

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

CESARE PARENTI

Valutazioni a priori e regolarità per soluzioni di equazioni quasi-ellittiche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 45 (1971), p. 1-70

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__45__1_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

VALUTAZIONI A PRIORI E REGOLARITÀ PER SOLUZIONI DI EQUAZIONI QUASI-ELLITTICHE

CESARE PARENTI *)

Introduzione.

Sia $\Omega(\mathcal{O})$ un aperto di $\mathbf{R}^m(\mathbf{R}^n)$ di frontiera $\Gamma(S)$, tale che $\Omega \cup \Gamma(\mathcal{O} \cup S)$ sia una m -varietà (n -varietà) compatta di classe C^∞ a bordo $\Gamma(S)$. Indicati con $x(y)$ i punti di $\mathbf{R}^m(\mathbf{R}^n)$, supponiamo assegnato su $\Omega \times \mathcal{O}$ l'operatore differenziale:

$$A = A(x, y; D_x, D_y) = \sum_{|\alpha|/p + |\beta|/q \leq 1} a_{\alpha\beta}(x, y) D_x^\alpha D_y^\beta$$

con $p, q \in \mathbf{N}$, $|\alpha| = \sum_1^m \alpha_j$, $|\beta| = \sum_1^n \beta_j$ ed i coefficienti $a_{\alpha\beta}$ aventi una regolarità da precisare. Sia poi $\{B_j(x, D_x)\}_{j=1}^r$ ($\{Q_j(y, D_y)\}_{j=1}^s$) un sistema di operatori differenziali su $\overline{\Omega}(\overline{\mathcal{O}})$, a coefficienti con regolarità da precisare, di ordini $< p$ ($< q$).

Si può porre, formalmente, il problema al contorno:

$$(a) \quad \begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \times \mathcal{O} \\ B_j u = \varphi_j & \text{in } \Gamma \times \mathcal{O}, \quad j = 1, \dots, r \\ Q_k u = \psi_k & \text{in } \Omega \times S, \quad k = 1, \dots, s. \end{cases}$$

Rientrano in (a) problemi al contorno per operatori quasi-ellittici (in particolare ellittici) su aperti cilindrici.

Problemi tipo (a) sono stati studiati, sotto varie ipotesi, da numerosi autori (vedi [3], [5], [6], [9], [12], [13], [14]); in particolare è stato

*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico - Università di Bologna.

studiato il problema (a) nella forma variazionale per operatori fortemente quasi-ellittici (vedi [12]) e sono note stime in L^p ($1 < p < \infty$) all'interno di $\overline{\Omega \times \mathcal{O}}$ (vedi [5], [8], [13], [16]), in prossimità di punti non singolari della frontiera (cioè $\notin \Gamma \times S$) (vedi [1], [5], [9], [11], [12], [13]) ed anche nell'intorno di punti di $\Gamma \times S$ (vedi [3], [6], [14]).

Per problemi come (a) si presentano naturalmente questioni di regolarità in $\overline{\Omega \times \mathcal{O}}$ delle soluzioni. Ricordiamo che, recentemente, P. Grisvard (vedi [6]) ha ottenuto teoremi di esistenza e regolarità per soluzioni del problema (a) in spazi di Sobolev, ma limitatamente al caso in cui A si possa presentare come la « somma » di due operatori ellittici (rispettivamente nelle variabili x ed y). Sono noti risultati di regolarità all'interno od in prossimità di punti non singolari della frontiera nel caso che A sia quasi-ellittico (vedi [4], [5], [8], [11], [12], [16]).

Il presente lavoro si compone di due parti. Nella prima vengono stabilite, in spazi di Sobolev (hilbertiani), stime integrali in un semispazio per operatori propriamente quasi-ellittici a coefficienti variabili. Si ottengono in tal caso valutazioni provate in [1], [4], [11]. Nella seconda parte si stabiliscono risultati locali di regolarità per soluzioni del problema (a), limitatamente ad operatori propriamente quasi-ellittici a coefficienti di classe C^∞ , nell'intorno di punti non singolari della frontiera di $\Omega \times \mathcal{O}$, che contengono in particolare i risultati noti nelle ipotesi specificate.

Preliminari.

Consideriamo l'operatore differenziale:

$$(1) \quad A(D_x, D_y) = \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q = 1} a_{\alpha h} D_x^\alpha D_y^h.$$

Dove $(p_1, \dots, p_n, q) = (p, q) \in \mathbf{N}^{n+1}$ è il multindice di (1); inoltre:

$$\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q = \sum_{j=1}^n \alpha_j / p_j + h/q, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

è una n -pla a componenti intere non negative, $a_{\alpha h} \in \mathbf{CV}(\alpha, h)$ e

$$D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_n}^{\alpha_n} \left(D_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad D_y = \frac{\partial}{\partial y}.$$

DEFINIZIONE 1. Diremo che l'operatore definito in (1) è propriamente quasi-ellittico di tipo m se:

i) $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$,

$$|\xi|^2 + \eta^2 = \sum_{j=1}^n \xi_j^2 + \eta^2 > 0 \Rightarrow A(i\xi, i\eta) \neq 0 \quad (i = \sqrt{-1}).$$

ii) $\forall \xi \in \mathbf{R}^n - \{0\}$ il polinomio $A(i\xi, \lambda)$ ha m radici ($m \in \mathbf{N}$) con parte reale < 0 e $q - m$ con parte reale > 0 .

Scriveremo allora

$$A(i\xi, \lambda) = A_+(i\xi, \lambda)A_-(i\xi, \lambda),$$

dove $A_+(i\xi, \lambda)A_-(i\xi, \lambda)$ è un polinomio di grado $q - m(m)$ in λ con radici a parte reale positiva (negativa) per $\xi \neq 0$.

OSSERVAZIONE. La condizione i) equivale ad ammettere che $\exists C \in \mathbf{R}^+$ tale che $\forall (\xi, \eta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ si abbia:

$$(2) \quad C^{-1} \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{p_j} + |\eta|^q \right) \leq |A(i\xi, i\eta)| \leq C \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{p_j} + |\eta|^q \right).$$

È chiaro che la validità di (2) implica la i); viceversa, osservato che:

$$A(i\xi_1 t^{1/p_1}, \dots, i\xi_n t^{1/p_n}, i\eta t^{1/q}) = tA(i\xi, i\eta), \quad t \in \mathbf{R}^+,$$

se si pone

$$\xi_j = \omega_j / (\Sigma |\omega_j|^{p_j} + |\rho|^q)^{1/p_j} \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\eta = \rho / (\Sigma |\omega_j|^{p_j} + |\rho|^q)^{1/q}, \quad t = \Sigma |\omega_j|^{p_j} + |\rho|^q,$$

si ha:

$$A(i\omega, i\rho) = (\Sigma |\omega_j|^{p_j} + |\rho|^q) A(i\xi, i\eta), \quad \Sigma |\xi_j|^{p_j} + |\eta|^q = 1.$$

Se K è il compatto

$$K = \{(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, \Sigma |\xi_j|^{p_j} + |\eta|^q = 1\}$$

ed $M(m)$ è il massimo (minimo) di $|A(i\xi, i\eta)|$ su K ($m > 0$ per la i)), allora vale la (2) con $C \geq \max \{M, m^{-1}\}$.

Consideriamo ora, per $j=0, 1, \dots, m-1$, gli operatori differenziali:

$$(3) \quad B_j(D_x, D_y) = \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q = \mu_j/q} b_{\alpha h, j} D_x^\alpha D_y^h$$

dove $b_{\alpha h, j} \in \mathbf{CV}(\alpha, h)$ e $\forall j$, con $\mu_j \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

DEFINIZIONE 2. Sia A , definito da (1), propriamente quasi-ellittico di tipo m ; diremo che gli operatori $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ ricoprono A se:

iii) $\forall \xi \in \mathbf{R}^n - \{0\}$ i polinomi $\{B_j(i\xi, \lambda)\}_{j=0}^{m-1}$ sono linearmente indipendenti modulo $A_-(i\xi, \lambda)$.

La iii) significa che se

$$B_j(i\xi, \lambda) = Q_j(i\xi, \lambda)A_-(i\xi, \lambda) + B'_j(i\xi, \lambda)$$

e

$$B'_j(i\xi, \lambda) = \sum_{s=0}^{m-1} \beta_{js}(\xi) \lambda^s \quad (j=0, 1, \dots, m-1),$$

allora $\forall \xi \neq 0$ la matrice $\|\beta_{js}(\xi)\|$ è invertibile (se poniamo

$$B_j(D_x, D_y) = D_y^j \quad (j=0, \dots, m-1)$$

la iii) è evidentemente soddisfatta).

Supponiamo che A verifichi i), ii) e $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ siano definiti da (3); fissato $\xi \in \mathbf{R}^n - \{0\}$ consideriamo il problema di valori iniziali in $\mathbf{R}^+$:

$$(4) \quad \begin{cases} A(i\xi, D_t)v(t) = 0 & t \in \mathbf{R}^+ \\ B_j(i\xi, D_t)v(t)|_{t=0} = c_j & j=0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

$((c_0, \dots, c_{m-1}) \in \mathbf{C}^m)$.

Vale in proposito la proposizione seguente:

A. Sono equivalenti le affermazioni:

- la famiglia $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ ricopre A ;
- il problema (4) ha una soluzione in $\mathcal{S}(\overline{\mathbf{R}}^+)^1$ per ogni scelta delle c_j ;
- il problema (4) con $c_j = 0 \forall j$ ha, in $\mathcal{S}(\overline{\mathbf{R}}^+)$, solo la soluzione nulla;

¹⁾ $\mathcal{S}(\overline{\mathbf{R}}^+)$ è lo spazio delle restrizioni ad $\mathbf{R}^+$ degli elementi di $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

per la dimostrazione cfr. [9], vol. I, Cap. 2, 4.

D'ora innanzi supporremo che A sia propriamente quasi-ellittico di tipo m e che i $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ ricoprano A .

Richiamiamo ora brevemente la definizione e proprietà di certi spazi di distribuzioni di cui faremo uso costante in seguito.

DEFINIZIONE 3. Sia $(r_1, r_2, \dots, r_m) \in \mathbf{R}^m$, $r_j \geq 0 \forall j$; indichiamo con $H^{r_1, \dots, r_m}(\mathbf{R}^m)$ lo spazio così definito:

$$H^{r_1, \dots, r_m}(\mathbf{R}^m) = \{u \in L^2(\mathbf{R}^m) \mid \sum_1^m (1 + \xi_j^2)^{r_j/2} \widehat{u}(\xi) \in L^2(\mathbf{R}^m)\}$$

essendo $\widehat{u}(\xi) = \int e^{-i(\xi, x)} u(x) dx$. Su $H^{r_1, \dots, r_m}(\mathbf{R}^m)$ si porrà la norma:

$$\|u; H^{r_1, \dots, r_m}\| = \left\| \sum_1^m (1 + \xi_j^2)^{r_j/2} \widehat{u}(\xi); L^2(\mathbf{R}^m) \right\|.$$

È ben noto (vedi ad es. [8], [12]) che $H^{r_1, \dots, r_m}(\mathbf{R}^m)$ è uno spazio di Hilbert e

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}^m) \hookrightarrow H^{r_1, \dots, r_m}(\mathbf{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$$

(inclusioni continue ad immagine densa).

DEFINIZIONE 4. Posto

$$\Omega_+ = \mathbf{R}^{m-1} \times \mathbf{R}^+$$

indicheremo con $H^{r_1, \dots, r_m}(\Omega_+)$ il sottospazio di $\mathcal{D}'(\Omega_+)$ costituito dalle restrizioni ad Ω_+ degli elementi di $H^{r_1, \dots, r_m}(\mathbf{R}^m)$, con la norma:

$$\|v; H^{r_1, \dots, r_m}(\Omega_+)\| = \inf_{r_+ u = v} \|u; H^{r_1, \dots, r_m}\|$$

(r_+ è l'operatore di restrizione ad Ω_+). Si ha così uno spazio di Hilbert e:

$$\mathcal{D}(\bar{\Omega}_+) \hookrightarrow H^{r_1, \dots, r_m}(\Omega_+) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega_+)$$

(inclusioni continue ad immagine densa).

Ricordiamo che $v \in \mathbf{N}$,

$$v > \max \{r_1, \dots, r_m\} \Rightarrow C_0^v(\mathbf{R}^m) \hookrightarrow H^{r_1, \dots, r_m}(\mathbf{R}^m).$$

Si consideri l'operatore lineare $E : \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+) \rightarrow C_0^\nu(\mathbf{R}^m)$ così definito:

$$(Eu)(x', x_m) = \begin{cases} u(x', x_m), & x_m \geq 0 \\ \sum_1^{\nu+1} \alpha_j u(x', -x_m/j), & x_m < 0 \end{cases} \quad x' = (x_1, \dots, x_{m-1})$$

gli α_j essendo presi in modo che $\sum_1^{\nu+1} \alpha_j (-1/j)^k = 1$, $k=0, 1, \dots, \nu$. Si può provare che:

$$\|Eu; H^{r_1, \dots, r_m}\| \leq C \|u; H^{r_1, \dots, r_m}(\Omega_+)\|$$

con $C \in \mathbf{R}^+$ indipendente da u . Con E si indica poi ancora il prolungamento continuo dell'operatore ora definito a $H^{r_1, \dots, r_m}(\Omega_+)$ (per la dimostrazione vedi ad es. [15]. Ricordiamo poi il seguente teorema di tracce (vedi [12], [15]).

B. Si consideri l'applicazione lineare: $\mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+) \xrightarrow{\gamma_0} \mathfrak{D}(\mathbf{R}^{m+1})$ così definita: $\gamma_0 u = u(x', 0)$. Se $r_m > 1/2$ allora γ_0 si prolunga in un omomorfismo suriettivo continuo (indicato ancora con γ_0):

$$\gamma_0 : H^{r_1, \dots, r_m}(\Omega_+) \rightarrow H^{s_1, \dots, s_{m-1}}(\mathbf{R}^{m-1})$$

dove:

$$s_j/r_j = (r_m - 1/2)/r_m, \quad j=1, 2, \dots, m-1.$$

Sarà anche utile una disuguaglianza interpolatoria.

C. Se $(r_1, \dots, r_m) \in (\mathbf{R}^+)^m$, $(s_1, \dots, s_m) \in (\mathbf{R}^+)^m$ e $r_j > s_j$, $j=1, \dots, m$, allora $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^+ \exists C_\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ tale che:

$$\|u; H^{s_1, \dots, s_m}(\Omega_+)\| \leq \varepsilon \|u; H^{r_1, \dots, r_m}(\Omega_+)\| + C_\varepsilon \|u; L^2(\Omega_+)\|$$

$\forall u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$.

La prova immediata in $\mathbf{R}^m$ come conseguenza del fatto che:

$$\sum_1^m (1 + \xi_j^2)^{s_j/2} / \sum_1^m (1 + \xi_j^2)^{r_j/2} \rightarrow 0, \quad |\xi| \nearrow \infty.$$

In Ω_+ lo si dimostra servendosi dell'operatore di prolungamento E più sopra definito.

Nel seguito spesso avremo $m=n+1$, $r_j=\frac{p_j}{q}\sigma$ ($j=1, 2, \dots, n$), $r_{n+1}=\sigma$ essendo $(p_1, \dots, p_n, q) \in \mathbf{N}^{n+1}$ e $\sigma \in \mathbf{R}^+$; per ragioni di comodità scriveremo

$H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}$ (risp. $H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+)$) in luogo di $H^{\frac{p_1}{q}\sigma, \dots, \frac{p_n}{q}\sigma, \sigma}$ (risp. $H^{\frac{p_1}{q}\sigma, \dots, \frac{p_n}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+)$).

È chiaro che su $H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\mathbf{R}^{n+1})$ la norma:

$$\|u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}\| = \|(1 + \langle \xi \rangle^{\frac{p}{2q}} + \eta^2)^{\sigma/2} \widehat{u}(\xi, \eta); L^2(\mathbf{R}^{n+1})\|$$

(dove $\langle \xi \rangle^{\frac{p}{2q}} = \sum_{j=1}^n \xi_j^{2p_j/q}$) è equivalente a quella più sopra introdotta. Se poi $\sigma > 1/2$, allora lo spazio delle tracce di $H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+)$ si indicherà con:

$$H^{\frac{p}{q}(\sigma-1/2)}(\partial\Omega_+) \text{ in luogo di } H^{\frac{p_1}{q}(\sigma-1/2), \dots, \frac{p_n}{q}(\sigma-1/2)}(\partial\Omega_+).$$

Ciò premesso, dimostriamo che:

D. Se $\sigma \in \mathbf{R}^+$, $\sigma \geq \max\{q, \mu_0, \dots, \mu_{m-1}\}$, allora:

$$(5) \quad A : H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+) \rightarrow H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+)$$

$$(6) \quad B_j : H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+) \rightarrow H^{\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j), \sigma-\mu_j}(\Omega_+), \quad j=0, 1, \dots, m-1.$$

Le applicazioni essendo continue.

Infatti poichè $r_+ A E u = A u$ su $\mathfrak{D}'(\Omega_+)$, $u \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega}_+)$, si ha:

$$\begin{aligned} \|A u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+)\| &\leq \|A E u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}\| = \\ &= (\int (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{p}{2q}} + \eta^2)^{\sigma-q} |A(i\xi, i\eta)|^2 |\widehat{E u}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta)^{1/2} \end{aligned}$$

che, per la (2), si maggiora con:

$$\begin{aligned} C (\int (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{p}{2q}} + \eta^2)^{\sigma} |\widehat{E u}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta)^{1/2} &= C \|E u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}\| \leq \\ &\leq C' \|u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+)\| \end{aligned}$$

$C' \in \mathbf{R}^+$ indipendente da u . Analogamente, giacchè $r_+ B_j E u = B_j u$, si ha:

$$\begin{aligned} & \| B_j u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j), \sigma-\mu_j}(\Omega_+) \| \leq \| B_j E u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j), \sigma-\mu_j} \| = \\ & = (\int (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{p}} + \eta^2)^{\sigma-\mu_j} | B_j(i\xi, i\eta) |^2 | \widehat{E u}(\xi, \eta) |^2 d\xi d\eta)^{1/2} \leq \\ & \leq C (\int (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}} + \eta^2)^{\sigma-\mu_j} \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q = \mu_j/q} \xi^{2\alpha} \eta^{2h} | \widehat{E u}(\xi, \eta) |^2 d\xi d\eta)^{1/2}. \end{aligned}$$

Osserviamo che vale la disuguaglianza elementare:

$$(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^{n+1} \Rightarrow \xi^{2\alpha} \eta^{2h} \leq (\sum \xi_j^{2p_j} + \eta^{2q})^{\mu_j/q}, \quad \langle \alpha, 1/p \rangle + h/q = \mu_j/q$$

e quindi, con una nuova costante $C \in \mathbf{R}^+$ indipendente da u :

$$\begin{aligned} & \| B_j u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j), \sigma-\mu_j}(\Omega_+) \| \leq C (\int (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}} + \\ & + \eta^2)^{\sigma-\mu_j} (\sum \xi_j^{2p_j} + \eta^{2q})^{\mu_j/q} | \widehat{E u}(\xi, \eta) |^2 \cdot \\ & \cdot d\xi d\eta)^{1/2} \leq C' \| E u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma} \| \leq C'' \| u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+) \|. \end{aligned}$$

L'affermazione è così provata. Per il teorema di tracce ricordato (vedi B) possiamo concludere, tenuto conto di (5) e (6), che se $\sigma \in \mathbf{R}^+$, $\sigma > \max \{q, \mu_0, \dots, \mu_{m-1}\} + 1/2$ allora $\forall u \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega}_+)$ si ha:

$$\begin{aligned} (7) \quad & \| A u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+) \| + \sum_0^{m-1} \| \gamma_0 B_j u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \| \leq \\ & \leq C \| u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+) \|. \end{aligned}$$

Con $C \in \mathbf{R}^+$ indipendente da u .

È chiaro che una disuguaglianza dello stesso tipo di (7) vale se si aggiunge al primo membro $\| u; L^2(\Omega_+) \|$. Nel seguito mostriamo che tale disuguaglianza si può invertire, almeno per σ sufficientemente grande.

1. Valutazioni a priori in un semispazio.

a) Caso dei coefficienti costanti.

Supponiamo A , definito da (1), propriamente quasi-ellittico di tipo m e che gli operatori $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$, definiti da (3), ricoprano A e sia $\mu_j \leq q-1$, $j=0, \dots, m-1$. Se $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$, poniamo:

$$(8) \quad \begin{cases} A(D_x, D_y)u(x, y) = f(x, y) \\ B_j(D_x, D_y)u(x, y)|_{y=0} = \varphi_j(x), \end{cases} \quad j=0, 1, \dots, m-1.$$

Vale la:

PROPOSIZIONE 1'. $\forall u \in H^{p,q}(\Omega_+)$ risulta:

$$(9) \quad \begin{aligned} \|u; H^{p,q}(\Omega_+)\| &\leq C(\|Au, L^2(\Omega_+)\| + \\ &+ \sum_0^{m-1} \|\gamma_0 B_j u; H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+)\| + \|u; L^2(\Omega_+)\|) \end{aligned}$$

dove C è una opportuna costante indipendente da u .

