  $\mathfrak{M}_{3k}$  oppure già costruito nel procedimento) diciamo che  $\alpha$  è un nuovo cerchio incidente

solo i punti di  $\alpha$  e tangente solo con se stesso.

Sia  $\mathfrak{M}_{3k+1}$  l' $M$ -configurazione  $\mathfrak{M}_{3k}$  ampliata con i cerchi  $\alpha$  costruiti nel modo suddetto.

$\mathfrak{M}_{3k+2}$  si otterrà da  $\mathfrak{M}_{3k+1}$  se per ogni cerchio  $\alpha \in \mathfrak{M}_{3k+1}$  e per ogni coppia di punti  $A \text{ I } \alpha \text{ I } B$  tali che in  $\mathfrak{M}_{3k+1}$  non esiste nessun cerchio  $\beta$  per cui  $A \text{ I } \beta \text{ I } B$  ed  $\alpha\rho\beta$ , si aggiunge un nuovo cerchio  $\beta$  con queste (e solo queste) incidenze e tangenze.

Da  $\mathfrak{M}_{3k+2}$  si passa ad  $\mathfrak{M}_{3k+3}$  se per ogni coppia di cerchi  $\alpha, \beta \in \mathfrak{M}_{3k+2}$ ,  $\alpha\rho\beta$ , aventi in  $\mathfrak{M}_{3k+2}$  uno o nessun punto comune aggiungeremo rispettivamente uno oppure due punti incidenti con questi due cerchi soltanto.

Sia  $\mathfrak{M} = \bigcup_i \mathfrak{M}_i$ . Dalla costruzione segue subito che  $\mathfrak{M}$  è un piano di Möbius infinito <sup>1)</sup>.

Per ogni elemento  $a \in \mathfrak{M}$  esiste un intero minimo —  $h(a)$  — altezza dell'elemento  $a$  — per cui  $a \in \mathfrak{M}_{h(a)}$ . Se  $a, b \in \mathfrak{M}$  scriveremo  $a < b$  ( $b > a$ ) se esiste una successione finita

$$a = c_0 \text{ I } c_1 \text{ I } \dots \text{ I } c_n = b$$

tale che  $h(c_i) < h(c_{i+1})$  per ogni  $i = 0, 1, \dots, n-1$ .

LEMMA. Per ogni elemento  $x \in \mathfrak{M}$  esiste un elemento  $y \in \mathfrak{M}$  tale che

$$x < y \text{ e } r(y) \leq -1 \text{ in } \mathfrak{M}_{h(y)}.$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè per ogni  $x \in \mathfrak{M}$  ed  $N$  naturale esiste un elemento  $z > x$  tale che  $h(z) > N$ , possiamo supporre che  $x$  sia un punto  $A \in \mathfrak{M}_{3k}$ , dove l'intero  $k$  è abbastanza grande.

Siano  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  tre cerchi di  $\mathfrak{M}_{3k+1} - \mathfrak{M}_{3k}$  incidenti con il punto  $A$  <sup>2)</sup>, e  $B$  un punto di  $\mathfrak{M}_{3k}$ ,  $B \text{ I } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Siano inoltre  $\beta$  e  $\gamma$  due cerchi di  $\mathfrak{M}_{3k+2}$  per cui:  $\beta \text{ I } A, B$ ;  $\beta\rho\alpha_1$ ;  $\gamma \text{ I } A, B$ ;  $\gamma\rho\alpha_2$ . Denotiamo con  $B_2$ ,

1) Infatti nessuna configurazione  $\mathfrak{M}_n$  verifica il postulato sulla tangenza per i piani di Möbius, e, di conseguenza,  $\mathfrak{M}_{n+1} \neq \mathfrak{M}_n$ .

2) Poichè  $\mathfrak{M}$  è infinito esiste un  $k$  tale che il numero dei punti di  $\mathfrak{M}_{3k}$  supera il valore  $p$  (quasi) prefissato. Scegliendo un punto  $B \in \mathfrak{M}_{3k} - \mathfrak{M}_{3k-1}$  siano  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  tre cerchi di  $\mathfrak{M}_{3k+1}$  passanti per i punti  $A$  e  $B$ .

$B_3, C_1, C_3$  i punti di  $\mathfrak{N}_{3k+3}$  per i quali si ha:  $\beta \cap \alpha_2 = \{B_2, A\}$ ,  $\beta \cap \alpha_3 = \{B_3, A\}$ ,  $\gamma \cap \alpha_1 = \{C_1, A\}$  e  $\gamma \cap \alpha_3 = \{C_3, A\}$ .

Adesso in  $\mathfrak{N}_{3k+4}$  esiste un cerchio  $\delta$  incidente con quattro punti di  $\mathfrak{N}_{3k+3}$  dei quali almeno uno è nell'insieme  $\{B_2, B_3, C_1, C_3\}$ . Da qui segue che  $r(\delta) \leq -1$  e  $A < \delta$ .

**TEOREMA.** *Per ogni elemento di  $\mathfrak{N}$  esiste una  $M$ -configurazione 1-chiusa di  $\mathfrak{N}$  che lo contiene.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $a$  un elemento di  $\mathfrak{N}$  ed  $\mathfrak{N}_1^* = \mathfrak{N}_1 \cup \{a\}$ . Scegliamo per ogni  $x \in \mathfrak{N}_1^*$  un elemento  $y > x$  per cui  $r(y) \leq -1$  (in  $\mathfrak{N}_{h(y)}$ ) e denotiamo l'insieme di tutti questi  $y$  con  $\mathfrak{K}^*$ . Sia  $\mathfrak{K}$  l' $M$ -configurazione formata da  $\mathfrak{K}^*$  e da tutti gli elementi  $z < y \in \mathfrak{K}^*$ .

Per ogni  $y \in \mathfrak{K}^*$  si ha  $r(y) \leq -1$ . Sia  $z$  un elemento di  $\mathfrak{K} - (\mathfrak{K}^* \cup \mathfrak{N}_0)$ . Dapprima, secondo la costruzione della successione  $\mathfrak{N}_n$ , vale  $r(z) \leq 0$  in  $\mathfrak{N}_{h(z)}$ . D'altra parte, poiche  $z < y \in \mathfrak{K}^*$ , esiste un elemento  $u \in \mathfrak{K}$  per cui  $z \perp u$  ed  $h(z) < h(u)$ . Allora in  $\mathfrak{K}$  è  $r(z) \leq -1$ . Infine se  $z \in \mathfrak{K} \cap \mathfrak{N}_0$  allora esistono almeno quattro cerchi di  $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{K}$  passanti per  $z$  (ricordiamo che  $|\mathfrak{N}_0| \geq 7$ ) e, quindi, in  $\mathfrak{K}$ , è  $r(z) \leq -1$ .

**TEOREMA.** *Il piano di Möbius  $\mathfrak{N}$  è 2-aperto.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathfrak{K}$  una  $M$ -configurazione finita di  $\mathfrak{N}$  ed  $a$  un elemento di  $\mathfrak{K}$  di altezza massima. Si ha:  $r(a) \geq -1$  se  $h(a) = 3k + 1$  ed  $h(a) \geq 0$  in caso contrario. Dunque, nessuna  $M$ -configurazione finita di  $\mathfrak{N}$  e 2-chiusa. D'altra parte, secondo il teorema precedente,  $\mathfrak{N}$  contiene delle  $M$ -configurazioni 1-chiuse.

**3.** Proviamo adesso che esistono piani di Möbius che non sono  $k$ -aperti per nessun valore di  $k$ . Infatti, vale il seguente

**TEOREMA.** *Ogni piano di Möbius ovoidale infinito contiene delle  $M$ -configurazioni  $k$ -chiuse per ogni  $k \geq 1$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $P$  un punto del piano di Möbius  $\mathfrak{N}$  in questione ed  $\mathfrak{A}$  il piano affine formato da tutti i cerchi di  $\mathfrak{N}$  passanti per il punto  $P$ , e dai punti  $X \in \mathfrak{N}$ ,  $X \neq P$ . Sia  $\Pi$  il piano proiettivo ottenuto da  $\mathfrak{A}$  aggiungendo ad  $\mathfrak{A}$  la retta  $\alpha_\infty$  con i punti  $A_\infty, B_\infty, \dots$ . Il piano

Il risulta desarguesiano essendo tale il piano affine  $\mathcal{A}$ . Allora, come è dimostrato nel lavoro [1], il piano  $\Pi$  contiene una configurazione,  $\mathcal{K}^*$ ,  $(k+2)$ -chiusa<sup>3</sup>.