DIMOSTRAZIONE. Applicando in (8) la trasformata di Fourier alla variabile tangenziale x , si ha:

$$\begin{cases} A(i\xi, D_y)\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{f}(\xi, y) \\ B_j(i\xi, D_y)\widehat{u}(\xi, y)|_{y=0} = \widehat{\varphi}_j(\xi), \end{cases} \quad j=0, 1, \dots, m-1$$

dove:

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\xi, y) &= \int e^{-i\langle \xi, x \rangle} u(x, y) dx, \quad \widehat{f}(\xi, y) = \\ &= \int e^{-i\langle \xi, x \rangle} f(x, y) dx, \quad \widehat{\varphi}_j(\xi) = \int e^{-i\langle \xi, x \rangle} \varphi_j(x) dx. \end{aligned}$$

Poniamo, per $t > 0$, $\xi_j = t^{\frac{1}{p_j}} \zeta_j$ $j=1, 2, \dots, n$; $y = t^{-1/q} \tau$, allora:

$$A(it^{1/p_1} \zeta_1, \dots, it^{1/p_n} \zeta_n, t^{1/q} D_\tau) \widehat{u}(\xi, t^{-1/q} \tau) = \widehat{f}(\xi, t^{-1/q} \tau)$$

$$B_j(it^{1/p_1} \zeta_1, \dots, it^{1/p_n} \zeta_n, t^{1/q} D_\tau) \widehat{u}(\xi, t^{-1/q} \tau)|_{\tau=0} = \widehat{\varphi}_j(\xi), \quad j=0, 1, \dots, m-1.$$

Applicando il teorema 10.2.1 di [8] si ha:

$$\sum_0^q \int_0^{+\infty} |D_{\tau}^j \widehat{u}(\xi, t^{-1/q} \tau)|^2 d\tau \leq C(\zeta) \left\{ \frac{1}{t^2} \int_0^{+\infty} |f(\xi, t^{-1/q} \tau)|^2 d\tau + \right. \\ \left. + \sum_0^{m-1} t^{-2\mu_j/q} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 \right\}$$

dove $\mathbf{R}^n - \{0\} \ni \zeta \mapsto C(\zeta) \in \mathbf{R}^+$ è una funzione continua opportuna, indipendente u . Si ha quindi:

$$\sum_0^q t^{\frac{1}{q}(1-2j)} \int_0^{+\infty} |D_y^j \widehat{u}(\xi, y)|^2 dy \leq C(\zeta) \left\{ t^{\frac{1}{q}-2} \int_0^{+\infty} |\widehat{f}(\xi, y)|^2 dy + \right. \\ \left. + \sum_0^{m-1} t^{-2\mu_j/q} |\varphi_j(\xi)|^2 \right\}$$

sicchè:

$$\sum_j t^{2(1-\frac{j}{q})} \int_0^{+\infty} |D_y^j \widehat{u}(\xi, y)|^2 dy \leq C(\zeta) \left\{ \int_0^{+\infty} |\widehat{f}(\xi, y)|^2 dy + \right. \\ \left. + \sum_0^{m-1} t^{2-2\frac{\mu_j+1/2}{q}} |\varphi_j(\xi)|^2 \right\}.$$

Ponendo $t = \sum_0^{m-1} |\xi_k|^{p_k}$ detto C il massimo di $C(\zeta)$ sul compatto

$$\left\{ \zeta \mid \sum_1^n |\zeta_k|^{p_k} = 1 \right\}$$

e prendendo gli addendi relativi a $j=0$ e $j=q$:

$$\left(\sum_1^n |\xi_k|^{p_k} \right)^2 \int_0^{+\infty} |\widehat{u}(\xi, y)|^2 dy + \int_0^{+\infty} |D_y^q \widehat{u}(\xi, y)|^2 dy \leq \\ \leq C \left\{ \int_0^{+\infty} |\widehat{f}(\xi, y)|^2 dy + \sum_0^{m-1} \left(\sum_1^n |\xi_k|^{p_k} \right)^{\frac{2}{q}(q-\mu_j-1/2)} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 \right\}$$

Integrando membro a membro su $\mathbf{R}^n$, si ottiene, con una nuova costante C :

$$(10) \quad \int \sum_1^n \xi_k^{2p_k} \int_0^{+\infty} |\widehat{u}(\xi, y)|^2 dy d\xi + \int \int_0^{+\infty} |D_y^q u(\xi, y)|^2 dy d\xi \leq \\ \leq C \left\{ \int \int_0^{+\infty} |\widehat{f}(\xi, y)|^2 dy d\xi + \sum_0^{m-1} \int (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}})^{q-\mu_j-1/2} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi \right\}.$$

Aggiungendo ad entrambi i membri della (10)

$$\int \int_0^{+\infty} |\widehat{u}(\xi, y)|^2 dy d\xi$$

si ottiene la (9) nel caso $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$; poichè la costante C non dipende da u , per continuità la (9) si estende agli elementi di $H^{\frac{p}{q}, q}(\Omega_+)$ (si scriverà $H^{p, q}(\Omega_+)$ invece di $H^{\frac{p}{q}, q}(\Omega_+)$).

c.v.d.

Vogliamo ora estendere la (9) agli spazi $H^{\frac{p}{q}, \sigma}(\Omega_+)$, $\sigma > q$.

A tal fine sarà utile qui e nel seguito il:

LEMMA 1. Sia $\sigma \in \mathbf{R}^+$, $\sigma > q$, poniamo

$$t^{(\sigma-q)/2}(\xi) = \sum_j (1 + \xi_j^2)^{\frac{p_j}{q} \cdot \frac{\sigma-q}{2}}, \quad \xi \in \mathbf{R}^n$$

e indichiamo con $T^{\sigma-q}$ l'operatore « tangenziale » di derivazione frazionaria, definito nel modo seguente:

$$(T^{\sigma-q}\varphi)(x, y) = \mathfrak{F}_\xi^{-1}(t^{(\sigma-q)/2}(\xi)\widehat{\varphi}(\xi, y))(x, y), \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$$

($\mathfrak{F}_\xi^{-1}$ indica la trasformata di Fourier inversa fatta relativamente alla variabile ξ). Dico che su $\mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$ sono equivalenti le norme:

$$a) \parallel u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+) \parallel;$$

$$b) \parallel T^{\sigma-q}u; H^{p, q}(\Omega_+) \parallel + \parallel D_y^q u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+) \parallel.$$

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo col provare il lemma in $\mathbf{R}^{n+1}$. A tal fine consideriamo la funzione $k : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^+$, così definita:

$$k(\xi, \eta) = (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}} + \eta^2)^\sigma / [(1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}})^{\sigma-q} (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}} + \eta^2)^q + \\ + \eta^{2q} (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}} + \eta^2)^{\sigma-q}].$$

Allora:

$$(1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}} + \eta^2)^\sigma k(\xi, \eta)^{-1} \geq \\ \geq \alpha \langle (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}})^\sigma + \eta^{2q} (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}})^{\sigma-q} + \eta^{2\sigma} \rangle \geq \\ \geq \alpha \langle (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}})^\sigma + \eta^{2\sigma} \rangle \geq \alpha' (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}} + \eta^2)^\sigma$$

$\alpha, \alpha' \in \mathbf{R}^+$ opportune ed indipendenti da (ξ, η) . D'altra parte:

$$(1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}} + \eta^2)^\sigma k(\xi, \eta)^{-1} \leq \beta \langle (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}} + \eta^2)^{\sigma-q} (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}} + \eta^2)^q \rangle$$

$\beta \in \mathbf{R}^+$ opportuna ed indipendente da (ξ, η) . Quindi esistono $c, d \in \mathbf{R}^+$ opportuni ed indipendenti da (ξ, η) tali che $c < k(\xi, \eta) < d$. Osservatore

che $(1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}})^{\sigma-q} \sim t^{\sigma-q}(\xi)$. (Se $f, g : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^+$ diremo che $f \sim g$ se $\exists C \in \mathbf{R}^+$ tale che: $C^{-1}g(\xi) \leq f(\xi) \leq Cg(\xi) \forall \xi \in \mathbf{R}^m$) si ha subito l'asserto in $\mathbf{R}^{n+1}$. Sia ora $v \in \mathbf{N}$, $v > \max \{ [p_1\sigma/q], \dots, [p_n\sigma/q], [\sigma] \}$. (Se $\underline{\alpha} \in \mathbf{R}$, $[\alpha]$ è la parte intera di α) e consideriamo l'operatore $E : \mathfrak{D}(\Omega_+) \rightarrow C_0^v(\mathbf{R}^{n+1})$:

$$(Eu)(x, y) = v(x, y) = \begin{cases} u(x, y), & y \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{v+1} \beta_j u(x, -y/j), & y < 0 \end{cases}$$

con la condizione $\sum_1^{v+1} \beta_j (-1/j)^k = 1, k=0, 1, \dots, v$. Allora (vedi [15]):

$$\| u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+) \| \leq \| v; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma} \| \leq C \| u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+) \|\$$

con $C \in \mathbf{R}^+$ opportuna ed indipendente da u . Tenendo conto che il lemma è già provato in $\mathbf{R}^{n+1}$ si ha:

$$\| u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+) \| \leq C \{ \| T^{\sigma-q}v; H^{p, q} \| + \| D_y^q v; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q} \| \}.$$

Ora, sempre per [15]:

$$\| T^{\sigma-q}v; H^{p, q} \| \leq C_1 \| T^{\sigma-q}u; H^{p, q}(\Omega_+) \|\$$

(C_1 non dipende da u). D'altra parte:

$$(D_y^q v)(x, y) = \begin{cases} D_y^q u(x, y) & y \geq 0 \\ \sum_1^{v+1} \gamma_j (D_y^q u)(x, -y/j), & y < 0 \end{cases}$$

dove $\gamma_j = \beta_j \left(-\frac{1}{j}\right)^q$ e quindi, ancora per [15]:

$$\| D_y^q v; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q} \| \leq C_2 \| D_y^q u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+) \|\$$

(C_2 non dipende da u). Quindi la norma b) è più forte della norma a).

Viceversa, osservato che $T^{\sigma-q} : H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+) \rightarrow H^{p, q}(\Omega_+)$ con continuità (ciò è immediato in $\mathbf{R}^{n+1}$; in Ω_+ si prova ricorrendo all'operatore di prolungamento E), si riconosce che la norma a) è più forte della norma b). Il lemma è così provato. c.v.d.

Vale la:

PROPOSIZIONE 1''. Sia

$$\sigma \in \mathbf{R}^+, 0 < \sigma - q = \rho \leq \rho_0 = \min \left\{ \frac{q}{p_1}, \dots, \frac{q}{p_n} \right\}$$

Allora $\forall u \in H^{\frac{p}{q}, \sigma}(\Omega_+)$ si ha:

$$(11) \quad \begin{aligned} \|u; H^{\frac{p}{q}, \sigma}(\Omega_+)\| \leq & C\{\|Au; H^{\frac{p}{q}, (\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+)\| + \\ & + \sum_0^{m-1} \|\gamma_0 B_j u; H^{\frac{p}{q}, (\sigma-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+)\| + \|u; L^2(\Omega_+)\|\} \end{aligned}$$

essendo C una opportuna costante indipendente da u .

DIMOSTRAZIONE. Data $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$, per il lemma 1 e per la (9), si ha:

$$(12) \quad \begin{aligned} \|u; H^{\frac{p}{q}, \sigma}(\Omega_+)\| \leq & C\{\|T^{\sigma-q}u; H^{p, q}(\Omega_+)\| + \\ & + \|D_y^q u; H^{\frac{p}{q}, (\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+)\|\} \leq C'\{\|AT^{\sigma-q}u; L^2(\Omega_+)\| + \\ & + \sum_0^{m-1} \|\gamma_0 B_j T^{\sigma-q}u; H^{\frac{p}{q}, (q-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+)\| + \\ & + \|T^{\sigma-q}u; L^2(\Omega_+)\| + \|D_y^q u; H^{\frac{p}{q}, (\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+)\|. \end{aligned}$$

Si osservi che il commutatore $[A, T^{\sigma-q}] = AT^{\sigma-q} - T^{\sigma-q}A$ è nullo e analogamente per $j=0, 1, \dots, m-1$, $[B_j, T^{\sigma-q}] = 0$. Osserviamo ora che:

$$D_y^q u = a^{-1}Au - \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q = 1, h \leq q-1} a^{-1}a_{\alpha h} D_x^\alpha D_y^h u = a^{-1}Au + Ru \quad ;$$

dove si è posto $a = a_{0, q} \neq 0$ per la (i) di Def. 1) ed Ru ha un significato evidente. Quindi:

$$\begin{aligned} \|D_y^q u; H^{\frac{p}{q}, (\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+)\| \leq & C\{\|Au; H^{\frac{p}{q}, (\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+)\| + \\ & + \|Ru; H^{\frac{p}{q}, (\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+)\|\}. \end{aligned}$$

Vogliamo valutare $\|Ru; H^{\frac{p}{q}, (\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+)\|$. Servendoci dell'operatore di prolungamento $E: H^{\frac{p}{q}, \sigma}(\Omega_+) \rightarrow H^{\frac{p}{q}, \sigma}(\mathbf{R}^{n+1})$ più sopra definito, si ha, per $h \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $h \leq q-1$:

$$\|D_y^h Eu; H^{\frac{p}{q}, (\sigma-q), \sigma-q}\| \leq \|Eu; H^{\frac{p}{q}, (\sigma-1), \sigma-1}(\Omega_+)\| \leq C_1 \|u; H^{\frac{p}{q}, (\sigma-1), \sigma-1}\|$$

Se poi α è un multindice non nullo e $\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q = 1$, $h \leq q-1$, allora:

$$\begin{aligned}
 & \| D_x^\alpha D_y^h E u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q} \| = \left(\int (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{p}} + \right. \\
 & \quad \left. + \eta^2)^{\sigma-q} \xi^{2\alpha} \eta^{2h} | \widehat{Eu}(\xi, \eta) |^2 d\xi d\eta \right)^{1/2} \leq \\
 & \leq C_2 \left(\int (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}} + \eta^2)^{\sigma-q} (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{p}})^{\langle \alpha, \frac{p}{q} \rangle - (\sigma-q)} \eta^{2h} \frac{(1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}})^{\frac{p}{q}(\sigma-q)}}{t^{\sigma-q}(\xi)} \right. \\
 & \quad \left. | \widehat{T^{\sigma-q}Eu}(\xi, \eta) |^2 d\xi d\eta \right)^{1/2} \leq \\
 & \leq C_3 \left(\int (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}} + \eta^2)^{\sigma-q} (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{p}} + \eta^2)^{\langle \alpha, \frac{q}{p} \rangle + h - (\sigma-q)} \right. \\
 & \quad \left. | \widehat{T^{\sigma-q}Eu}(\xi, \eta) |^2 d\xi d\eta \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

(si tenga conto $\langle \alpha, \frac{q}{p} \rangle \geq \sigma - q$ per l'ipotesi fatta su σ). Quindi:

$$\begin{aligned}
 & \| D_x^\alpha D_y^h E u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q} \| \leq C_3 \| T^{\sigma-q} E u; H^{p, q} \| \leq \\
 & \leq C'_3 \| T^{\sigma-q} u; H^{p, q}(\Omega_+) \|.
 \end{aligned}$$

Concludendo si avrà:

$$\begin{aligned}
 (13) \quad & \| Ru; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+) \| \leq C \{ \| u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-1), \sigma-1}(\Omega_+) \| + \\
 & + \| T^{\sigma-q} u; H^{p, q}(\Omega_+) \| \}
 \end{aligned}$$

($C \in R^+$ non dipende da u). Applicando la (9) al secondo membro di (13) e sostituendo in (12) e tenendo conto delle osservazioni fatte su $[A, T^{\sigma-q}]$ e $[B_j, T^{\sigma-q}]$, si ottiene, per $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$:

$$\begin{aligned}
 (14) \quad & \| u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+) \| \leq C \{ \| T^{\sigma-q} A u; L^2(\Omega_+) \| + \\
 & + \sum_0^{m-1} \| \gamma_0 T^{\sigma-q} B_j u; H^{\frac{p}{q}(q-1/2)}(\partial\Omega_+) \| + \| T^{\sigma-q} u; L^2(\Omega_+) \| + \\
 & + \| A u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+) \| + \| u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-1), \sigma-1}(\Omega_+) \|.
 \end{aligned}$$

D'altra parte $[\gamma_0, T^{\sigma-q}] = 0$ e quindi, per la proprietà di continuità di

$T^{\sigma-q}$ e poichè $\sigma-q \leq \sigma-1$ (e pertanto $H^{\frac{p}{q}(\sigma-1), \sigma-1}(\Omega_+) \hookrightarrow H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+)$) dalla (14) si ha:

$$(15) \quad \begin{aligned} \|u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+)\| &\leq C\{\|Au; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+)\| + \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \|\gamma_0 B_j u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+)\| + \|u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-1), \sigma-1}(\Omega_+)\| \end{aligned}$$

da cui segue la (11) tenuto conto della disuguaglianza interpolatoria (Preliminari C). c.v.d.

Possiamo ora dimostrare la:

PROPOSIZIONE 1. *Sia $\sigma \in \mathbf{R}^+$, $\sigma > q$, allora vale la (11) $\forall u \in H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+)$.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che se $\sigma \in \mathbf{R}^+$, $\sigma > q$, allora $\sigma = q + k\rho$, con $k \in \mathbf{N}$ e $\rho \in \mathbf{R}^+$, $\rho \leq \rho_0 = \min\left\{\frac{q}{p_1}, \dots, \frac{q}{p_n}\right\}$. È quindi chiaro che è sufficiente fare la dimostrazione per i reali $\sigma = q + k\rho$, $k \in \mathbf{N}$, $\rho \in]0, \rho_0]$, ρ fissato. Ora per $k=1$ sei è già fatta la dimostrazione (Prop. 1''). Supponiamo vera la tesi per un certo $k-1$ e proviamola per k . Tenuto conto del lemma 1 e dell'ipotesi induttiva, si ha che $\forall u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$:

$$(16) \quad \begin{aligned} \|u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+)\| &\leq C\{\|T^\rho u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\rho), \sigma-\rho}(\Omega_+)\| + \\ &+ \|D_y^q u; H^{\frac{p}{q}k\rho, k\rho}(\Omega_+)\| \} \leq C'\{\|AT^\rho u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q-\rho), \sigma-q-\rho}(\Omega_+)\| + \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \|\gamma_0 B_j T^\rho u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\rho-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+)\| + \|T^\rho u; L^2(\Omega_+)\| + \\ &+ \|D_y^q u; H^{\frac{p}{q}k\rho, k\rho}(\Omega_+)\| \}. \end{aligned}$$

Ma, con ragionamenti analoghi a quelli fatti per $k=1$:

$$\begin{aligned} \|D_y^q u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+)\| &\leq \|Au; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+)\| + \\ &+ C\{\|u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-1), \sigma-1}(\Omega_+)\| + \|T^\rho u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\rho), \sigma-\rho}(\Omega_+)\|\} \end{aligned}$$

e quindi, applicando ancora l'ipotesi induttiva, la disuguaglianza interpolatoria (Preliminari C) e l'osservazione sui commutatori, si ottiene la (11). c.v.d.

Per ottenere la (11) si è fatto uso in sostanza del teorema 10.2.1 di [8] che si applica nell'ipotesi $\mu_j \leq q-1$, $j=0, 1, \dots, m-1$. Supponiamo ora che A sia propriamente quasi-ellittico di tipo m e gli operatori $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ ricoprano A , ma che $\max_j \mu_j \geq q$. Sia s il più piccolo naturale tale che $(s+1)q > \max_j \mu_j$ (cioè $s > \max_j \frac{\mu_j}{q} - 1$); consideriamo l'operatore A^{s+1} iterato $(s+1)$ -mo di A . Sarà:

$$A^{s+1}(D_x, D_y) = \sum_{(\alpha, 1/p) + h/q = s+1} c_{ah, s+1} D_x^\alpha D_y^h; \quad c_{ah, s+1} \in \mathbf{C} \quad \forall (\alpha, h).$$

È chiaro che A^{s+1} è propriamente quasi-ellittico di tipo $m(s+1)$. Poniamo poi:

$$Q_j(D_x, D_y) = B_j(D_x, D_y), \quad j=0, 1, \dots, m-1;$$

$$Q_{m+j}(D_x, D_y) = D_y^j A, \quad j=0, 1, \dots, ms-1.$$

Vale il seguente:

LEMMA 2. *Gli operatori $\{Q_j\}_{j=0}^{m(s+1)-1}$ ricoprono A^{s+1} se e solo se gli operatori $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ ricoprono A .*

DIMOSTRAZIONE. In virtù della proposizione A dei Preliminari si tratta di provare che, posto per $\xi \in \mathbf{R}^n - \{0\}$: $T_\xi : \mathcal{S}(\overline{\mathbf{R}^+}) \rightarrow \mathcal{S}(\overline{\mathbf{R}^+}) \times \mathbf{C}^m$:

$$T_\xi : \mapsto (A(i\xi, D_t)u, B_0(i\xi, D_t)u|_{t=0}, \dots, B_{m-1}(i\xi, D_t)u|_{t=0})$$

e $S_\xi : \mathcal{S}(\overline{\mathbf{R}^+}) \rightarrow \mathcal{S}(\overline{\mathbf{R}^+}) \times \mathbf{C}^{m(s+1)}$, con:

$$S_\xi : u \mapsto (A^{s+1}(i\xi, D_t)u, Q_0(i\xi, D_t)u|_{t=0}, \dots, Q_{m(s+1)-1}(i\xi, D_t)u|_{t=0})$$

allora T_ξ è un isomorfismo (algebrico) se e solo se lo è S_ξ .

Sia T_ξ un isomorfismo; se $S_\xi u = 0$, allora $A^s A u = 0$ e $D_t^k A u = 0$, per $k=0, \dots, ms-1$, ma, poichè:

$$u \mapsto \Gamma_\xi u = (A^s(i\xi, D_t)u, u|_{t=0}, \dots, D_t^{ms-1}u|_{t=0})$$

è un isomorfismo di $\mathcal{S}(\overline{\mathbf{R}}^+)$ su $\mathcal{S}(\overline{\mathbf{R}}^+) \times \mathbf{C}^{ms}$ (Prop. A dei Preliminari), ne viene che $Au=0$; d'altra parte $B_j u|_{t=0}=0$ e quindi $T_\xi u=0$, cioè $u=0$. S_ξ è quindi iniettivo. Se $(f, \delta_0, \dots, \delta_{m-1}, \rho_0, \dots, \rho_{ms-1}) \in \mathcal{S}(\overline{\mathbf{R}}^+) \times \mathbf{C}^{m(s+1)}$, sia $u \in \mathcal{S}(\overline{\mathbf{R}}^+)$ tale che $\Gamma_\xi u = (f, \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{ms-1})$ e sia $v \in \mathcal{S}(\overline{\mathbf{R}}^+)$ tale che $T_\xi v = (u, \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{m-1})$, allora $S_\xi v = (f, \delta_0, \dots, \delta_{m-1}, \rho_0, \dots, \rho_{ms-1})$. Pertanto S_ξ è un isomorfismo. Viceversa sia S_ξ un isomorfismo; allora T_ξ è iniettivo (se $T_\xi u=0$, allora $S_\xi u=0$ e quindi $u=0$) e se $(f, \delta_0, \dots, \delta_{m-1}) \in \mathcal{S}(\overline{\mathbf{R}}^+) \times \mathbf{C}^m$, allora, posto $u \in \mathcal{S}(\overline{\mathbf{R}}^+)$ tale che

$$S_\xi u = (A^s f, \delta_0, \dots, \delta_{m-1}, Af|_{t=0}, \dots, D_t^{ms-1} Af|_{t=0})$$

si ha $T_\xi u = (f, \delta_0, \delta_1, \delta_{m-1})$ e quindi T_ξ è suriettivo.

c.v.d.

Sussiste la:

PROPOSIZIONE 2. *Sia A (definito da (1)) propriamente quasi ellittico di tipo m e $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ (definito da (3)) un sistema di operatori ricoprenti A . Sia s il minimo intero non negativo tale che $s > \max_j \frac{\mu_j}{q} - 1$. Ciò premesso*

$$\forall u \in H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+), \quad \sigma \geq \sigma_0 = (s+1)q,$$

si ha:

$$(17) \quad \begin{aligned} \|u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+)\| &\leq C \{ \|Au; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+)\| + \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \|\gamma_0 B_j u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+)\| + \|u; L^2(\Omega_+)\| \} \end{aligned}$$

essendo C un'opportuna costante indipendente da u .

DIMOSTRAZIONE. Per $s=0$ (cioè $\mu_j \leq q-1 \quad \forall j$) è il contenuto della Prop. 1. Sia allora $s>0$; tenuto conto del lemma 2 e della Prop. 1 si ha:

$$(18) \quad \begin{aligned} \|u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+)\| &\leq C \{ \|A^{s+1}u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\sigma_0), \sigma-\sigma_0}(\Omega_+)\| + \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \|\gamma_0 B_j u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+)\| + \sum_{j=0}^{ms-1} \|\gamma_0 D_y^j Au; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q-\frac{1}{2}+j)}(\partial\Omega_+)\| + \|u; L^2(\Omega_+)\| \}. \end{aligned}$$

Ricordando ora il teorema di tracce (Prelim. B) si ha:

$$\| \gamma_0 D_y^j A u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q-\frac{1}{2}+j)}(\partial\Omega_+) \| \leq C' \| A u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+) \|$$

per $j=0, 1, \dots, m_s-1$. Quindi dalla (18) segue la (17). c.v.d.

Ci siamo fino ad ora limitati a considerare operatori differenziali ridotti alla loro « parte principale ». È possibile togliere tale limitazione ed estendere così la validità della (17). Precisamente, si ponga:

$$(1') \quad A(D_x, D_y) = \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q = 1} a_{\alpha h} D_x^\alpha D_y^h + \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q < 1} b_{\alpha h} D_x^\alpha D_y^h = \\ = A_0(D_x, D_y) + A_1(D_x, D_y)$$

$$(3') \quad B_j(D_x, D_y) = \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q = \mu_j/q} b_{\alpha h, j} D_x^\alpha D_y^h + \\ + \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q < \mu_j/q} c_{\alpha h, j} D_x^\alpha D_y^h = B_j^0(D_x, D_y) + B'_j(D_x, D_y).$$

Si ha la:

PROPOSIZIONE 3. *Sia A definito da (1') con A_0 propriamente quasi-ellittico di tipo m , $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ definiti da (3') e $\{B_j^0\}_{j=0}^{m-1}$ formino un sistema ricoprente A_0 . Allora se $\sigma \geq \sigma_0$ (definito nella Prop. 2) si ha che vale la (17) (con la nuova definizione di A e dei B_j).*

DIMOSTRAZIONE. Dalla (17) si ha, $\forall u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$:

$$(19) \quad \| u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+) \| \leq C \{ \| A u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+) \| + \\ + \sum_{j=0}^{m-1} \| \gamma_0 B_j u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \| + \| A_1 u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+) \| + \\ + \sum_{j=0}^{m-1} \| \gamma_0 B'_j u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \| + \| u; L^2(\Omega_+) \| \}$$

Si osservi che esiste un $\delta \in \mathbf{R}^+$, $\delta < \sigma$, ed una m -pla $(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{m-1})$ a termini reali positivi (con $\delta_j < \sigma \ \forall j$) tale che:

$$\| A_1 u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+) \| \leq C_1 \| u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\delta), \sigma-\delta}(\Omega_+) \|\}$$

$C_1 \in \mathbf{R}^+$ indipendente da u , e:

$$\begin{aligned} \|\gamma_0 B'_j u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+)\| &\leq C' \|B'_j u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j), \sigma-\mu_j}(\Omega_+)\| \leq \\ &\leq C_j \|u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\delta_j), \sigma-\delta_j}(\Omega_+)\| \end{aligned}$$

$C_j \in \mathbf{R}^+$ indipendente da u . Tenuto allora presente la disuguaglianza interpolatoria C dei Preliminari, dalla (19) si ottiene la (17). c.v.d.

Vediamo ora in che misura si possano estendere valutazioni a priori come la (17) al caso in cui A e $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ siano a coefficienti variabili.

b) *Caso dei coefficienti variabili.*

DEFINIZIONE 5. Sia $\sigma \in \mathbf{R}^+$, diremo che la $(n+1)$ -pla $(l_1, l_2, \dots, l_n, \mu) = (l, \mu) \in \mathbf{R}^{n+1}$ è accettabile rispetto alla $(n+1)$ -pla $(p, \sigma/q, \dots, p_n\sigma/q, \sigma) = \left(\frac{p}{q}, \sigma, \sigma\right)$ se e solo se:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad & l_j \geq p_j\sigma/q, \\ & l_j - [l_j] \geq p_j\sigma/q - [p_j\sigma/q], \\ \text{e precisamente:} \\ & l_j - [l_j] > p_j\sigma/q - [p_j\sigma/q] \\ \text{se } p_j\sigma/q \notin \mathbf{N}, \text{ mentre } l_j = [l_j] \text{ se } p_j\sigma/q \in \mathbf{N}. \end{aligned} \right\} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

2) $\mu \geq \sigma$ e $\mu - [\mu] \geq \sigma - [\sigma]$, precisamente $\mu - [\mu] > \sigma - [\sigma]$ se $\sigma \notin \mathbf{N}$, $\mu = [\mu]$ se $\sigma \in \mathbf{N}$.

DEFINIZIONE 6. Sia $(l, \mu) \in (\mathbf{R}^+)^{n+1}$, con $\mathcal{C}^{l, \mu}(\bar{\Omega}_+)$ (risp. $\mathcal{C}_0^{l, \mu}(\bar{\Omega}_+)$) indichiamo la totalità delle applicazioni $\varphi: \bar{\Omega}_+ \rightarrow \mathbf{C}$ tali che:

1) $D_{x_j}^h \varphi$ esiste continua su $\bar{\Omega}_+$ (risp. continua ed a supporto compatto in $\bar{\Omega}_+$) per $0 \leq h \leq [l_j]$, $j = 1, \dots, n$. Inoltre se $l_j - [l_j] > 0$, $D_{x_j}^{[l_j]} \varphi$ è tale che $\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{\Omega}_+$ esiste un intervallo compatto $I(\bar{x}, \bar{y}) \subset \bar{\Omega}_+$ tale che:

$$\sup_{(x, y) \in I, (x+he^i, y) \in I} |D_{x_j}^{[l_j]} \varphi(x+he^i, y) - D_{x_j}^{[l_j]} \varphi(x, y)| \leq |h|^{[l_j]-l_j} < \infty,$$

dove $x + he^j = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n)$, (risp. $D_{x_j}^{[l_j]} \varphi$ è tale che:

$$\sup_{(x, y) \in \bar{\Omega}_+, (x + he^j, y) \in \bar{\Omega}_+} |D_{x_j}^{[l_j]} \varphi(x + he^j, y) - D_{x_j}^{[l_j]} \varphi(x, y)| |h|^{[l_j] - l_j} < \infty,$$

e questo per $j = 1, \dots, n$.

2) $D_y^h \varphi$ esiste continua su $\bar{\Omega}_+$ (risp. continua ed a supporto compatto su $\bar{\Omega}_+$) per $0 \leq h \leq [\mu]$. Inoltre se $\mu - [\mu] > 0$, $D_y^{[\mu]} \varphi$ è tale che $\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{\Omega}_+$ esiste un intervallo compatto $J(\bar{x}, \bar{y}) \subset \bar{\Omega}_+$ tale che:

$$\sup_{(x, y) \in J, (x, y+h) \in J} |D_y^{[\mu]} \varphi(x, y+h) - D_y^{[\mu]} \varphi(x, y)| |h|^{[\mu] - \mu} < \infty$$

(risp. $D_y^{[\mu]} \varphi$ è tale che:

$$\sup_{(x, y) \in \bar{\Omega}_+, (x, y+h) \in \bar{\Omega}_+} |D_y^{[\mu]} \varphi(x, y+h) - D_y^{[\mu]} \varphi(x, y)| |h|^{[\mu] - \mu} < \infty).$$

Su $\mathcal{C}^{l, \mu}(\bar{\Omega}_+)$ (risp. $\mathcal{C}_0^{l, \mu}(\bar{\Omega}_+)$) si porrà la topologia naturale.

Dimostriamo ora il seguente:

LEMMA 3. Sia $\sigma \in \mathbf{R}^+$ ed (l, μ) una $(n+1)$ -pla accettabile rispetto a $\left(\frac{p}{q}\sigma, \sigma\right)$. Se $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$, $\varphi \in \mathcal{C}_0^{l, \mu}(\bar{\Omega}_+)$, allora $\varphi u \in H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+)$ e di più:

$$(20) \quad \|\varphi u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+)\| \leq C_1 \sup_{\Omega_+} |\varphi| \|u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+)\| + \\ + C_2(\varphi) \|u; H^{\tau(\sigma), t(\sigma)}(\Omega_+)\|$$

dove $(\tau(\sigma), t(\sigma)) = (\tau_1(\sigma), \dots, \tau_n(\sigma), t(\sigma))$ con

$$\tau_j(\sigma) = \begin{cases} [p_j\sigma/q] & \text{se } [p_j\sigma/q] < p_j\sigma/q \\ \frac{p_j\sigma}{q} - 1 & \text{se } p_j\sigma/q \in \mathbf{N} \end{cases} \quad j = 1, \dots, n$$

$$t(\sigma) = \begin{cases} [\sigma] & \text{se } [\sigma] < \sigma \\ \sigma - 1 & \text{se } \sigma \in \mathbf{N} \end{cases}$$

ed inoltre $C_1 \in \mathbf{R}^+$ è indipendente da u e da φ , mentre $C_2(\varphi) \in \mathbf{R}^+$ è indi-

pendente da u e dipende da φ in maniera che $C_2(\varphi)$ varia in un limitato di $\mathbf{R}^+$ se φ varia in un limitato di $\mathcal{C}_0^{l,u}(\bar{\Omega}_+)$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si ottiene valutando φu secondo una norma equivalente a quella della Def. 4. Precisamente ricordiamo (vedi [15] per una dimostrazione) che su $\mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$ la norma:

$\|u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+)\|$, $\sigma \in \mathbf{R}^+$, è equivalente alla norma:

$$(21) \quad \begin{aligned} \|u; H^{\frac{p}{q}\sigma', \sigma'}(\Omega_+)\|' = & \|u; L^2(\Omega_+)\| + \sum_{j=1}^n \sum_{h \leq [p_j\sigma/q]} \|D_{x_j}^h u; \\ & L^2(\Omega_+)\| + \sum_{h \leq [\sigma]} \|D_y^h u; L^2(\Omega_+)\| + \\ & + \sum_{j=1}^n \sum_{h \leq [p_j\sigma/q]} \|\Delta_{x_j, \rho_j; t} D_{x_j}^h u; L^2(\Omega_+ \times \mathbf{R}_t)\| \theta(\rho_j) + \\ & + \sum_{h \leq [\sigma]} \|\Delta_{y, \rho; t} D_y^h u; L^2(\Omega_+ \times \mathbf{R}_t^+)\| \theta(\rho). \end{aligned}$$

Dove $\rho_j = p_j\sigma/q - [p_j\sigma/q]$, $j = 1, 2, \dots, n$; $\rho = \sigma - [\sigma]$ e

$$\Delta_{x_j, \rho_j; t} \psi = [\psi(x + te^j, y) - \psi(x, y)] / |t|^{\frac{1}{2} + \rho_j}$$

$$\Delta_{y, \rho; t} \psi = [\psi(x + te^i, y) - \psi(x, y)] / |t|^{\frac{1}{2} + \rho}$$

ed infine

$$\theta(\rho_j) = \begin{cases} 1, & \rho_j > 0 \\ 0, & \rho_j = 0 \end{cases}, \quad \theta(\rho) = \begin{cases} 1 & \rho > 0 \\ 0 & \rho = 0. \end{cases}$$

È pertanto sufficiente valutare $\|\varphi u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+)\|'$. Si ha:

$$\|\varphi u; L^2(\Omega_+)\| \leq \sup_{\bar{\Omega}_+} |\varphi| \|u; L^2(\Omega_+)\|;$$

$$\|D_{x_j}^h(\varphi u); L^2(\Omega_+)\| \leq \sup_{\bar{\Omega}_+} |\varphi| \|D_{x_j}^h u; L^2(\Omega_+)\| +$$

$$+ C_{h,j} \sum_{r+s=h, s < h} \sup_{\bar{\Omega}_+} |D_{x_j}^r \varphi| \|D_{x_j}^s u; L^2(\Omega_+)\|$$

per $1 \leq h \leq [p_j\sigma/q]$, $j = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} \| D_y^h(\varphi u); L^2(\Omega_+) \| &\leq \sup_{\bar{\Omega}_+} | \varphi | \| D_y^h u; L^2(\Omega_+) \| + \\ &+ C'_h \sum_{r+s=h, s < h} \sup_{\bar{\Omega}_+} | D_y^r \varphi | \| D_y^s u; L^2(\Omega_+) \| \end{aligned}$$

per $1 \leq h \leq [\sigma]$. Le costanti $C_{h,j}$, C'_h non dipendono nè da u nè da φ . Sia ora $\rho_j \neq 0$; valutiamo ad esempio:

$$\| \Delta_{x_j, \rho_j; i} D_{x_j}^{\nu_j}(\varphi u); L^2(\Omega_+ \times \mathbf{R}_t) \|$$

dove si è posto $\nu_j = [p, \sigma / q]$. Si ha:

$$\begin{aligned} \| \Delta_{x_j, \rho_j; i} D_{x_j}^{\nu_j}(\varphi u); L^2(\Omega_+ \times \mathbf{R}_t) \| &\leq \| \{ [\varphi(x + te^i, y) - \varphi(x, y)] D_{x_j}^{\nu_j} u(x + te^i, y) + \\ &+ [D_{x_j}^{\nu_j} u(x + te^i, y) - D_{x_j}^{\nu_j} u(x, y)] \varphi(x, y) \} | t |^{-1/2 - \rho_j}; L^2(\Omega_+ \times \mathbf{R}_t) \| + \\ &+ C_{\nu_j} \sum_{\substack{h+k=\nu_j \\ k < \nu_j}} \| \{ [D_{x_j}^h \varphi(x + te^i, y) - D_{x_j}^h \varphi(x, y)] D_{x_j}^k u(x + te^i, y) + \\ &+ [D_{x_j}^k u(x + te^i, y) - D_{x_j}^k u(x, y)] \cdot D_{x_j}^h \varphi(x, y) \} | t |^{-1/2 - \rho_j}; L^2(\Omega_+ \times \mathbf{R}_t) \| \leq \\ &\leq \sup_{\bar{\Omega}_+} | \varphi | \| \Delta_{x_j, \rho_j; i} D_{x_j}^{\nu_j} u; L^2(\Omega_+ \times \mathbf{R}_t) \| + \\ &+ \| [\varphi(x + te^i, y) - \varphi(x, y)] D_{x_j}^{\nu_j} u(x + te^i, y) | t |^{-1/2 - \rho_j}; L^2(\Omega_+ \times \mathbf{R}_t) \| + \\ &+ C_{\nu_j} \sum_{\substack{h+k=\nu_j \\ k < \nu_j}} \{ \sup_{\bar{\Omega}_+} | D_{x_j}^h \varphi | \| \Delta_{x_j, \rho_j; i} D_{x_j}^k u; L^2(\Omega_+ \times \mathbf{R}_t) \| + \\ &+ \| [D_{x_j}^h \varphi(x + te^i, y) - D_{x_j}^h \varphi(x, y)] D_{x_j}^k u(x + \\ &+ te^i, y) | t |^{-1/2 - \rho_j}; L^2(\Omega_+ \times \mathbf{R}_t) \| \}. \end{aligned}$$

Sia ora $0 \leq h < \nu_j$; si ha:

$$| D_{x_j}^h \varphi(x + te^i, y) - D_{x_j}^h \varphi(x, y) | = | D_{x_j}^{h+1} \varphi(x + \vartheta te^i, y) | | t |, \quad \vartheta \in]0, 1[$$

e quindi:

$$| D_{x_j}^h \varphi(x + te^i, y) - D_{x_j}^h \varphi(x, y) | \leq \sup_{\bar{\Omega}_+} | D_{x_j}^{h+1} \varphi | | t |^{l_j - [l_j]}$$

se $| t | \leq 1$ e poichè:

$$| t |^{l_j - [l_j]} = | t |^{l_j - [l_j]} \frac{1}{1 + | t |^{l_j - [l_j]}} (1 + | t |^{l_j - [l_j]})$$

si avrà:

$$|D_{x_j}^h \varphi(x + te^j, y) - D_{x_j}^h \varphi(x, y)| \leq 2 \sup_{\bar{\Omega}_+} |D_{x_j}^{h+1} \varphi| \frac{|t|^{l_j - [l_j]}}{1 + |t|^{l_j - [l_j]}}$$

se $|t| \leq 1$. Se invece $|t| \geq 1$, $1 + \frac{1}{|t|^{l_j - [l_j]}} \leq 2$ e quindi:

$$|D_{x_j}^h \varphi(x + te^j, y) - D_{x_j}^h \varphi(x, y)| \leq 2 \sup_{\bar{\Omega}_+} |D_{x_j}^h \varphi| \leq 4 \sup_{\bar{\Omega}_+} |D_{x_j}^h \varphi| \frac{|t|^{l_j - [l_j]}}{1 + |t|^{l_j - [l_j]}} \quad |t| \geq 1.$$

In conclusione:

$$|D_{x_j}^h \varphi(x + te^j, y) - D_{x_j}^h \varphi(x, y)| \leq 4 \left(\sup_{\bar{\Omega}_+} |D_{x_j}^h \varphi| + \sup_{\bar{\Omega}_+} |D_{x_j}^{h+1} \varphi| \right) \frac{|t|^{l_j - [l_j]}}{1 + |t|^{l_j - [l_j]}}$$

$\forall t \in \mathbf{R}, \forall (x, y) \in \bar{\Omega}_+.$

Quindi per $h + k = \nu_j, 0 \leq k \leq \nu_j, 0 \leq h < \nu_j$:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega_+} |D_{x_j}^h \varphi(x + te^j, y) - D_{x_j}^h \varphi(x, y)|^2 |D_{x_j}^k u(x + te^j, y)|^2 |t|^{-1-2\nu_j} dx dy dt = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega_+} |D_{x_j}^h \varphi(z, y) - D_{x_j}^h \varphi(x, y)|^2 |D_{x_j}^k u(z, y)|^2 |z - x|^{-1-2\nu_j} dx dy dz \leq \\ & \leq 16 \left(\sup_{\bar{\Omega}_+} |D_{x_j}^h \varphi| + \sup_{\bar{\Omega}_+} |D_{x_j}^{h+1} \varphi| \right)^2 \int_{\Omega_+} |D_{x_j}^k u(z, y)|^2 dz \\ & \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + |z - x|^{l_j - [l_j]})^2 |z - x|^{1+2(\nu_j + [l_j] - l_j)}} dx \right) dy = \\ & = C \left(\sup_{\bar{\Omega}_+} |D_{x_j}^h \varphi| + \sup_{\bar{\Omega}_+} |D_{x_j}^{h+1} \varphi| \right)^2 \|D_{x_j}^k u; L^2(\Omega_+)\|^2. \end{aligned}$$

Se $h = \nu_j$, quindi $k = 0$, con un ragionamento del tipo già fatto si ha:

$$|D_{x_j}^{\nu_j} \varphi(z, y) - D_{x_j}^{\nu_j} \varphi(x, y)| \leq 4 \left(\sup_{\bar{\Omega}_+} |D_{x_j}^{\nu_j} \varphi| + k \right) \frac{|z - x|^{l_j - [l_j]}}{1 + |z - x|^{l_j - [l_j]}},$$

$$\forall (x, y), (z, y) \in \bar{\Omega}_+,$$

$k \in \mathbf{R}^+$ opportuno.