Sia  $\mathcal{K}$  l' $M$ -configurazione di  $\mathcal{M}$  ottenuta da  $\mathcal{K}^*$  sopprimendo tutti gli elementi impropri contenuti in essa ed aggiungendo il punto  $P$ .

Sia  $X$  un punto di  $\mathcal{K}$ . Se  $X=P$ ,  $X$  è incidente con tutti i cerchi di  $\mathcal{K}$  e, allora  $r(P)=2-i_P-t_P\leq 2-(k+2)=-k$  ( $\mathcal{K}^*$  contiene almeno  $k+2$  cerchi di  $\mathcal{M}$ ).

Se  $X\neq P$  allora  $X$  appartiene alla  $\mathcal{K}^*$ ; segue che  $X$  è incidente con almeno  $k+2$  rette di  $\mathcal{K}^*$ . Tutte queste sono diverse da  $\alpha_\infty$  (poichè  $X\in\mathcal{K}$ ) e, infatti,  $i_x\geq k+2$  (in  $\mathcal{K}$ ).

Dunque  $r(X)\leq 2-(k+2)=-k$ .

Sia  $\alpha$  un cerchio di  $\mathcal{K}$ . Allora  $\alpha\in\mathcal{K}^*$ ,  $\alpha\neq\alpha_\infty$  ed  $\alpha$  è incidente con almeno  $k+2$  punti  $A_1, \dots, A_m$  di  $\mathcal{K}^*$ . Se tutti questi sono propri, appartengono a  $\mathcal{K}$  ed  $i_\alpha\geq k+3$  (poichè anche  $P\in\alpha$ ) ed

$$r(\alpha)\leq 3-(k+3)=-k.$$

Se, invece, tra i punti  $A_1, \dots, A_m$  ce n'è uno (e allora solo uno) improprio, quest'ultimo è incidente con almeno un cerchio  $\beta\neq\alpha$ ,  $\alpha_\infty$ , che è tangente ad  $\alpha$  nel punto  $P$ . Risulta:  $i_\alpha\geq k+2$  (poichè  $P\in\alpha$ ),  $t_\alpha\geq 1$  e vale ancora  $r(\alpha)\leq 3-(k+2)-1=-k$ .

L' $M$ -configurazione  $\mathcal{K}$  è allora  $k$ -chiusa ed il teorema risulta così provato.

**OSSERVAZIONE.** Dalla dimostrazione dell'ultimo teorema segue che ogni punto di un piano di Möbius ovoidale infinito è contenuto in una  $M$ -configurazione  $k$ -chiusa, per ogni valore di  $k\geq 1$ .

Osserviamo infine che l'Autore in [2] ha definito una nozione di  $M$ -configurazione chiusa più debole di quella introdotta nel lavoro [3]. Ciò nonostante, modificata la nozione di  $M$ -configurazione  $k$ -chiusa e la costruzione del n. 2, si può anche in questo caso ottenere un esempio di un piano di Möbius 2-aperto.

---

<sup>3</sup>) Una configurazione  $\mathcal{K}$  di un piano grafico si chiama  $k$ -chiusa ( $k\geq 3$ ) se è finita ed ogni elemento di essa è incidente con almeno  $k$  elementi di  $\mathcal{K}$ . ([1]).

## BIBLIOGRAFIA

- [1] BARLOTTI, A.: *Configurazioni k-chiuse e piani k-aperti*, Rend. Sem. Mat. Padova, XXXV, 1964, 56-64.
- [2] CHVÅL, V.: *Sui piani liberi di Möbius*, Convegno di geometria combinatoria e sue applicazioni, Perugia, 1970.
- [3] SCHLEIERMACHER, A., STRAMBACH, K.: *Freie Erweiterungen in der affinen Geometrie und in der Geometrie der Kreise*, II, Abh. Math. Sem. Hamburg, 34 (1970), 209-227.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 novembre 1970.