Perciò:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega_+} |D_{x_j}^{\nu_j} \varphi(z, y) - D_{x_j}^{\nu_j} \varphi(x, y)|^2 |u(z, y)|^2 |z - x|^{-1-2\rho_j} dx dy dz \leq \\ \leq C \left(\sup_{\bar{\Omega}_+} |D_{x_j}^{\nu_j} \varphi| + k \right)^2 \|u\|_{L^2(\Omega_+)}^2. \end{aligned}$$

Concludendo, se $\rho_j \neq 0$:

$$\begin{aligned} & \| \Delta_{x_j, \rho_j; t} D_{x_j}^{\nu_j}(\varphi u); L^2(\Omega_+ \times \mathbf{R}_t) \| \leq \\ & \leq \sup_{\bar{\Omega}_+} |\varphi| \| \Delta_{x_j, \rho_j; t} D_{x_j}^{\nu_j} u; L^2(\Omega_+ \times \mathbf{R}_t) \| + \\ & + C_{j, \nu_j}(\varphi) \sum_k^{\nu_j} \| D_{x_j}^k u; L^2(\Omega_+) \|. \end{aligned}$$

Le costanti $C_{j, \nu}(\varphi)$, $j=1, \dots, n$ variano in un limitato di $\mathbf{R}^+$ se φ varia in un limitato di $\mathcal{C}_0^{\nu}(\bar{\Omega}_+)$. Analogamente (e più semplicemente) si valutano

$$\| \Delta_{x_j, \rho_j; t} D_{x_j}^h(\varphi u); L^2(\Omega_+ \times \mathbf{R}_t) \|$$

per $h < \nu_j$ e $j=1, \dots, n$.

Infine se $\rho = \sigma - [\sigma] \neq 0$, procedendo come sopra, si ottiene:

$$\begin{aligned} & \| \Delta_{y, \rho; t} D_y^{[\sigma]}(\varphi u); L^2(\Omega_+ \times \mathbf{R}_t^+) \| \leq \\ & \leq \sup_{\bar{\Omega}_+} |\varphi| \| \Delta_{y, \rho; t} D_y^{[\sigma]} u; L^2(\Omega_+ \times \mathbf{R}_t^+) \| + C(\varphi) \sum_{k=0}^{[\sigma]} \| D_y^k u; L^2(\Omega_+) \| \end{aligned}$$

dove $C(\varphi)$ può farsi variare in un limitato di $\mathbf{R}^+$ se φ varia in un limitato di $\mathcal{C}_0^{\nu}(\bar{\Omega}_+)$.

Valutazioni analoghe si hanno per

$$\| \Delta_{y, \rho; t} D_y^h(\varphi u); L^2(\Omega_+ \times \mathbf{R}_t^+) \|$$

se $h < [\sigma]$. L'asserto è quindi dimostrato.

c.v.d.

Applicando la disuguaglianza interpolatoria (Prelim. C) si ottiene il:

COROLLARIO 1. Se $\varphi \in \mathcal{C}_0^{l,\mu}(\bar{\Omega}_+)$ ed $u \in H^{\frac{p}{q}\sigma,\sigma}(\Omega_+)$ ed inoltre (l, μ) è accettabile rispetto a $\left(\frac{p}{q}\sigma, \sigma\right)$, allora $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^+$:

$$\begin{aligned} \|\varphi u; H^{\frac{p}{q}\sigma,\sigma}(\Omega_+)\| &\leq C_1(\varphi; \varepsilon) \|u; H^{\frac{p}{q}\sigma,\sigma}(\Omega_+)\| + \\ &+ C_2(\varphi; \varepsilon) \|u; L^2(\Omega_+)\| \end{aligned}$$

dove $C_1(\varphi; \varepsilon) \rightarrow 0$ se φ varia in un limitato di $\mathcal{C}_0^{l,\mu}(\bar{\Omega}_+)$ e $\sup_{\bar{\Omega}_+} |\varphi| \rightarrow 0$ ed inoltre $\varepsilon \downarrow 0$, mentre $C_2(\varphi; \varepsilon)$ varia in un limitato di $\mathbf{R}^+$ se φ varia in un limitato di $\mathcal{C}_0^{l,\mu}(\bar{\Omega}_+)$ ed ε in un limitato di $\mathbf{R}^+$.

Veniamo ora alle valutazioni a priori nel caso dei coefficienti variabili. Si consideri l'operatore differenziale:

$$\begin{aligned} (22) \quad A(x, y; D_x, D_y) &= \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q \leq 1} a_{\alpha h}(x, y) D_x^\alpha D_y^h = \\ &= \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q = 1} a_{\alpha h}(x, y) D_x^\alpha D_y^h + \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q < 1} a_{\alpha h}(x, y) D_x^\alpha D_y^h = \\ &= A_0(x, y; D_x, D_y) + A_1(x, y; D_x, D_y) \end{aligned}$$

dove le $a_{\alpha h}$ sono funzioni definite su $\bar{\Omega}_+$ a valori complessi.

DEFINIZIONE 7. L'operatore A , definito in (22), si dice propriamente quasi-ellittico di tipo m su $\bar{\Omega}_+$ se e solo se:

- i) $(x, y) \in \bar{\Omega}_+, (\xi, \eta) \in \mathbf{R}^{n+1}, |\xi|^2 + \eta^2 > 0 \Rightarrow A_0(x, y; i\xi, i\eta) \neq 0$;
- ii) $\forall (x, y) \in \bar{\Omega}_+ \text{ e } \forall \xi \in \mathbf{R}^n - \{0\} \text{ il polinomio } A_0(x, y; i\xi, \lambda) \text{ ha } m \text{ (} m \in \mathbf{N} \text{) radici a parte reale } < 0 \text{ e } q - m \text{ a parte reale } > 0$.

OSSERVAZIONE. Se ammettiamo che i coefficienti di A_0 siano funzioni continue di (x, y) , dal teorema dell'indicatore logaritmico si deduce che il numero $N^-(\xi, (x, y))$ (e quindi $N^+(\xi, (x, y))$) delle radici di $A_0(x, y; i\xi, \lambda)$ a parte reale negativa (positiva) è una funzione continua su $(\mathbf{R}^n - \{0\}) \times \bar{\Omega}_+$ e quindi tale numero è costante se $n > 1$; perciò, in tal caso, se l'operatore $A_0(x, y; D_x, D_y)$, calcolato per un (x, y) fissato, è propriamente quasi-ellittico di tipo m secondo la Def. 1, allora esso lo è su $\bar{\Omega}_+$. Si osservi ancora che, sempre nell'ipotesi che i coefficienti

di A_0 siano continui in $\overline{\Omega}_+$, la i) della Def. 7 equivale ad ammettere che per ogni compatto $K \subset \overline{\Omega}_+ \exists C_k \in \mathbf{R}^+$ tale che $\forall (x, y) \in K, \forall (\xi, \eta) \in \mathbf{R}^{n+1}$ si abbia:

$$(2)' \quad C_k^{-1}(\Sigma |\xi_j|^{p_j} + |\eta|^q) \leq |A_0(x, y; i\xi, i\eta)| \leq C_k(\Sigma |\xi_j|^{p_j} + |\eta|^q)$$

(per la prova si veda l'osservazione della Def. 1). Consideriamo ora una famiglia di operatori differenziali: $\{B_j(x, y; D_x, D_y)\}_{j=0}^{m-1}$ con:

$$\begin{aligned} (23) \quad B_j(x, y; D_x, D_y) &= \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q \leq \mu_j/q} b_{ah,j}(x, y) D_x^\alpha D_y^h = \\ &= \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q = \mu_j/q} b_{ah,j}(x, y) D_x^\alpha D_y^h + \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q < \mu_j/q} b_{ah,j} D_x^\alpha D_y^h = \\ &= B_j^0(x, y; D_x, D_y) + B'_j(x, y; D_x, D_y) \end{aligned}$$

essendo le $b_{ah,j}$ funzioni definite su $\overline{\Omega}_+$ ed a valori complessi.

DEFINIZIONE 8. Sia A , definito da (22), propriamente quasi-ellittico di tipo m su Ω_+ ; diremo che il sistema $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ ricopre A su $\partial\Omega_+$ se e solo se $\forall x \in \mathbf{R}^n$, il sistema di operatori differenziali a coefficienti costanti $\{B_j^0(x, 0; D_x, D_y)\}_{j=0}^{m-1}$ ricopre l'operatore $A_0(x, 0; D_x, D_y)$ secondo la Def. 2.

OSSERVAZIONE. Se supponiamo che i coefficienti dei B_j^0 siano continui su $\partial\Omega_+$ allora l'insieme degli $x \in \mathbf{R}^n$ per i quali il sistema $\{B_j^0(x, 0; D_x, D_y)\}_{j=0}^{m-1}$ ricopre $A_0(x, 0; D_x, D_y)$ è un aperto di $\mathbf{R}^n$.

Nel seguito supporremo che A sia propriamente quasi-ellittico di tipo m su Ω_+ e che gli operatori $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ ricoprano A su $\partial\Omega_+$. Sia s il minimo intero non negativo tale che $\sigma_0 = (s+1)q > \max_j \mu_j$ e sia $\sigma \in \mathbf{R}^+$, $\sigma \geq \sigma_0$, σ fissato. Sia poi $(l(\sigma), \mu(\sigma))$ un multindice accettabile (Def. 5) sia rispetto a $\left(\frac{p}{q}(\sigma - q), \sigma - q\right)$ che rispetto a $\left(\frac{q}{p}(\sigma - \mu_j), \sigma - \mu_j\right)$ $j=0, 1, \dots, m-1$.

Sussiste la:

PROPOSIZIONE 4. Se i coefficienti di A sono in $\mathcal{C}^{l(\sigma), \mu(\sigma)}(\overline{\Omega}_+)$ ed i coefficienti dei B_j sono pure in $\mathcal{C}^{l(\sigma), \mu(\sigma)}(\overline{\Omega}_+)$, allora $\exists \delta \in \mathbf{R}^+$ tale che

$\forall u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$ con $\text{supp}(u) \subset [-\delta, \delta]^n \times [0, \delta] = J_\delta$, si ha:

$$(24) \quad \begin{aligned} \| u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+) \| \leq C \{ & \| Au; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+) \| + \\ & + \sum_0^{m-1} \| \gamma_0 B_j u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \| + \| u; L^2(\Omega_+) \| \} \end{aligned}$$

essendo C una costante opportuna (dipendente da δ , ma non da u).

DIMOSTRAZIONE. Sia $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$, $\text{supp}(u) \subset J_\delta$ e sia $\omega \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$, $0 \leq \omega(x) \leq 1$, $\forall x$, con $\omega \equiv 1$ su $J_{2\delta}$ e $\text{supp}(\omega) \subset J_{3\delta}$. Allora $Au = \omega Au$ e $B_j u = \omega B_j u$ ($j=0, \dots, m-1$) su $\mathfrak{D}'(\Omega_+)$. Poniamo $\zeta = (x, y)$ e $D_\zeta = D_x D_y$; allora, per la Prop. 3, si ottiene:

$$(25) \quad \begin{aligned} \| u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+) \| \leq C \{ & \| A(0, D_\zeta)u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+) \| + \\ & + \sum_0^{m-1} \| \gamma_0 B_j(0, D_\zeta)u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \| + \| u; L^2(\Omega_+) \| \}. \end{aligned}$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned} A(0, D_\zeta) &= A(\zeta, D_\zeta) + [A_0(0, D_\zeta) - A_0(\zeta, D_\zeta)] + \\ &+ [A_1(0, D_\zeta) - A_1(\zeta, D_\zeta)] = A(\zeta, D_\zeta) + L(\zeta, D_\zeta) + M(\zeta, D_\zeta) \end{aligned}$$

e:

$$B_j(0, D_\zeta) = B_j(\zeta, D_\zeta) + L_j(\zeta, D_\zeta) + M_j(\zeta, D_\zeta),$$

$j=0, \dots, m-1$

con ovvio significato di L_j ed M_j . Valutiamo $L(\zeta, D_\zeta)u$ in $H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+)$; si ha $Lu = \omega Lu$ e quindi:

$$\| \omega Lu; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+) \| \leq \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q=1} \| c_{\alpha h} D_\zeta^{\alpha, h} u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+) \|$$

dove si è posto $c_{\alpha h}(\zeta) = \omega(\zeta)[a_{\alpha h}(0) - a_{\alpha h}(\zeta)]$.

Poiché $c_{\alpha h} \in \mathcal{C}_0^{l(\sigma), \mu(\sigma)}(\bar{\Omega}_+)$, applicando il corollario 1, $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^+$, si ha:

$$\begin{aligned} \| c_{\alpha h} D_x^\alpha D_y^h u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+) \| \leq C_1(c_{\alpha h}; \varepsilon) \| D_x^\alpha D_y^h u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+) \| + \\ + C_2(c_{\alpha h}; \varepsilon) \| D_x^\alpha D_y^h u; L^2(\Omega_+) \| \end{aligned}$$

Applicando nuovamente la disuguaglianza interpolatoria C dei Preliminari si ha per $\sigma > q$:

$$\| c_{ah} D_x^a D_y^h u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+) \| \leq C'_1(c_{ah}; \varepsilon) \| u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+) \| + \\ + C'_2(c_{ah}; \varepsilon) \| u; L^2(\Omega_+) \|$$

dove $C'_1(c_{ah}; \varepsilon) \rightarrow 0$ se $\varepsilon \downarrow 0$ e se, variando c_{ah} in un limitato di $\mathcal{C}_0^{l(\sigma), \mu(\sigma)}(\bar{\Omega}_+)$ si ha $\sup_{\bar{\Omega}_+} |c_{ah}| \rightarrow 0$, mentre $C'_1(c_{ah}; \varepsilon)$ varia in un limitato di $\mathbf{R}^+$ se $\varepsilon \downarrow 0$ e se c_{ah} varia in un limitato di $\mathcal{C}_0^{l(\sigma), \mu(\sigma)}(\bar{\Omega}_+)$. Per $\sigma = q$ si ha:

$$\| c_{ah} D_x^a D_y^h u; L^2(\Omega_+) \| \leq C'_1(c_{ah}) \| u; H^{p, q}(\Omega_+) \|$$

dove $C'_1(c_{ah}) \rightarrow 0$ per $\delta \downarrow 0$. In conclusione, $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^+$, si ha:

$$(26) \quad \| L(\zeta, D_\zeta)u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+) \| \leq C_1(\varepsilon; L) \| u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+) \| + \\ + C_2(\varepsilon; L) \| u; L^2(\Omega_+) \|$$

dove $C_1(\varepsilon; L) \rightarrow 0$ se $\varepsilon \downarrow 0$ e $\delta \downarrow 0$, mentre $C_2(\varepsilon; L)$ varia in un limitato di $\mathbf{R}^+$ se $\varepsilon \downarrow 0$ e $\delta \downarrow 0$. In modo del tutto analogo si trova che:

$$(27) \quad \| M(\zeta, D_\zeta)u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+) \| \leq D_1(\varepsilon; M) \| u; H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+) \| + \\ + D_2(\varepsilon; M) \| u; L^2(\Omega_+) \|$$

dove $D_1(\varepsilon; M) \rightarrow 0$ se $\varepsilon \downarrow 0$ e $\delta \downarrow 0$, mentre $D_2(\varepsilon; M)$ è superiormente limitato se $\varepsilon \downarrow 0$ e $\delta \downarrow 0$. Valutiamo ora $\gamma_0 L_j(\zeta, D_\zeta)u$ in $H^{\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+)$. Si ha $\gamma_0 L_j(\zeta, D_\zeta)u = \gamma_0 \omega L_j(\zeta, D_\zeta)u$ e quindi per il teorema di tracce citato in B (Prelim.):

$$\| \gamma_0 \omega L_j u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \| \leq C \| \omega L_j u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j), \sigma-\mu_j}(\Omega_+) \|$$

ed ora:

$$\| \omega L_j u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j), \sigma-\mu_j}(\Omega_+) \| \leq$$

$$\leq \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q = \mu_j/q} \| d_{ah, j} D_{\xi}^{\alpha, h} u; H^{\frac{p}{q}(\sigma - \mu_j), \sigma - \mu_j}(\Omega_+) \|$$

dove

$$d_{ah, j}(\zeta) = \omega(\zeta) [b_{ah, j}(0) - b_{ah, j}(\zeta)].$$

Poichè $d_{ah, j} \in \mathcal{C}_0^{l(\sigma), \mu(\sigma)}(\bar{\Omega}_+)$, con ragionamenti analoghi a quelli fatti sopra si prova che, $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^+$:

$$(28) \quad \begin{aligned} \| \gamma_0 L_j u; H^{\frac{a}{q}(\sigma - \mu_j - 1/2)}(\partial\Omega_+) \| &\leq C_{1, j}(\varepsilon; L_j) \| u; H^{\frac{p}{q} \sigma, \sigma}(\Omega_+) \| + \\ &+ C_{2, j}(\varepsilon; L_j) \| u; L^2(\Omega_+) \|, \end{aligned} \quad j=0, 1, \dots, m-1$$

dove $C_{1, j}(\varepsilon; L_j) \rightarrow 0$ se $\varepsilon \downarrow 0$ e $\delta \downarrow 0$, mentre $C_{2, j}(\varepsilon; L_j)$ è superiormente limitata per $\varepsilon \downarrow 0$ e $\delta \downarrow 0$ e ciò per $j=0, \dots, m-1$. In maniera analoga:

$$(29) \quad \begin{aligned} \| \gamma_0 M_j u; H^{\frac{p}{q}(\sigma - \mu_j - 1/2)}(\partial\Omega_+) \| &\leq D_{1, j}(\varepsilon; M_j) \| u; H^{\frac{p}{q} \sigma, \sigma}(\Omega_+) \| + \\ &+ D_{2, j}(\varepsilon; M_j) \| u; L^2(\Omega_+) \|, \end{aligned} \quad j=0, 1, \dots, m-1$$

Stesse osservazioni per le $D_{1, j}(\varepsilon; M_j)$ e $D_{2, j}(\varepsilon; M_j)$.

Tenendo conto della (26), della (27) e delle (28) e (29), dalla (25), per δ sufficientemente piccolo ed ε conveniente, si ottiene la (24). c.v.d.

OSSERVAZIONE. Sia $(\nu, \tau) = (\nu_1, \dots, \nu_n, \tau) \in (\mathbf{R}^+)^{n+1}$; indichiamo con $\mathcal{A}^{\nu, \tau}(\Omega_+)$ lo spazio delle applicazioni $\varphi : \bar{\Omega}_+ \rightarrow \mathbf{C}$ tali che:

1) $D_{x_j}^h \varphi \in L^\infty(\Omega_+)$ e $\| \Delta_{x_j, \nu_j - [\nu_j]; t} D_{x_j}^h \varphi; L^2(\mathbf{R}_t) \| \in L^\infty(\Omega_+)$,
per $0 \leq h \leq [\nu_j]$; $j=1, \dots, n$.

2) $D_y^h \varphi \in L^\infty(\Omega_+)$ e $\| \Delta_{y, \tau - [\tau]; t} D_y^h \varphi; L^2(\mathbf{R}_t^+) \| \in L^\infty(\Omega_+)$
per $0 \leq h \leq [\tau]$.

Su $\mathcal{A}^{\nu, \tau}(\Omega_+)$ si pone la norma naturale:

$$\begin{aligned} \| \varphi; \mathcal{A}^{\nu, \tau}(\Omega_+) \| &= \sum_{j \leq n; h \leq [\nu_j]} \{ \| D_{x_j}^h \varphi; L^\infty(\Omega_+) \| + \\ &+ \| \Delta_{x_j, \nu_j - [\nu_j]; t} D_{x_j}^h \varphi; L^2(\mathbf{R}_t) \|; L^\infty(\Omega_+) \| \} + \\ &+ \sum_{h \leq [\tau]} \{ \| D_y^h \varphi; L^\infty(\Omega_+) \| + \| \Delta_{y, \tau - [\tau]; t} D_y^h \varphi; L^2(\mathbf{R}_t^+) \|; L^\infty(\Omega_+) \| \} \end{aligned}$$

$\mathfrak{A}^{\nu, \tau}(\Omega_+)$ risulta un'algebra di Banach e l'applicazione $(u, \varphi) \rightarrow \varphi u$ è continua da $H^{\frac{p}{q}, \sigma}(\Omega_+) \times \mathfrak{A}^{\frac{p}{q}, \sigma}(\Omega_+)$ a $H^{\frac{p}{q}, \sigma}(\Omega_+)$ (vedi [15]). Inoltre se $(l(\sigma), \mu(\sigma))$ è un multiindice accettabile rispetto a $\left(\frac{p}{q}, \sigma, \sigma\right)$ allora $\mathfrak{O}_0^{l(\sigma), \mu(\sigma)}(\Omega_+)$ è immerso in $\mathfrak{A}^{\frac{p}{q}, \sigma}(\Omega_+)$. Ciò premesso, se supponiamo che nell'operatore A , definito da (22), si abbia:

$$\begin{cases} a_{ah} \in \mathfrak{O}^{l(\sigma), \mu(\sigma)}(\bar{\Omega}_+) & \text{se } \langle \alpha, 1/p \rangle + h/q = 1 \\ a_{ah} \in \mathfrak{A}^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+) & \text{se } \langle \alpha, 1/p \rangle + h/q < 1 \end{cases}$$

e, negli operatori B_j , definiti da (23), si abbia:

$$\begin{cases} b_{ah, j} \in \mathfrak{O}^{l(\sigma), \mu(\sigma)}(\bar{\Omega}_+) & \text{se } \langle \alpha, 1/p \rangle + h/q = \mu_j/q \\ b_{ah, j} \in \mathfrak{A}^{\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j), \sigma-\mu_j}(\Omega_+) & \text{se } \langle \alpha, 1/q \rangle + h/q < \mu_j/q \end{cases}, \quad j=0, 1, \dots, m-1$$

essendo $(l(\sigma), \mu(\sigma))$ un multiindice accettabile sia per $\left(\frac{p}{q}, \sigma, \sigma\right)$ che per $\left(\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j), \sigma-\mu_j\right)$ ($j=0, \dots, m-1$) ed infine che sia $\sigma \geq \sigma_0$, allora la tesi della proposizione 4 è ancora valida. È chiaro che per provarlo è sufficiente valutare

$$Mu \text{ in } H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+) \text{ e } \gamma_0 M_j u \text{ in } H^{\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j-1/2)}$$

per $j=0, \dots, m-1$ (vedi le notazioni usate nella prova della Prop. 4). Ora esistono $\delta \in]0, \sigma]$ e $\delta_j \in]0, \sigma]$ $\forall j$, tali che:

$$\|Mu; H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+)\| \leq C \|u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\delta), \sigma-\delta}(\Omega_+)\|$$

$$\|M_j u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j), \sigma-\mu_j}(\Omega_+)\| \leq C_j \|u; H^{\frac{p}{q}(\sigma-\delta_j), \sigma-\delta_j}(\Omega_+)\|$$

essendo C e C_j costanti opportune indipendenti da $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$ (in effetti

le ipotesi fatte sui coefficienti assicurano che:

$$M : H^{\frac{p}{q}, \sigma}(\Omega_+) \rightarrow H^{\frac{p}{q}, (\sigma-q+\delta), \sigma-q+\delta}(\Omega_+)$$

$$M_j : H^{\frac{p}{q}, \sigma}(\Omega_+) \rightarrow H^{\frac{p}{q}, (\sigma-\mu_j+\delta_j), \sigma-\mu_j+\delta_j}(\Omega_+), \quad j=0, 1, \dots, m-1$$

con continuità). Basta allora ricorrere alla solita disuguaglianza interpolatoria (Prelim. C) per ottenere l'asserto. c.v.d.

2. Regolarizzazione nel semispazio.

Studiamo in questo numero la regolarizzazione locale di una soluzione di un problema ai limiti quasi-ellittico in un semispazio. Il procedimento è quello consueto in questi casi. Si regolarizzano dapprima le derivate tangenziali e poi quelle normali. Nel nostro caso, data la dissimetria delle variabili, è opportuno regolarizzare dapprima certe tangenziali di ordine frazionario.

DEFINIZIONE 9. Sia $\rho \in \mathbf{R}$, poniamo:

$$K^\rho(\mathbf{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \mid \mathcal{F}_\xi^{-1}(t^{\rho/2}(\xi)\widehat{f}(\xi)) \in L^2(\mathbf{R}^n)\}$$

dove:

$$t^{\rho/2}(\xi) = \sum_1^n (1 + \xi_j^2)^{\rho/2q}.$$

La norma su K^ρ è:

$$(30) \quad f \mapsto \|f; K^\rho(\mathbf{R}^n)\| = \|t^{\rho/2}(\xi)\widehat{f}(\xi); L^2(\mathbf{R}^n)\|.$$

Consideriamo poi $L^2(\mathbf{R}^+, K^\rho) = L^2(\mathbf{R}^+, K^\rho)$, normato come segue:

$$(30)' \quad u \mapsto \|u; L^2(\mathbf{R}^+, K^\rho)\| = \|\mathcal{F}_\xi^{-1}[t^{\rho/2}(\xi)\widehat{u}(\xi, y)](x); L^2(\Omega_+)\|.$$

È chiaro che $L^2(\mathbf{R}^+, K^\rho)$ con la norma (30)' è uno spazio hilbertiano e $\rho, s \in \mathbf{R}$, $\rho < s \Rightarrow L^2(\mathbf{R}^+, K^s) \hookrightarrow L^2(\mathbf{R}^+, K^\rho)$; inoltre $(L^2(\mathbf{R}^+, K^\rho))'$ (duale di $L^2(\mathbf{R}^+, K^\rho)$) è isomorfo topologicamente ad $L^2(\mathbf{R}^+, K^{-\rho})$. Si

riconosce anche che:

$$\mathfrak{D}(\Omega_+) \hookrightarrow L^2(\mathbf{R}^+, K^\rho) \hookrightarrow \mathfrak{D}'(\Omega_+)$$

(iniezioni continue ad immagine densa). Sia $\rho > 0$ (se $\rho = 0$, $L^2(\mathbf{R}^+, K^0) = L^2(\Omega_+)$), allora: $H^{\frac{p}{2}, \rho}(\Omega_+) \hookrightarrow L^2(\mathbf{R}^+, K^\rho)$ e se $\rho, s \in \mathbf{R}^+$, $\rho < s$, allora $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^+$, $\exists C_\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ tale che:

$$\|u; L^2(\mathbf{R}^+, K^\rho)\| \leq \varepsilon \|u; L^2(\mathbf{R}^+, K^s)\| + C_\varepsilon \|u; L^2(\Omega_+)\|$$

$\forall u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$. Sia $\sigma \in \mathbf{R}$ e consideriamo l'operatore:

$$T^\sigma : \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+) \rightarrow \mathfrak{D}'(\Omega_+)$$

così definito:

$$(T^\sigma \varphi)(x, y) = \mathfrak{F}_\xi^{-1}[t^{\sigma/2}(\xi) \widehat{\varphi}(\xi, y)](x).$$

È immediato riconoscere che

$$T^\sigma : L^2(\mathbf{R}^+, K^\rho) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^+, K^{\rho-\sigma})$$

con continuità. T^σ si dirà un operatore tangenziale di derivazione « frazionaria » d'ordine σ .

Sarà utile la:

PROPOSIZIONE 5. Sia $a \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$, $u \in L^2(\mathbf{R}^+, K^\rho)$ e $\delta \leq \min \frac{q}{p_k}$, allora $au \in L^2(\mathbf{R}^+, K^\rho)$ e:

$$(31) \quad \|au; L^2(\mathbf{R}^+, K^\rho)\| \leq \sup_{\bar{\Omega}_+} |a| \|u; L^2(\mathbf{R}^+, K^\rho)\| + \\ + C_\rho(a) \|u; L^2(\mathbf{R}^+, K^{\rho-\delta})\|$$

dove $C_\rho(a)$ dipende da a ma è indipendente da u .

DIMOSTRAZIONE. Si ha, per $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$, in base alla (30)':

$$\|au; L^2(\mathbf{R}^+, K^\rho)\| = \|\mathfrak{F}_\xi^{-1}[t^{\rho/2}(\xi) \widehat{au}(\xi, y)](x); L^2(\Omega_+)\|.$$

D'altra parte:

$$\widehat{au}(\xi, y) = (2\pi)^{-n} \int \widehat{u}(\xi - \eta, y) \widehat{a}(\eta, y) d\eta,$$

quindi:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_\xi^{-1}[t^{\rho/2}(\xi) \widehat{au}(\xi, y)](x); L^2(\Omega_+)\| &= (2\pi)^{-n/2} \|\widehat{t^{\rho/2}(\xi) \widehat{au}(\xi, y)}; L^2(\Omega_+)\| \leq \\ &\leq (2\pi)^{-n/2} \left(\int (2\pi)^{-2n} \left| \int t^{\rho/2}(\xi - \eta) \widehat{u}(\xi - \eta, y) \widehat{a}(\eta, y) d\eta \right|^2 d\xi dy \right)^{1/2} + \\ &+ (2\pi)^{-n/2} \left(\int (2\pi)^{-2n} \left| \int [t^{\rho/2}(\xi - \eta) - t^{\rho/2}(\xi)] \widehat{u}(\xi - \eta, y) \widehat{a}(\eta, y) d\eta \right|^2 d\xi dy \right)^{1/2} = \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Risulta:

$$I_1 = (2\pi)^{-n/2} \|\widehat{a\mathcal{F}_\xi^{-1}(t^{\rho/2}u)}(\xi, y); L^2(\Omega_+)\| \leq \sup_{\Omega_+} |a| \|u; L^2(\mathbf{R}^+, K^\rho)\|.$$

Ora

$$\begin{aligned} t^{\rho/2}(\xi) - t^{\rho/2}(\xi - \eta) &= t^{\rho/2}(\eta + (\xi - \eta)) - t^{\rho/2}(\xi - \eta) = \\ &= \sum_1^n (D_j t^{\rho/2})(\xi - \eta + \theta\eta) \cdot \eta_j \end{aligned}$$

con $\theta \in]0, 1[$; d'altra parte:

$$(D_j t^{\rho/2})(\xi) = c_j \xi_j (1 + \xi_j^2)^{\frac{p_j \rho}{2q} - 1}$$

e quindi:

$$|D_j t^{\rho/2}(\xi)|^2 \leq C_j^2 (1 + \xi_j^2)^{\frac{p_j}{q} \rho - 1} \leq C_j^2 (1 + \xi_j^2)^{\frac{p_j}{q} (\rho - \delta)}$$

sicchè:

$$|D_j t^{\rho/2}(\xi)| \leq c_j t^{\frac{\rho - \delta}{2}}(\xi).$$

Pertanto:

$$I_2 \leq C \sum_1^n \left(\int_0^{+\infty} \left| \int t^{\frac{\rho - \delta}{2}}(\xi - \eta + \theta\eta) |\eta_j \widehat{u}(\xi - \eta, y) \widehat{a}(\eta, y)| d\eta \right|^2 d\xi dy \right)^{1/2}.$$

Supponiamo, per il momento, di aver provato che:

$$(32) \quad t^{\rho - \delta}(\xi - \eta + \theta\eta) \leq C(|\rho - \delta|, p, q) t^{\rho - \delta}(\xi - \eta) t^{|\rho - \delta|}(\theta\eta)$$

$V(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^{2n}$, $\theta \in]0, 1[$ essendo $C(|\rho - \delta|, p, q)$ una costante positiva indipendente da ξ, η, θ . Allora:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C' \sum_1^n \left(\int \int \left| \int_0^{+\infty} t^{\frac{\rho-\delta}{2}} (\xi - \eta) \left| \widehat{u}(\xi - \eta, y) \right| t^{\frac{|\rho-\delta|}{2}} (\theta \eta) \left| \widehat{D_j a}(\eta, y) \right| d\eta \right|^2 d\xi dy \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C' \left(\sum_1^n \sup_{y \geq 0} \left\| t^{|\rho-\delta|/2} (\xi) \widehat{D_j a}(\xi, y); L^1(\mathbf{R}_\xi^n) \right\| \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left\| t^{(\rho-\delta)/2} (\xi) \widehat{u}(\xi, y); L^2(\Omega_+) \right\|. \end{aligned}$$

Si è fatto uso della disuguaglianza di Hausdorff-Young (vedi [7]). Posto

$$C_p(a) = C' \sum_1^n \sup_{y \geq 0} \left\| t^{|\rho-\delta|/2} (\xi) \widehat{D_j a}(\xi, y); L^1(\mathbf{R}^n) \right\|$$

si ha l'asserto. Resta quindi da provare la (32). Si ha:

$$\begin{aligned} 1 + \xi_j^2 &= 1 + |\xi_j - \eta_j + \eta_j|^2 \leq 1 + (|\xi_j - \eta_j| + |\eta_j|)^2 \\ &\leq 1 + 2|\xi_j - \eta_j|^2 + 2|\eta_j|^2 \leq 2(1 + (\xi_j - \eta_j)^2)(1 + \eta_j^2); \end{aligned}$$

ora, se $\sigma \geq 0$:

$$(1 + \xi_j^2)^{\frac{p_j \sigma}{q}} \leq 2^{\frac{p_j \sigma}{q}} (1 + (\xi_j - \eta_j)^2)^{\frac{p_j \sigma}{q}} (1 + \eta_j^2)^{\frac{p_j \sigma}{q}}$$

e quindi:

$$t^\sigma(\xi) \leq C(p, q, \sigma) t^\sigma(\xi - \eta) t^\sigma(\eta).$$

Se invece $\sigma < 0$, allora:

$$(1 + \xi_j^2)^{\frac{p_j \sigma}{q}} \geq 2^{\frac{p_j \sigma}{q}} (1 + (\xi_j - \eta_j)^2)^{\frac{p_j \sigma}{q}} \cdot (1 + \eta_j^2)^{\frac{p_j \sigma}{q}}$$

e quindi:

$$(1 + \eta_j^2)^{\frac{p_j \sigma}{q}} \leq 2^{\frac{p_j |\sigma|}{q}} (1 + (\xi_j - \eta_j)^2)^{\frac{p_j |\sigma|}{q}} (1 + \xi_j^2)^{\frac{p_j \sigma}{q}}$$

da cui:

$$t^\sigma(\eta) \leq C(p, q, |\sigma|) t^{|\sigma|}(\xi - \eta) t^\sigma(\xi).$$

In conclusione, dato $\sigma \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{C}(p, q, |\sigma|) \in \mathbf{R}^+$ tale che $\forall \xi, \eta \in \mathbf{R}^n$:

$$t^\sigma(\xi) \leq C(p, q, |\sigma|) t^{|\sigma|}(\xi - \eta) t^\sigma(\eta).$$

Di qui:

$$t^\sigma(\xi) = t^\sigma(\eta + (\xi - \eta)) \leq C(p, q, |\sigma|) t^{|\sigma|}(\eta) t^\sigma(\xi - \eta),$$

da cui la (32). La proposizione è così provata

c.v.d.

La proposizione seguente fornisce una valutazione del commutatore dell'operatore T^ρ di derivazione e dell'operatore $a \cdot$ di moltiplicazione per a , essendo $a \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$.

PROPOSIZIONE 6. Sia $\sigma \in \mathbf{R}$ e $\delta \in \mathbf{R}^+$, $\delta \leq \min_k \frac{q}{p_k}$. Se $a \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$, allora $\forall \rho \in \mathbf{R}$:

$$[T^\rho, a \cdot] = T^\rho \circ (a \cdot) - (a \cdot) \circ T^\rho : L^2(\mathbf{R}^+, K^\sigma) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^+, K^{\sigma-\rho+\delta})$$

con continuità.

DIMOSTRAZIONE. Sia $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$, allora:

$$\mathfrak{F}_\xi(T^\rho(au)) = t^{\rho/2}(\xi) \widehat{au}(\xi, y) = (2\pi)^{-n} \int t^{\rho/2}(\xi) \widehat{u}(\xi - \eta, y) \widehat{a}(\eta, y) d\eta$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\xi(aT^\rho(u)) &= (2\pi)^{-n} \widehat{a} * \mathfrak{F}_\xi(T^\rho(u)) = \\ &= (2\pi)^{-n} \int t^{\rho/2}(\xi - \eta) \widehat{u}(\xi - \eta, y) \widehat{a}(\eta, y) d\eta \end{aligned}$$

Quindi, posto $s = \sigma - \rho + \delta$:

$$\begin{aligned} &\| [T^\rho, a \cdot] u; L^2(\mathbf{R}^+, K^s) \| = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \| t^{s/2}(\xi) \mathfrak{F}_\xi([T^\rho, a \cdot] u); L^2(\Omega_+) \| = \\ &= (2\pi)^{-3n/2} \left(\int_0^{+\infty} \int t^s(\xi) \left| \int \left[\sum_{j=1}^n (D_j t^{\rho/2})(\xi - \eta + \theta \eta) \eta_j \right] \widehat{u}(\xi - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \eta, y) \widehat{a}(\eta, y) d\eta \right|^2 d\xi dy \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$\theta \in]0, 1[$. Ragionando come nella prova della Prop. 5 e applicando la

(32):

$$\begin{aligned}
& \| [T^\rho, a \cdot] u; L^2(\mathbf{R}^+, K^s) \| \leq \\
& \leq C \sum_1^n \left(\int_0^{+\infty} \left| \int t^{s/2}(\xi) t^{\frac{\rho-\delta}{2}}(\xi-\eta) \right| \widehat{u}(\xi-\eta, y) \right. \\
& \quad \left. \left| t^{\frac{|\rho-\delta|}{2}}(\eta) \right| D_j \widehat{a}(\eta, y) \right|^2 d\xi dy \Big)^{1/2} \leq \\
& \leq C' \sum_1^n \left(\int_0^{+\infty} \left| \int t^{(s+\rho-\delta)/2}(\xi-\eta) \right| \widehat{u}(\xi-\eta, y) \right. \\
& \quad \left. \left| t^{(|s|+|\rho-\delta|)/2}(\eta) \right| D_j \widehat{a}(\eta, y) \right|^2 d\xi dy \Big)^{1/2} \leq \\
& \leq C'' \sum_1^n \sup_{y \geq 0} \| t^{(|s|+|\rho-\delta|)/2}(\xi) D_j \widehat{a}(\xi, y); L^1(\mathbf{R}_\xi^n) \| \\
& \quad \| \mathcal{F}_\xi^{-1}(t^{s/2}(\xi) \widehat{u}(\xi, y))(x); L^2(\Omega_+) \|.
\end{aligned}$$

Si è fatto ancora uso della disuguglianza di Hausdorff-Young (vedi [7]).
L'asserto è così provato. c.v.d.

OSSERVAZIONE. Si è già visto che $T^\rho : H^{\frac{p}{q}, \sigma}_{\sigma, \sigma}(\Omega_+) \rightarrow H^{\frac{p}{q}(\sigma-\rho), \sigma-\rho}(\Omega_+)$
con continuità se $\sigma \in \mathbf{R}^+$, $\rho \in \mathbf{R}^+$, $\sigma - \rho \geq 0$.
Vale il

COROLLARIO 2. Siano $\sigma \in \mathbf{R}^+$, $\rho \in \mathbf{R}^+$, $\sigma - \rho \geq 0$,

$$0 < \delta \leq \min \left\{ \frac{q}{p_1}, \dots, \frac{p_n}{q}, \rho \right\}.$$

Allora, se $a \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$:

$$[T^\rho, a \cdot] : H^{\frac{p}{q}, \sigma}_{\sigma, \sigma}(\Omega_+) \rightarrow H^{\frac{p}{q}(\sigma-\rho+\delta), \sigma-\rho+\sigma}(\Omega_+)$$

con continuità.

DIMOSTRAZIONE. Poniamoci dapprima in $\mathbf{R}^{n+1}$. Siano $u, a \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$.
Allora, posto $s = \sigma - \rho + \delta$ e ragionando come nella prova della Prop. 6,

si ha:

$$\| [T^p, a \cdot] u; H^{\frac{p}{q}, s, s} \| \leq C \sum_1^n \left(\int_{\mathbf{R}^{n+1}} \left| \int_{\mathbf{R}^{n+1}} (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{p}{q}} + \tau^2)^{s/2} t^{\frac{\rho-\delta}{2}} (\xi - \eta) \cdot \right. \right. \\ \left. \cdot | \widehat{u}(\xi - \eta, \tau - \nu) | t^{\frac{\rho-\delta}{2}} (\theta \eta) | \widehat{D_j a}(\eta, \nu) | d\eta d\nu |^2 d\tau d\xi \right)^{1/2}.$$

Applicando la disuguaglianza:

$$(1 + \langle \xi \rangle^{\frac{p}{q}} + \tau^2)^r \leq C(p, q, |r|) (1 + \langle \xi - \eta \rangle^{\frac{p}{q}} + (\tau - \nu)^2)^r \cdot (1 + \langle \eta \rangle^{\frac{p}{q}} + \nu^2)^{|r|}$$

valida $\forall r \in \mathbf{R}$ (la dimostrazione è analoga a quella della (32)), si ha:

$$\| [T^p, a \cdot] u; H^{\frac{p}{q}, s, s} \| \leq C' \sum_1^n \left(\int_{\mathbf{R}^{n+1}} \left| \int_{\mathbf{R}^{n+1}} (1 + \langle \xi - \eta \rangle^{\frac{p}{q}} + (\tau - \nu)^2)^{s/2} t^{\frac{\rho-\delta}{2}} (\xi - \eta) \cdot \right. \right. \\ \left. \cdot | \widehat{u}(\xi - \eta, \tau - \nu) | t^{\frac{\rho-\delta}{2}} (\eta) (1 + \langle \eta \rangle^{\frac{p}{q}} + \nu^2)^{s/2} | \widehat{D_j a}(\eta, \nu) | d\eta d\nu |^2 d\xi d\tau \right)^{1/2} \leq \\ \leq C'' \left(\sum_1^n \| (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{p}{q}} + \tau^2)^{\frac{s+\rho-\delta}{2}} \widehat{D_j a}(\xi, \tau); L^1(\mathbf{R}^{n+1}) \| \right) \| u; H^{\frac{p}{q}, \sigma, \sigma} \|.$$

Si è fatto ancora uso della disuguaglianza di Hausdorff-Young (vedi [7]). Il corollario è dunque provato in $\mathbf{R}^{n+1}$. Veniamo ora ad Ω_+ ; sia $a \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$ e $\omega \in \mathfrak{D}(\mathbf{R}^{n+1})$, $r_+ \omega = a$ e se $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$ sia $Eu \in C_0^r(\mathbf{R}^{n+1})$ un prolungamento di u per riflessione (r sufficientemente grande). Si ha allora:

$$[T^p, a \cdot] u = r_+ [T^p, \omega \cdot] Eu = r_+ T^p(\omega Eu) - r_+ \omega T^p Eu$$

e quindi l'asserto.

c.v.d.

Proviamo ora la:

PROPOSIZIONE 7. Sia $j \in \mathfrak{D}(\mathbf{R}^n)$, $\text{supp}(j) \subset \{x \mid |x| \leq 1\}$ e $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^+$ si ponga $j_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} j(x/\varepsilon)$. Se $u \in L^2(\Omega_+)$, porremo

$$u_\varepsilon = (u *' j_\varepsilon)(x, y) = \int_{\mathbf{R}^n} u(x - z, y) j_\varepsilon(z) dz.$$

Sia $\delta \in \mathbf{R}^+$, $\delta \leq \min \left\{ \frac{q}{p_1}, \dots, \frac{q}{p_n} \right\}$, $u \in L^2(\mathbf{R}^+, K^{m\delta})$ ($m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$) ed $a \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$, allora:

$$\| (au)_\varepsilon - au_\varepsilon; L^2(\mathbf{R}^+, K^{(m+1)\delta}) \| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \downarrow 0.$$

DIMOSTRAZIONE. La tesi è immediata se $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$. Proviamo che se $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$ esiste un $L \in \mathbf{R}^+$, indipendente da $\varepsilon \in]0, 1[$, tale che:

$$\| (au)_\varepsilon - au_\varepsilon; L^2(\mathbf{R}^+, K^{(m+1)\delta}) \| \leq L \| u; L^2(\mathbf{R}^+, K^{m\delta}) \|.$$

Poichè $\mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$ è denso in $L^2(\mathbf{R}^+, K^{m\delta})$ si avrà pertanto l'asserto.

Si ha:

$$\begin{aligned} (au)_\varepsilon - au_\varepsilon &= \int [a(x-z, y) - a(x, y)] u(x-z, y) j_\varepsilon(z) dz = \\ &= \sum_{0 < |\alpha| < N} \int \frac{D_x^\alpha a(x, y)}{\alpha!} (-z)^\alpha u(x-z, y) j_\varepsilon(z) dz + \\ &\quad + \int R_N(x, z, y) u(x-z, y) j_\varepsilon(z) dz = \\ &= \sum_{0 < |\alpha| < N} \int a_\alpha(x, y) u(x-z, y) \varepsilon^{|\alpha|} j_\varepsilon^\alpha(z) dz + \psi_\varepsilon^N(x, y) \end{aligned}$$

dove si è posto:

$$\begin{aligned} a_\alpha(x, y) &= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} D_x^\alpha a(x, y); \quad j_\varepsilon^\alpha(z) = \varepsilon^{-n} \left(\frac{z}{\varepsilon} \right)^\alpha j \left(\frac{z}{\varepsilon} \right) \quad (j^\alpha = j_1^\alpha) \\ \psi_\varepsilon^N(x, y) &= \int R_N(x, z, y) u(x-z, y) j_\varepsilon(z) dz. \end{aligned}$$

Pertanto:

$$(au)_\varepsilon - au_\varepsilon = \sum_{0 < |\alpha| < N} \varepsilon^{|\alpha|} a_\alpha(x, y) (u *' j_\varepsilon^\alpha)(x, y) + \psi_\varepsilon^N(x, y).$$

Ora, per la Prop. 5:

$$\begin{aligned} &\| \varepsilon^{|\alpha|} a_\alpha(x, y) (u *' j_\varepsilon^\alpha)(x, y); L^2(\mathbf{R}^+, K^{(m+1)\delta}) \| \leq \\ &\leq C_\alpha \| \varepsilon^{|\alpha|} (u *' j_\varepsilon^\alpha)(x, y); L^2(\mathbf{R}^+, K^{(m+1)\delta}) \| = \\ &= (2\pi)^{-n/2} C_\alpha \left(\int_0^{+\infty} \int \varepsilon^{2|\alpha|} t^{(m+1)\delta}(\xi) |\widehat{u}(\xi, y)|^2 |\widehat{j^\alpha}(\varepsilon\xi)|^2 d\xi dy \right)^{1/2} = \\ &= C_\alpha (2\pi)^{-n/2} \left(\int_0^{+\infty} \int t^{m\delta}(\xi) |\widehat{u}(\xi, y)|^2 \varepsilon^{2|\alpha|} t^\delta(\xi) |\widehat{j^\alpha}(\varepsilon\xi)|^2 d\xi dy \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

D'altra parte, poichè $0 < \varepsilon \leq 1$, si ha:

$$\varepsilon^{2|\alpha|} t^{\delta}(\xi) = \varepsilon^{2|\alpha|} \sum_j (1 + \xi_j^2)^{p_j \delta / q} \leq \sum_j \varepsilon^{2p_j \delta / q} (1 + \xi_j^2)^{p_j \delta / q} \leq t^{\delta}(\varepsilon \xi)$$

e giacchè

$$\sup_{\varepsilon, \xi} t^{\delta}(\varepsilon \xi) | \widehat{j^{\alpha}(\varepsilon \xi)} |^2 < + \infty$$

si ha che:

$$\| \varepsilon^{|\alpha|} a_{\alpha}(x, y) (u * j^{\alpha})(x, y); L^2(\mathbf{R}^+, K^{(m+1)\delta}) \| \leq C'(\alpha; j) \| u; L^2(\mathbf{R}^+, K^{m\delta}) \|.$$

Resta da valutare

$$\| \psi_{\varepsilon}^N(x, y); L^2(\mathbf{R}^+, K^{(m+1)\delta}) \|.$$

Sarà:

$$\begin{aligned} & \| \psi_{\varepsilon}^N; L^2(\mathbf{R}^+, K^{(m+1)\delta}) \| \leq \\ & \leq C \{ \| \psi_{\varepsilon}^N; L^2(\Omega_+) \| + \sum_1^n \| D_{x_j}^{\beta_j} \psi_{\varepsilon}^N; L^2(\Omega_+) \| \} \end{aligned}$$

con $\beta_j \in \mathbf{N}$ convenienti (precisamente $\beta_j = p_j r$, r naturale tale che $(m+1)\delta < r q$).

Valutiamo ad esempio $\| D_{x_j}^{\beta_j} \psi_{\varepsilon}^N; L^2(\Omega_+) \|$ (gli altri addendi si valutano in modo analogo). Si ha:

$$D_{x_j}^{\beta_j} \psi_{\varepsilon}^N(x, y) = \sum_{\rho + \sigma = \beta_j} C_{\rho\sigma} \int D_{x_j}^{\rho} R_N(x, z, y) u(x-z, y) D_{z_j}^{\sigma} j_{\varepsilon}(z) dz$$

quindi:

$$| D_{x_j}^{\beta_j} \psi_{\varepsilon}^N(x, y) | \leq \sum_{\rho + \sigma = \beta_j} C_{\rho\sigma} \int | D_{x_j}^{\rho} R_N(x, z, y) u(x-z, y) D_{z_j}^{\sigma} j_{\varepsilon}(z) | dz.$$

Ora:

$$\begin{aligned} & \int | D_{x_j}^{\rho} R_N(x, z, y) u(x-z, y) D_{z_j}^{\sigma} j_{\varepsilon}(z) | dz \leq \\ & \leq \| u(\cdot, y); K^{m\delta} \| \| D_{x_j}^{\rho} R_N(x, z, y) D_{z_j}^{\sigma} j_{\varepsilon}(z); K^{-m\delta} \|. \end{aligned}$$

Ma:

$$\| D_{x_j}^{\rho} R_N(x, z, y) D_{z_j}^{\sigma} j_{\varepsilon}(z); K^{-m\delta} \| \leq C \| D_{x_j}^{\rho} R_N(x, z, y) D_{z_j}^{\sigma} j_{\varepsilon}(z); L^2(\mathbf{R}^n) \|.$$

Poichè

$$\sup (D_{z_j}^\sigma j_\epsilon(z)) \subset \{x \mid |x| \leq 1\} \forall \epsilon \in]0, 1]$$

e giacchè:

$$\sup_{y \geq 0} |D_{x_j}^2 R_N(x, z, y)| \leq |b(x, y)| |z|^N$$

dove $b(x, y)$ è una funzione opportuna tale che

$$\sup_{y \geq 0} \int |b(x, y)|^2 dx < \infty,$$

si avrà:

$$\begin{aligned} \|D_{x_j}^2 R_N(x, z, y) D_{z_j}^\sigma j_\epsilon(z); L^2\| &\leq |b(x, y)| \left(\int |z|^{2N} |D_{z_j}^\sigma j_\epsilon(z)|^2 dz \right)^{1/2} = \\ &= |b(x, y)| \left(\int |z|^{2N} \left| (D_{z_j}^\sigma j_\epsilon) \left(\frac{z}{\epsilon} \right) \right|^2 \epsilon^{-2(n+|\sigma|)} dz \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C |b(x, y)| \epsilon^{N-|\sigma|} \leq C |b(x, y)|, \quad N \geq |\sigma|. \end{aligned}$$

In sostanza, se N è sufficientemente grande:

$$\|D_{x_j}^2 j_\epsilon^N; L^2(\Omega_+)\| \leq C_j \|u; L^2(\mathbf{R}^+, K^{m\delta})\|$$

(la costante è indipendente da ϵ). La proposizione è quindi provata.

c.v.d.

Ricorrendo al procedimento usato nella prova della Prop. 7 si ottiene il:

COROLLARIO 3. Sia $j \in \mathfrak{D}(\mathbf{R}^{n+1})$, $\text{supp}(j) \subset \{(x, y) \mid |x|^2 + y^2 \leq 1\}$; se $u \in L^2(\mathbf{R}^{n+1})$, porremo

$$u_\epsilon = u * j_\epsilon = \int_{\mathbf{R}^{n+1}} u(x - \xi, y - \eta) j_\epsilon(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

essendo, $\forall \epsilon > 0$, $j_\epsilon(x, y) = \epsilon^{-(n+1)} j(x/\epsilon, y/\epsilon)$.

Ciò premesso se $u \in H^{\frac{p}{q}, \sigma}$, $\sigma \in \mathbf{R}^+$, e se $\rho \in \mathbf{R}^+$,

$$\rho \leq \min \left\{ \frac{q}{p_1}, \dots, \frac{q}{p_n}, 1 \right\},$$

allora:

$$\| (au)_\varepsilon - au_\varepsilon; H^{\frac{p}{q}(\sigma+\rho), \sigma+\rho} \| \rightarrow 0, \varepsilon \downarrow 0.$$

Veniamo ora alla regolarizzazione

Nelle seguenti Prop. 8 e 9 supponiamo che A sia l'operatore differenziale su $\bar{\Omega}_+$ definito dalla (22); supporremo anche, per semplicità, che i coefficienti di A siano funzioni di classe C^∞ su $\bar{\Omega}_+$. Ammetteremo che A sia propriamente quasi-ellettico di tipo m su $\bar{\Omega}_+$ (Def. 7). Sia poi $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ la famiglia di operatori differenziali definiti da (23); ammetteremo che i coefficienti dei B_j siano di classe C^∞ su $\bar{\Omega}_+$, che il sistema $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ ricopra A su $\partial\Omega_+$ (Def. 8) e che: $\mu_j \leq q-1 \forall j$. Si ha la:

PROPOSIZIONE 8. *Posto*

$$F = \left\{ (\alpha, h) \in (\mathbf{N} \cup \{0\})^{n+1}, \left\langle \alpha, \frac{1}{p} \right\rangle + \frac{h}{q} < 1 \right\}$$

e

$$\bar{q} = \max \left\{ \left\langle \alpha, \frac{q}{p} \right\rangle + h \mid (\alpha, h) \in F \right\},$$

sia $\rho_0 \in \mathbf{R}^+$,

$$\rho_0 = \min \{ q/p_1, \dots, q/p_n, 1, q - \bar{q} \}.$$

Ciò premesso, se $u \in H^{p,q}(\Omega_+)$ ed è tale che:

$$1) Au \in H^{\frac{p}{q}, p}(\Omega_+);$$

$$2) \gamma_0 B_j u \in H^{\frac{p}{q}(q+\rho-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+), j=0, 1, \dots, m-1;$$

con $\rho \in]0, \rho_0]$, allora $\exists \delta \in \mathbf{R}^+$ tale che $\forall \omega \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$, con:

$$\text{supp } (\omega) \subset \{(x, y) \in \bar{\Omega}_+ \mid |x| \leq \delta, 0 \leq y \leq \delta\} = J_\delta$$

si ha $\omega u \in H^{\frac{p}{q}(q+\rho), q-\rho}(\Omega_+)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $j \in \mathfrak{D}(\mathbf{R}^n)$ definita come nella Prop. 7. Se

$\omega \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$, $\text{supp } (\omega) \subset J_\tau$ ($\tau > 0$), poniamo $v = \omega u$ e

$$v_\varepsilon = v * j'_\varepsilon = \int v(x-z, y) j_\varepsilon(z) dz.$$

Si ha $\text{supp } (v_\varepsilon) \subset J_{\tau+\varepsilon}$ e $v_\varepsilon \rightarrow v$ su $H^{p,q}(\Omega_+)$ per $\varepsilon \downarrow 0$. Inoltre $T^p v_\varepsilon \in H^{p,q}(\Omega_+)$ $\forall \varepsilon > 0$. D'ora innanzi supporremo $\varepsilon \in]0, 1]$. Poniamo:

$$A(0) = A(0, 0; D_x, D_y); \quad B_j(0) = B_j(0, 0; D_x, D_y), \\ j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Dalla (17) si ottiene:

$$(33) \quad \| T^p v_\varepsilon; H^{p,q}(\Omega_+) \| \leq C \{ \| A(0) T^p v_\varepsilon; L^2(\Omega_+) \| + \\ + \sum_{j=0}^{m-1} \| \gamma_0 B_j(0) T^p v_\varepsilon; H^{p(q-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \| + \| T^p v_\varepsilon; L^2(\Omega_+) \| \}.$$

Si ha:

$$A(0) T^p v_\varepsilon = T^p A(0) v_\varepsilon = T^p [A(0) - A] v_\varepsilon + \\ + T^p [A v_\varepsilon - (A v)_\varepsilon] + T^p (\omega A u)_\varepsilon + T^p (A'(\omega) u)_\varepsilon$$

(si osservi che $A(v) = A(\omega u) = \omega A u + A'(\omega) u$ con:

$$A'(\omega) = \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q < 1} a'_{\alpha h} (x, y; \omega) D_x^\alpha D_y^h \text{ con } a'_{\alpha h} \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+), \text{supp } (a'_{\alpha h}) \subset J_\tau).$$

Ora si ha:

1) $\omega A u \in H^{\frac{p}{q}, \frac{p}{q}}(\Omega_+)$ (ipotesi); quindi $(\omega A u)_\varepsilon \rightarrow \omega A u$ su $H^{\frac{p}{q}, \frac{p}{q}}(\Omega_+)$ per $\varepsilon \downarrow 0$ e perciò $T^p(\omega A u)_\varepsilon \rightarrow T^p(\omega A u)$ su $L^2(\Omega_+)$, per $\varepsilon \downarrow 0$. Quindi:

$$\sup_{\varepsilon \leq \varepsilon_1} \| T^p(\omega A u)_\varepsilon; L^2(\Omega_+) \| < \infty \quad (\varepsilon_1 \text{ opportuno});$$

2) $A'(\omega) : H^{p,q}(\Omega_+) \rightarrow H^{\frac{p}{q}(q-\bar{q}), q-\bar{q}}(\Omega_+)$, con continuità, quindi:

$(A'(\omega) u)_\varepsilon \rightarrow A'(\omega) u$ su $H^{\frac{p}{q}(q-\bar{q}), q-\bar{q}}(\Omega_+)$ (per $\varepsilon \downarrow 0$) e pertanto

$$T^p((A'(\omega) u)_\varepsilon) \rightarrow T^p(A'(\omega) u)$$

su $L^2(\Omega_+)$ ($\rho \leq q - \bar{q}$ per ipotesi). Ne consegue che:

$$\sup_{\varepsilon \leq \varepsilon_2} \| T^\rho(A'(\omega)u)_\varepsilon ; L^2(\Omega_+) \| < \infty \quad (\varepsilon_2 \text{ opportuno});$$

3) Valutiamo

$$\| T^\rho[A v_\varepsilon - (A v)_\varepsilon] ; L^2(\Omega_+) \|.$$

Poichè $\text{supp}(v_\varepsilon) \subset J_{\tau+\varepsilon} \subset J_{\tau+1}$, se $\psi \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$, $\psi \equiv 1$ su $J_{\tau+1}$, allora $\psi A v_\varepsilon = A v_\varepsilon$, $\forall \varepsilon \in]0, 1]$ e $\psi A v = A v$. Dunque possiamo supporre i coefficienti di A in $\mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$. Posto $\zeta = (x, y)$, $D_\zeta = D_x D_y$ si ha:

$$\begin{aligned} & \| T^\rho[A v_\varepsilon - (A v)_\varepsilon] ; L^2(\Omega_+) \| \leq \\ & \leq \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q \leq 1} \| T^\rho(c_{\alpha h}(\zeta) D_\zeta^{\alpha, h} v_\varepsilon) - T^\rho(c_{\alpha h}(\zeta) D_\zeta^{\alpha, h} v)_\varepsilon ; L^2(\Omega_+) \|. \end{aligned}$$

È sufficiente valutare un addendo di destra. Poichè $D_\zeta^{\alpha, h} v_\varepsilon \in L^2(\Omega_+) = L^2(\mathbf{R}^+, K^0)$, applicando la Prop. 7:

$$\begin{aligned} & \| T^\rho(c_{\alpha h}(\zeta) D_\zeta^{\alpha, h} v_\varepsilon) - T^\rho(c_{\alpha h}(\zeta) D_\zeta^{\alpha, h} v)_\varepsilon ; L^2(\Omega_+) \| \leq \\ & \leq C \| c_{\alpha h}(\zeta) D_\zeta^{\alpha, h} v_\varepsilon - (c_{\alpha h} D_\zeta^{\alpha, h} v)_\varepsilon ; L^2(\mathbf{R}^+, K^p) \| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \downarrow 0 \end{aligned}$$

(C è una costante dimensionale). Se ne deduce che:

$$\sup_{\varepsilon \leq \varepsilon} \| T^\rho[A v_\varepsilon - (A v)_\varepsilon] ; L^2(\Omega_+) \| < \infty \quad (\varepsilon_3 \text{ opportuno}).$$

4) Valutiamo infine $\| T^\rho[A(0) - A] v_\varepsilon ; L^2(\Omega_+) \|$. Come sopra possiamo supporre che i coefficienti di $A(0) - A$ siano in $\mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$. Precisamente se $\chi_\varepsilon \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$, $\text{supp}(\chi_\varepsilon) \subset J_{2(\tau+\varepsilon)}$, $\chi_\varepsilon \equiv 1$ su $J_{\tau+\varepsilon}$, allora $[A(0) - A] v_\varepsilon = \chi_\varepsilon [A(0) - A] v_\varepsilon$. Quindi:

$$\begin{aligned} & \| T^\rho[A(0) - A] v_\varepsilon ; L^2(\Omega_+) \| \leq \\ & \leq \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q \leq 1} \| T^\rho(\chi_\varepsilon d_{\alpha h}(\zeta) D_\zeta^{\alpha, h} v_\varepsilon) ; L^2(\Omega_+) \|. \end{aligned}$$

D'altra parte si ha:

$$T^\rho(\chi_\varepsilon d_{\alpha h}(\zeta) D_\zeta^{\alpha, h} v_\varepsilon) = \chi_\varepsilon d_{\alpha h}(\zeta) T^\rho D_\zeta^{\alpha, h} v_\varepsilon + [T^\rho, \chi_\varepsilon d_{\alpha h}(\zeta) \cdot] D_\zeta^{\alpha, h} v_\varepsilon$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
 & \| T^p(\chi_\varepsilon d_{ah} D_\xi^{\alpha, h} v_\varepsilon); L^2(\Omega_+) \| \leq \\
 & \leq \sup_{\xi \in J_{2(\tau+\varepsilon)}} | \chi_\varepsilon d_{ah} | \| T^p D_\xi^{\alpha, h} v_\varepsilon; L^2(\Omega_+) \| + \\
 & + \| [T^p, \chi_\varepsilon d_{ah} \cdot] D_\xi^{\alpha, h} v_\varepsilon; L^2(\Omega_+) \| \leq \\
 & \leq C_1 \sup_{\xi \in J_{2(\tau+\varepsilon)}} | \chi_\varepsilon d_{ah} | \| T^p v_\varepsilon; H^{p, q}(\Omega_+) \| + \| [T^p, \chi_\varepsilon d_{ah} \cdot] D_\xi^{\alpha, h} v_\varepsilon; L^2(\Omega_+) \|.
 \end{aligned}$$

Applichiamo la Prop. 6 per valutare l'ultimo addendo; esisterà $\theta \in]0, \rho[$ tale che:

$$\| [T^p, \chi_\varepsilon d_{ah} \cdot] D_\xi^{\alpha, h} v_\varepsilon; L^2(\Omega_+) \| \leq C_2 \| D_\xi^{\alpha, h} v_\varepsilon; L^2(\mathbf{R}^+, K^{\rho-\theta}) \|$$

(si tenga conto del fatto che $D_\xi^{\alpha, h} v_\varepsilon \in L^2(\mathbf{R}^+, K^\rho)$). Applicando poi la disuguaglianza interpolatoria ne viene che $\forall \eta \in \mathbf{R}^+, \exists C(\eta) \in \mathbf{R}^+$ tale che:

$$\begin{aligned}
 & \| D_\xi^{\alpha, h} v_\varepsilon; L^2(\mathbf{R}^+, K^{\rho-\theta}) \| \leq \\
 & \leq \eta \| D_\xi^{\alpha, h} v_\varepsilon; L^2(\mathbf{R}^+, K^\rho) \| + C(\eta) \| D_\xi^{\alpha, h} v_\varepsilon; L^2(\Omega_+) \| \leq \\
 & \leq C_3 \eta \| T^p v_\varepsilon; H^{p, q}(\Omega_+) \| + C(\eta) \| v_\varepsilon; H^{p, q}(\Omega_+) \|.
 \end{aligned}$$

In conclusione:

$$\begin{aligned}
 & \| T^p(A(0) - A)v_\varepsilon; L^2(\Omega_+) \| \leq \\
 & \leq [C' \sup_{\substack{\xi \in J_{2(\tau+\varepsilon)} \\ \alpha, h}} | \chi_\varepsilon d_{ah} | + C''\eta] \| T^p v_\varepsilon; H^{p, q}(\Omega_+) \| + \\
 & + C'''(\eta) \| v_\varepsilon; H^{p, q}(\Omega_+) \|.
 \end{aligned}$$

Poichè $v_\varepsilon \rightarrow v$ su $H^{p, q}(\Omega_+)$ (per $\varepsilon \downarrow 0$) sarà:

$$\sup_{\varepsilon \leq \varepsilon_4} \| v_\varepsilon; H^{p, q}(\Omega_+) \| < \infty \quad (\varepsilon_4 \text{ opportuno}).$$

Tenendo conto delle valutazioni fatte in 1), 2), 3), 4), si può concludere che $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon']$, $\varepsilon' \in \mathbf{R}^+$ opportuno ($\varepsilon' \leq 1$), si avrà:

$$(34) \quad \| A(0)T^p v_\varepsilon; L^2(\Omega_+) \| \leq C_1 + C_2(\eta) +$$

$$+ C_3(\eta + \sup_{\substack{\zeta \in J_{2(\tau+\varepsilon)} \\ \alpha, h}} |\chi_\varepsilon d_{ah}|) \|T^p v_\varepsilon; H^{p, q}(\Omega_+)\|.$$

$\eta \in \mathbf{R}^+$, $C_2(\eta)$ dipende da η , C_1 , C_3 non dipendono nè da η nè da ε .

Prendiamo ora in considerazione gli operatori frontiera.

Si ha, per $j=0, 1, \dots, m-1$:

$$\begin{aligned} B_j(0)T^p v_\varepsilon &= T^p B_j(0)v_\varepsilon = T^p[B_j(0) - B_j]v_\varepsilon + \\ &+ T^p[B_j v_\varepsilon - (B_j v)_\varepsilon] + T^p(\omega B_j u)_\varepsilon + T^p(B'_j(\omega)u)_\varepsilon \end{aligned}$$

(si osservi che $B_j v = B_j(\omega u) = \omega B_j u + B'_j(\omega)u$ con:

$$B'_j(\omega) = \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q < \mu_j/q} s_{ah}(\zeta; \omega) D_{\zeta}^{\alpha, h}$$

con

$$s_{ah} \in \mathfrak{D}(\Omega_+), \quad \text{supp}(s_{ah}) \subset J_\tau.$$

Si ha:

$$1') \quad \gamma_0(\omega B_j u)_\varepsilon \in H^{\frac{p}{q}(q+\rho-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \text{ (ipotesi) e quindi:}$$

$$\gamma_0(\omega B_j u)_\varepsilon \rightarrow \gamma_0(\omega B_j u) \quad \text{per } \varepsilon \downarrow 0,$$

sul medesimo spazio, sicchè:

$$\begin{aligned} T^p \gamma_0(\omega B_j u)_\varepsilon &= \gamma_0 T^p(\omega B_j u)_\varepsilon \rightarrow \gamma_0 T^p(\omega B_j u) \text{ su } H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \\ &\quad \text{(per } \varepsilon \downarrow 0). \end{aligned}$$

Ne viene che:

$$\sup_{\varepsilon \leq \varepsilon'_1} \|\gamma_0 T^p(\omega B_j u)_\varepsilon; H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+)\| < \infty \quad (\varepsilon'_1 \text{ opportuno}).$$

2') Vi è $\tau_j < \mu_j$ tale che

$$B'_j(\omega) = \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q \leq \tau_j/q} s_{ah}(\zeta; \omega) D_{\zeta}^{\alpha, h};$$

poichè $\mu_j/q < 1$, si ha $q - \tau_j > 1 \geq \rho_0 > \rho$ e, giacchè:

$$B'_j(\omega) : H^{p, q}(\Omega_+) \rightarrow H^{\frac{p}{q}(q-\tau_j), q-\tau_j}(\Omega_+),$$

con continuità ne viene che:

$$\begin{aligned} & \| \gamma_0 T^p(B'_j(\omega)u)_\varepsilon ; H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \| \leq \\ & \leq C \| T^p(B'_j(\omega)u)_\varepsilon ; H^{\frac{p}{q}(q-\tau_j), q-\tau_j}(\Omega_+) \| . \end{aligned}$$

Ora

$$(B'_j(\omega)u)_\varepsilon \rightarrow (B'_j(\omega)u) \text{ su } H^{\frac{p}{q}(q-\tau_j), q-\tau_j}(\Omega_+) \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

e quindi:

$$T^p(B'_j(\omega)u)_\varepsilon \rightarrow T^p(B'_j(\omega)u) \text{ su } H^{\frac{p}{q}(q-\tau_j-p), q-\tau_j-p}(\Omega_+)$$

(ed a maggior ragione in $L^2(\Omega_+)$). In conclusione si avrà:

$$\sup_{\varepsilon \leq \varepsilon'_2} \| \gamma_0 T^p(B'_j(\omega)u)_\varepsilon ; H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \| < \infty \quad (\varepsilon'_2 \text{ opport.}).$$

3') Valutiamo

$$\| \gamma_0 T^p[B_j(0)-B_j]v_\varepsilon ; H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \| .$$

Applicando il teorema di tracce (Prelim. B), si ha:

$$\begin{aligned} & \| \gamma_0 T^p[B_j(0)-B_j]v_\varepsilon ; H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \| \leq \\ & \leq C \| T^p[B_j(0)-B_j]v_\varepsilon ; H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j), q-\mu_j}(\Omega_+) \| . \end{aligned}$$

Sia ora $\varphi_\varepsilon \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$, $\text{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset J_{2(\tau+\varepsilon)}$, $\varphi_\varepsilon \equiv 1$ su $J_{\tau+\varepsilon}$ e $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$; allora:

$$[B_j(0)-B_j]v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon [B_j(0)-B_j]v_\varepsilon$$

e quindi:

$$\begin{aligned} & \| T^p[B_j(0)-B_j]v_\varepsilon ; H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j), q-\mu_j}(\Omega_+) \| \leq \\ & \leq \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q \leq \mu_j/q} \| T^p[\varphi_\varepsilon(\zeta)b_{\alpha h, j}(\zeta)D_\zeta^{\alpha, h}v_\varepsilon ; H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j), q-\mu_j}(\Omega_+) \| . \end{aligned}$$

È sufficiente valutare un addendo. Si ha:

$$T^p[\varphi_\varepsilon b_{ah,j} D_\zeta^\alpha, {}^h v_\varepsilon] = \varphi_\varepsilon b_{ah,j} T^p D_\zeta^\alpha, {}^h v_\varepsilon + [T^p, \varphi_\varepsilon b_{ah,j} \cdot] D_\zeta^\alpha, {}^h v_\varepsilon.$$

Sicchè:

$$\begin{aligned} & \| T^p(\varphi_\varepsilon b_{ah,j} D_\zeta^\alpha, {}^h v_\varepsilon); H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j), q-\mu_j}(\Omega_+) \| \leq \\ & \leq \sup_{\zeta \in J_{2(\tau+\varepsilon)}} | \varphi_\varepsilon b_{ah,j} | \| T^p D_\zeta^\alpha, {}^h v_\varepsilon; H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j), q-\mu_j}(\Omega_+) \| + \\ & + \| [T^p, \varphi_\varepsilon b_{ah,j} \cdot] D_\zeta^\alpha, {}^h v_\varepsilon; H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j), q-\mu_j}(\Omega_+) \| \leq \\ & \leq C_1 \sup_{\zeta \in J_{2(\tau+\varepsilon)}} | \varphi_\varepsilon b_{ah,j} | \| T^p v_\varepsilon; H^{p,q}(\Omega_+) \| + \\ & + \| [T^p, \varphi_\varepsilon b_{ah,j} \cdot] D_\zeta^\alpha, {}^h v_\varepsilon; H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j), q-\mu_j}(\Omega_+) \|. \end{aligned}$$

Applichiamo il Corollario 2 per valutare l'ultimo addendo (prendendo, con le notazioni là usate $\delta=\rho$); allora:

$$\begin{aligned} & \| [T^p, \varphi_\varepsilon b_{ah,j} \cdot] D_\zeta^\alpha, {}^h v_\varepsilon; H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j), q-\mu_j}(\Omega_+) \| \leq \\ & \leq C_2 \| D_\zeta^\alpha, {}^h v_\varepsilon; H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j), q-\mu_j}(\Omega_+) \| \leq C_2 \| v_\varepsilon; H^{p,q}(\Omega_+) \|. \end{aligned}$$

Poichè, d'altra parte:

$$\sup_{\varepsilon \leq \varepsilon'_3} \| v_\varepsilon; H^{p,q}(\Omega_+) \| < \infty \quad (\varepsilon'_3 \text{ opportuno})$$

si avrà, in conclusione:

$$\begin{aligned} & \sup_{\varepsilon \leq \varepsilon'_4} \| \gamma_0 T^p[B_j(0) - B_j] v_\varepsilon; H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \| \leq \\ & \leq C'' + C' \sup_{\substack{\zeta \in J_{2(\tau+\varepsilon)} \\ \alpha, h}} | \varphi_\varepsilon b_{ah,j} | \| T^p v_\varepsilon; H^{p,q}(\Omega_+) \| \\ & \quad (\varepsilon'_4 \text{ opportuno}). \end{aligned}$$

4)' Valutiamo infine

$$\| \gamma_0 T^p(B_j v_\varepsilon - (B_j v)_\varepsilon); H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \|.$$

Poichè $\text{supp}(v_\varepsilon) \subset J_{\tau+\varepsilon} \subset J_{\tau+1}$, se $\psi \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$, $\psi \equiv 1$ su $J_{\tau+1}$, allora

$\psi B_j v_\varepsilon = B_j v_\varepsilon \quad \forall \varepsilon \in]0, 1]$, $B_j v = \psi B_j v$ e quindi possiamo supporre i coefficienti di B_j in $\mathfrak{D}(\tilde{\Omega}_+)$. Sarà allora:

$$\begin{aligned} & \| \gamma_0 T^p(B_j v_\varepsilon - (B_j v)_\varepsilon); H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \| = \\ & = \| T^p \gamma_0(B_j v_\varepsilon - (B_j v)_\varepsilon); H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \| \leq \\ & \leq \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q \leq \mu_j/q} \| T^p \{ \gamma_0(b_{ah, j} D_\xi^{\alpha, h} v_\varepsilon) - \\ & - \gamma_0(b_{ah, j} D_\xi^{\alpha, h} v)_\varepsilon \}; H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \| \leq \\ & \leq \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q \leq \mu_j/q} \| \gamma_0(b_{ah, j} D_\xi^{\alpha, h} v_\varepsilon) - \gamma_0(b_{ah, j} D_\xi^{\alpha, h} v)_\varepsilon; H^{\frac{p}{q}(q+\rho-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \|. \end{aligned}$$

Basta valutare un addendo. Si ha:

$$\begin{aligned} & \| \gamma_0(b_{ah, j} D_\xi^{\alpha, h} v_\varepsilon) - \gamma_0(b_{ah, j} D_\xi^{\alpha, h} v)_\varepsilon; H^{\frac{p}{q}(q+\rho-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \| = \\ & = \| \gamma_0(b_{ah, j}) \gamma_0(D_\xi^{\alpha, h} v_\varepsilon) - \gamma_0(b_{ah, j}) (\gamma_0 D_\xi^{\alpha, h} v)_\varepsilon; H^{\frac{p}{q}(q+\rho-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \|. \end{aligned}$$

Ora, poichè $\gamma_0 D_\xi^{\alpha, h} v \in H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j-1/2)}$ (e quindi anche $(\gamma_0 D_\xi^{\alpha, h} v)_\varepsilon$), applicando il Corollario 3 si conclude che

$$\| \gamma_0 T^p(B_j v_\varepsilon - (B_j v)_\varepsilon); H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \| \rightarrow 0$$

per $\varepsilon \downarrow 0$ e quindi:

$$\sup_{\varepsilon \leq \varepsilon'_5} \| \gamma_0 T^p[B_j v_\varepsilon - (B_j v)_\varepsilon]; H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \| < \infty$$

(ε'_5 opportuno).

In conclusione, tenuto conto delle valutazioni fatte in 1)', 2)', 3)', 4)', si può affermare che $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon'']$ ($\varepsilon'' < 1$, opportuno) si ha:

$$\begin{aligned} (35) \quad & \| \gamma_0 T^p B_j(0) v_\varepsilon; H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \| \leq \\ & \leq C'_1 + C'_2 \sup_{\substack{\zeta \in J_2(\tau+\varepsilon) \\ \alpha, h}} | \varphi_\varepsilon b_{ah, j} | \| T^p v_\varepsilon; H^{p, q}(\Omega_+) \|. \end{aligned}$$

Teniamo ora presente la (34) e la (35) ed il fatto che:

$$\| T^p v_\varepsilon ; L^2(\Omega_+) \| \leq C \| v_\varepsilon ; H^{\frac{p}{q}, p}(\Omega_+) \| \leq C \| v_\varepsilon ; H^{p, q}(\Omega_+) \|$$

e quindi $\sup_{\varepsilon \leq \varepsilon'''} \| T^p v_\varepsilon ; L^2(\Omega_+) \| < \infty$ (ε''' opportuno). Dalla (33) si ha allora che per ε sufficientemente piccolo:

$$\begin{aligned} & \| T^p v_\varepsilon ; H^{p, q}(\Omega_+) \| \leq C' + C''(\eta) + \\ & + C'''(\eta + \sup_{\substack{J_{2(\tau+\varepsilon)} \\ \alpha, h}} |\chi_\varepsilon d_{\alpha h}| + \sup_{\substack{J_{2(\tau+\varepsilon)} \\ \alpha, h, j}} |\varphi_\varepsilon b_{\alpha h, j}|) \cdot \| T^p v_\varepsilon ; H^{p, q}(\Omega_+) \| \end{aligned}$$

$\eta \in \mathbf{R}^+$, $C''(\eta)$ dipende solo da η , C' e C''' non dipendono nè da η nè da ε .

Si riconosce allora che se η , τ ed ε sono sufficientemente piccoli $\| T^p v_\varepsilon ; H^{p, q}(\Omega_+) \|$ è limitata in ε (ε piccolo). Per la relativa compattezza debole dei limitati di uno spazio di Hilbert e poichè T^p come operatore $L^2 \rightarrow L^2$ (non limitato) è chiuso se ne deduce che $T^p v \in H^{p, q}(\Omega_+)$ ($v = \omega u$ con $\text{supp } (\omega) \subset J_\delta$, δ conveniente).

Supponiamo ora che $(\alpha, h) \in (\mathbf{N} \cup \{0\})^{n+1}$ sia tale che $\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q \leq 1$, $h \leq q+1$; dico che $D_x^\alpha D_y^h v \in H^{\frac{p}{q}, p}(\Omega_+)$. In effetti sia $w = Ev$ (E è il solito operatore di prolungamento); allora $w \in H^{p, q}(\mathbf{R}^{n+1})$ e poichè $T^p v \in H^{p, q}(\Omega_+)$ si ha che $T^p w \in H^{p, q}$. Dunque, se $h \leq q-1$:

$$\begin{aligned} \| D_y^h w ; H^{\frac{p}{q}, p} \| &= (\int (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}} + \eta^2)^\rho \eta^{2h} | \widehat{w}(\xi, \eta) |^2 d\xi d\eta)^{1/2} \leq \\ &\leq C (\int (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}} + \eta^2)^{\rho+h} | \widehat{w}(\xi, \eta) |^2 d\xi d\eta)^{1/2}. \end{aligned}$$

Quindi, giacchè $h \leq q-1$ e $\rho \leq \rho_0 \leq 1$, si avrà:

$$\| D_y^h w ; H^{\frac{p}{q}, p} \| \leq C \| w ; H^{p, q} \parallel$$

e pertanto $D_y^h v = r_+ D_y^h w \in H^{\frac{p}{q}, p}(\Omega_+)$. Se poi $\alpha \neq 0$, avremo:

$$\| D_x^\alpha D_y^h w ; H^{\frac{p}{q}, p} \| = (\int (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}} + \eta^2)^\rho \xi^{2\alpha} \eta^{2h} | \widehat{w}(\xi, \eta) |^2 d\xi d\eta)^{1/2} \leq$$

$$\leq C(\int (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}} + \eta^2)^p \frac{(1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}})^{\langle \alpha, \frac{q}{p} \rangle}}{t^p(\xi)} \eta^{2h} | \widehat{T^p w}(\xi, \eta) |^2 d\xi d\eta)^{1/2} \leq$$

$$\leq C^1(\int (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}} + \eta^2)^p (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}})^{\langle \alpha, \frac{q}{p} \rangle - p} \eta^{2h} | \widehat{T^p w}(\xi, \eta) |^2 d\xi d\eta)^{1/2}.$$

D'altra parte $\left\langle \alpha, \frac{q}{p} \right\rangle - \rho \geq 0$, per l'ipotesi fatta su ρ . Dunque:

$$\| D_x^\alpha D_y^h w; H^{\frac{p}{q}, p} \| \leq C'(\int (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}} + \eta^2)^{\langle \alpha, \frac{q}{p} \rangle + h} | \widehat{T^p w}(\xi, \eta) |^2 d\xi d\eta)^{1/2} \leq$$

$$\leq C' \| T^p w; H^{q, p} \|.$$

Infine $D_x^\alpha D_y^h v = r_+ D_x^\alpha D_y^h w \in H^{\frac{p}{q}, p}(\Omega_+)$.

A questo punto osserviamo che:

$$D_y^q v = a^{-1} A v - \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q \leq 1, h \leq q-1} a^{-1}(x, y) a_{ah}(x, y) D_x^\alpha D_y^h v$$

dove si posto $a(x, y) = a_{0,q}(x, y)$ (mai nulla su $\overline{\Omega}_+$ per la quasi-ellitticità di A). Dunque:

$$(36) \quad D_y^q v = a^{-1} \omega A u + a^{-1} A'(\omega) u + R v$$

(il significato di A' , R è chiaro). Nella (36) si può supporre che $\text{supp}(\omega) \subset J_{\delta'}$ con $\delta' < \delta$. In base a quanto visto sopra ed in virtù del fatto che i coefficienti di R si possono supporre a supporto compatto,

si ha $R v \in H^{\frac{p}{q}, p}(\Omega_+)$. D'altra parte, per l'ipotesi 1), $a^{-1} \omega A u \in H^{\frac{p}{q}, p}(\Omega_+)$.

Infine presa $\psi \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega}_+)$, $\text{supp}(\psi) \subset J_\delta$ e $\psi \equiv 1$ su $J_{(\delta' + \delta)/2}$, poichè i coefficienti di $A'(\omega)$ sono a supporto compatto in $J_{\delta'}$, ne viene che $A'(\omega)u =$

$= A'(\omega)(\psi u)$, ma $T^p(\psi u) \in H^{p, q}$ e quindi $D_x^\alpha D_y^h(\psi u) \in H^{\frac{p}{q}, p}(\Omega_+)$ (se

$\left\langle \alpha, \frac{1}{p} \right\rangle + h/q \leq 1, h \leq q-1$) e pertanto $A'(\omega)(\psi u) \in H^{\frac{p}{q}, p}(\Omega_+)$.

In conclusione $D_y^q(\omega u) \in H^{\frac{p}{q}, p}(\Omega_+)$. Basta ora ricordare il Lemma I

(tenuto conto che abbiamo provato l'esistenza di un $\delta \in \mathbf{R}^+$ tale che $\forall \omega \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$, $\text{supp } (\omega) \subset J_\delta$ si ha $T^e(\omega u) \in H^{p,q}(\Omega_+)$ e $D_y^q(\omega u) \in H^{\frac{p}{q}, \frac{p}{q}}(\Omega_+)$ per concludere che la tesi è vera. c.v.d.

Siamo ora in grado di provare il risultato principale di questo numero:

PROPOSIZIONE 9. Sia $\sigma \in \mathbf{R}^+$, $\sigma > q$; se $u \in H^{p,q}(\Omega_+)$ ed è tale che:

- 1) $Au \in H^{\frac{p}{q}(\sigma-q), \sigma-q}(\Omega_+)$;
- 2) $\gamma_0 B_j u \in H^{\frac{p}{q}(\sigma-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+)$, $j=0, 1, \dots, m-1$;

allora $\exists \delta \in \mathbf{R}^+$ tale che

$$\forall \omega \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+), \text{supp } (\omega) \subset \{(x, y) \mid |x| \leq \delta, 0 \leq y \leq \delta\} = J_\delta$$

si ha $\omega u \in H^{\frac{p}{q}\sigma, \sigma}(\Omega_+)$.

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo coll'osservare che esistono $k \in \mathbf{N}$, $\rho \in]0, \rho_0]$ (ρ_0 definito come nella Prop. 8), univocamente determinati, in modo che $\sigma = q + k\rho$. È chiaro che basterà dimostrare la Prop. 9 per i reali σ del tipo $q + k\rho$, $k \in \mathbf{N}$ e ρ fissato. Per $k=1$ la tesi è vera (è la Prop. 8); qui faremo la dimostrazione per $k=2$, ma come risulterà chiaro dal contesto, il medesimo procedimento vale per k qualunque (supposta vera la tesi per $k-1$). In virtù delle ipotesi e tenuto conto della Prop. 8 si può affermare intanto che $\exists \tau \in \mathbf{R}^+$ tale che $\forall \omega \in \mathfrak{D}(\Omega_+)$, $\text{supp } (\omega) \subset J_\tau$, si ha: $\omega u \in H^{\frac{p}{q}\tau, \tau}(\Omega_+)$. Fissiamo ora $\tau' \in]0, \tau[$ ed $\omega \in \mathfrak{D}(\Omega_+)$ si supponga con $\text{supp } (\omega) \subset J_{\tau'}$. Poniamo $v = \omega u$, $v_\varepsilon = v * j_\varepsilon$ (j_ε è il mollificatore definito come nella Prop. 7), $\varepsilon \in]0, 1]$. Dalla (17), poichè si ha:

$$T^{2\rho} v_\varepsilon \in H^{p,q}(\Omega_+) (\forall \varepsilon \in]0, 1]),$$

viene:

$$\begin{aligned} & \| T^{2\rho} v_\varepsilon ; H^{p,q}(\Omega_+) \| \leq C \{ \| A(0) T^{2\rho} v_\varepsilon ; L^2(\Omega_+) \| + \\ & + \sum_{j=0}^{m-1} \| \gamma_0 B_j(0) T^{2\rho} v_\varepsilon ; H^{\frac{p}{q}(q-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+) \| + \| T^{2\rho} v_\varepsilon ; L^2(\Omega_+) \| \} \end{aligned}$$

($A(0)$ e $B_j(0)$ definiti come nella Prop. 9). Si ha:

$$A(0)T^{2p}v_\varepsilon = T^{2p}A(0)v_\varepsilon = T^{2p}[A(0) - A]v_\varepsilon + \\ + T^{2p}[Av_\varepsilon - (Av)_\varepsilon] + T^{2p}(\omega Au)_\varepsilon + T^{2p}(A'(\omega)u)_\varepsilon$$

con:

$$A'(\omega) = \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle h/q < 1} a'_{\alpha h}(x, y; \omega) D_x^\alpha D_y^h; \\ a'_{\alpha h} \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+), \text{ supp } (a'_{\alpha h}) \subset J_{\tau'}.$$

Allora:

1) Giacchè $v_\varepsilon, v \in H^{\frac{p}{q}(q+\rho), q+\rho}(\Omega_+)$ e $v_\varepsilon \rightarrow v$ (per $\varepsilon \downarrow 0$), su tale spazio, ne viene che $T^{2p}v_\varepsilon \rightarrow T^{2p}v$ su $L^2(\Omega_+)$ e pertanto:

$$\sup_{\varepsilon \leq \varepsilon_1} \| T^{2p}v_\varepsilon; L^2(\Omega_+) \| < \infty \quad (\varepsilon_1 \text{ opportuno}).$$

2) Poichè $\omega Au \in H^{\frac{p}{q}2p, 2p}(\Omega_+)$ (ipotesi), sarà $(\omega Au)_\varepsilon \rightarrow \omega Au$ su tale spazio e quindi $T^{2p}(\omega Au)_\varepsilon \rightarrow T^{2p}(\omega Au)$ su $L^2(\Omega_+)$, sicchè:

$$\sup_{\varepsilon \leq \varepsilon_2} \| T^{2p}(\omega Au)_\varepsilon; L^2(\Omega_+) \| < \infty \quad (\varepsilon_2 \text{ opportuno}).$$

3) Sia $\chi \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$, $\text{supp } (\chi) \subset J_\tau$, $\chi \equiv 1$ su $J_{\tau'}$, allora $A'(\omega)u = A'(\omega)(\chi u)$, ma $\chi u \in H^{\frac{p}{q}(q+\rho), q+\rho}(\Omega_+)$ e quindi:

$$A'(\omega)u = A'(\omega)(\chi u) \in H^{\frac{p}{q}(q-\bar{q}+\rho), q-\bar{q}+\rho}(\Omega_+).$$

Giacchè $q - \bar{q} + \rho \geq 2p$ si conclude che:

$$\sup_{\varepsilon \leq \varepsilon_3} \| T^{2p}(A'(\omega)u)_\varepsilon; L^2(\Omega_+) \| < \infty \quad (\varepsilon_3 \text{ opportuno}).$$

4) Consideriamo $T^{2p}[Av_\varepsilon - (Av)_\varepsilon]$. Sarà (posto $\zeta = (x, y)$, $D_\zeta = D_x D_y$):

$$T^{2p}[Av_\varepsilon - (Av)_\varepsilon] = \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q \leq 1} [T^{2p}(c_{\alpha h} D_\zeta^{\alpha, h} v_\varepsilon) - T^{2p}(c_{\alpha h} D_\zeta^{\alpha, h} v)_\varepsilon]$$

(è consentito supporre che le $c_{\alpha h} \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+) \forall \alpha, h$). Valutiamo, ad esem-

pio:

$$\| T^{2p}[c_{ah}D_{\zeta}^{\alpha, h}v_{\varepsilon} - (c_{ah}D_{\zeta}^{\alpha, h}v)_{\varepsilon}]; L^2(\Omega_+) \|.$$

Giacchè $D_{\zeta}^{\alpha, h}v \in L^2(\mathbf{R}^+, K^p)$ in quanto $v \in \dot{H}^{\frac{p}{q+p}, q+p}(\Omega_+)$, applicando la Prop. 7, si ha:

$$\begin{aligned} & \| T^{2p}[c_{ah}D_{\zeta}^{\alpha, h}v_{\varepsilon} - (c_{ah}D_{\zeta}^{\alpha, h}v)_{\varepsilon}]; L^2(\Omega_+) \| \leq \\ & \leq C \| c_{ah}D_{\zeta}^{\alpha, h}v_{\varepsilon} - (c_{ah}D_{\zeta}^{\alpha, h}v)_{\varepsilon}; L^2(\mathbf{R}^+, K^{2p}) \| \end{aligned}$$

che $\rightarrow 0$ per $\varepsilon \downarrow 0$ e quindi si può concludere che:

$$\sup_{\varepsilon \leq \varepsilon_4} \| T^{2p}[Av_{\varepsilon} - (Av)_{\varepsilon}]; L^2(\Omega_+) \| < \infty \quad (\varepsilon_4 \text{ opportuno}).$$

5) Infine valutiamo $\| T^{2p}[A(0) - A]v_{\varepsilon}; L^2(\Omega_+) \|$. Sia $\chi_{\varepsilon} \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$, $0 \leq \chi_{\varepsilon} \leq 1$, con $\text{supp } (\chi_{\varepsilon}) \subset T_{2(\tau' + \varepsilon)}$ e $\chi_{\varepsilon} \equiv 1$ su $J_{\tau' + \varepsilon}$. Allora

$$[A(0) - A]v_{\varepsilon} = \chi_{\varepsilon}[A(0) - A]v_{\varepsilon}$$

e quindi

$$\begin{aligned} & \| T^{2p}[A(0) - A]v_{\varepsilon}; L^2(\Omega_+) \| \leq \\ & \leq \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q \leq 1} \| T^{2p}(\chi_{\varepsilon} d_{ah} D_{\zeta}^{\alpha, h} v_{\varepsilon}); L^2(\Omega_+) \|. \end{aligned}$$

Ora:

$$T^{2p}(\chi_{\varepsilon} d_{ah} D_{\zeta}^{\alpha, h} v_{\varepsilon}) = \chi_{\varepsilon} d_{ah} T^{2p} D_{\zeta}^{\alpha, h} v_{\varepsilon} + [T^{p2}, \chi_{\varepsilon} d_{ah} \cdot] D_{\zeta}^{\alpha, h} v_{\varepsilon}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} & \| T^{2p}(\chi_{\varepsilon} d_{ah} D_{\zeta}^{\alpha, h} v_{\varepsilon}); L^2(\Omega_+) \| \leq \\ & \leq \sup_{\zeta \in J_{2(\tau' + \varepsilon)}} | \chi_{\varepsilon} d_{ah} | \| T^{2p} D_{\zeta}^{\alpha, h} v_{\varepsilon}; L^2(\Omega_+) \| + \\ & + \| [T^{2p}, \chi_{\varepsilon} d_{ah} \cdot] D_{\zeta}^{\alpha, h} v_{\varepsilon}; L^2(\Omega_+) \|. \end{aligned}$$

D'altra parte:

$$\| T^{2p} D_{\zeta}^{\alpha, h} v_{\varepsilon}; L^2(\Omega_+) \| \leq C \| T^{2p} v_{\varepsilon}; H^{p, q}(\Omega_+) \|.$$

Inoltre, applicando la Prop. 6, giacchè $D_{\zeta}^{\alpha, h}v \in L^2(\mathbf{R}^+, K^{2p})$, si avrà:

$$\| [T^{2p}, \chi_{\varepsilon} d_{ah} \cdot] D_{\zeta}^{\alpha, h} v_{\varepsilon}; L^2(\Omega_+) \| \leq C \| D_{\zeta}^{\alpha, h} v_{\varepsilon}; L^2(\mathbf{R}^+, K^{2p-0}) \|\|$$

$\theta \in \mathbf{R}^+$, $\theta \leq \min_k \frac{q}{p_k}$. Applicando la disuguaglianza interpolatoria:

$$\begin{aligned} & \| [T^{2p}, \chi_\varepsilon d_{ah} \cdot] D_{\xi}^{a, h} v_\varepsilon; L^2(\Omega_+) \| \leq \\ & \leq C\eta \| D_{\xi}^{a, h} v_\varepsilon; L^2(\mathbf{R}^+, K^{2p}) \| + C(\eta) \| D_{\xi}^{a, h} v_\varepsilon; L^2(\Omega_+) \| \end{aligned}$$

$\forall \eta \in \mathbf{R}^+(C(\eta) \text{ dipende da } \eta)$. Poichè

$$\| D_{\xi}^{a, h} v_\varepsilon; L^2(\Omega_+) \| \leq C' \| v_\varepsilon; H^{p, q}(\Omega_+) \|,$$

si ha, in conclusione:

$$\begin{aligned} & \| T^{2p}[A(0) - A]v_\varepsilon; L^2(\Omega_+) \| \leq \\ & \leq C' + C''(\eta) + C'''(\eta + \sup_{\substack{J_2(\tau' + \varepsilon) \\ \alpha, h}} |\chi_\varepsilon d_{ah}|) \| T^{2p}v_\varepsilon; H^{p, q}(\Omega_+) \| \end{aligned}$$

$C''(\eta)$ dipendente da η , C' e C''' indipendenti da ε e da η .

Tenendo conto delle valutazioni fatte in 1), 2), 3), 4), 5) si conclude che:

$$\begin{aligned} & \sup_{\varepsilon \leq \varepsilon'} \| A(0)T^{2p}v_\varepsilon; L^2(\Omega_+) \| \leq \\ & \leq C_1 + C_2(\eta) + C_3(\eta + \sup_{\substack{J_2(\tau' + \varepsilon) \\ \alpha, h}} |\chi_\varepsilon d_{ah}|) \| T^{2p}v_\varepsilon; H^{p, q}(\Omega_+) \| \end{aligned}$$

con $\varepsilon' \leq 1$ opportuno.

Considerazioni analoghe a quelle fatte nella prova della Prop. 8 consentono di valutare

$$\| \gamma_0 B_j(0) T^{2p} v_\varepsilon; H^{\frac{p}{q}(q - \mu_j - 1/2)}(\partial\Omega_+) \|, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Si conclude infine che $T^{2p}v \in H^{p, q}(\Omega_+)$, se $v = \omega$ u con $\omega \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$, $\text{supp } (\omega) \subset J_{\bar{\tau}}$, $\bar{\tau} > 0$, conveniente.

Sia ora $w \in H^{\frac{p}{q}(q+p), q+p}(\mathbf{R}^{n+1})$, $r_+ w = v$. Sarà $T^{2p}w \in H^{p, q}(\mathbf{R}^{n+1})$.

Allora se (α, h) è un multiindice tale che $\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q \leq 1$, $h \leq q-1$

dico che $D_x^\alpha D_y^h T^{2p} v \in H^{\frac{p}{q}p, p}(\Omega_+)$. Sarà sufficiente provare che

$$D_x^\alpha D_y^h T^{2p} w \in H^{\frac{p}{q}p, p}(\mathbf{R}^{n+1}).$$

Ora, se $\alpha=0$:

$$\begin{aligned} & \| D_y^h T^p w; H^{\frac{p}{q^{p,p}}} \| ^2 = \\ & = \int (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2p}{q^{p,p}} + \eta^2})^p \eta^{2h} | \widehat{T^p w}(\xi, \eta) |^2 d\xi d\eta \leq \\ & \leq C \| T^p w; H^{p,q} \|^2 \quad (\text{giacchè } \rho + h \leq q). \end{aligned}$$

Se $\alpha \neq 0$:

$$\begin{aligned} & \| D_x^\alpha D_y^h T^p w; H^{\frac{p}{q^{p,p}}} \| ^2 = \\ & = \int (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2p}{q^{p,p}} + \eta^2})^p \xi^{2\alpha} \eta^{2h} | \widehat{T^p w}(\xi, \eta) |^2 d\xi d\eta \leq \\ & \leq C \int (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2p}{q} + \eta^2})^p \frac{(1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2p}{q}})^{(\alpha, \frac{p}{q})}}{t^p(\xi)} \eta^{2h} | \widehat{T^{2p} w}(\xi, \eta) |^2 d\xi d\eta \end{aligned}$$

e poichè $\left\langle \alpha, \frac{q}{p} \right\rangle - \rho \geq 0$, si ha:

$$\begin{aligned} & \| D_x^\alpha D_y^h T^p w; H^{\frac{p}{q^{p,p}}} \| ^2 \leq \\ & \leq C' \int (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2p}{q} + \eta^2})^{\left\langle \alpha, \frac{q}{p} \right\rangle + h} | \widehat{T^{2p} w}(\xi, \eta) |^2 d\xi d\eta \leq \\ & \leq C' \| T^{2p} w; H^{p,q} \|^2. \end{aligned}$$

Sia ora $\tau_1 < \bar{\tau}$ e supponiamo che $\omega \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$, $\text{supp } (\omega) \subset J_{\tau_1}$. Si ha:

$$T^p A(\omega u) = A T^p(\omega u) + [T^p, A](\omega u),$$

dunque:

$$A T^p(\omega u) = T^p(\omega A u) + T^p(A'(\omega)u) + [A, T^p](\omega u).$$

Per l'ipotesi 1) si ha che $T^p(\omega A u) \in H^{\frac{p}{q^{p,p}}}(\Omega_+)$. D'altra parte $T^p(A'(\omega)u) = T^p(A'(\omega)(\chi u))$ (se $\chi \in \mathfrak{D}(\Omega_+)$, $\text{supp } (\chi) \subset J_{\bar{\tau}}^-$, $\chi \equiv 1$ su J_{τ_1}), ma, per la natura di $A'(\omega)$:

$$T^p(A'(\omega)u) = \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q} \{ a'_{\alpha h} D_\xi^{\alpha, h} T^p(\chi u) + [T^p, a'_{\alpha h} \cdot] D_\xi^{\alpha, h}(\chi u) \}$$

ora, per quanto si è osservato sopra

$$a'_{\alpha h} D_{\xi}^{\alpha, h} T^{\rho}(\chi u) \in H^{\frac{p}{q^{\rho, \rho}}}(\Omega_+) \quad (\forall(\alpha, h))$$

ed inoltre

$$[T^{\rho}, a'_{\alpha h} \cdot] D_{\xi}^{\alpha, h}(\chi u) \in H^{\frac{p}{q^{\rho, \rho}}}(\Omega_+)$$

per il corollario 2 (applicato con $\delta=\rho$).

Infine, sempre per il Corollario 2 (applicato con $\delta=\rho$),

$$[A, T^{\rho}](\omega u) \in H^{\frac{p}{q^{\rho, \rho}}}(\Omega_+)$$

In conclusione:

$$AT^{\rho}(\omega u) \in H^{\frac{p}{q^{\rho, \rho}}}(\Omega_+).$$

Analogamente:

$$T^{\rho} B_j(\omega u) = B_j T^{\rho}(\omega u) + [T^{\rho}, B_j](\omega u)$$

e quindi:

$$B_j T^{\rho}(\omega u) = T^{\rho}(\omega B_j u) + T^{\rho}(B'_j(\omega)u) + [B_j, T^{\rho}](\omega u) \\ (j=0, \dots, m-1).$$

Ora, per l'ipotesi 2):

$$\gamma_0 T^{\rho}(\omega B_j u) = T^{\rho} \gamma_0(\omega B_j u) \in H^{\frac{p}{q^{(q+\rho-\mu_j-1/2)}}}(\partial\Omega_+).$$

Inoltre

$$T^{\rho}(B'_j(\omega)u) = T^{\rho}(B'_j(\omega)(\chi u))$$

($\chi \in \mathfrak{D}(\Omega_+)$, $\text{supp } (\chi) \subset J_{\tau}^{-}$, $\chi \equiv 1$ su J_{τ_1}), ma per la natura dei $B'_j(\omega)$:

$$T^{\rho}(B'_j(\omega)u) = \sum_{\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q} \{ s_{\alpha h} D_{\xi}^{\alpha, h} T^{\rho}(\chi u) + [T^{\rho}, s_{\alpha h} \cdot] D_{\xi}^{\alpha, h}(\chi u) \}.$$

Ora, se $\langle \alpha, 1/p \rangle + h/q \leq \mu_j/q$, $h \leq \mu_j - 1$ ne viene che $D_{\xi}^{\alpha, h} T^{\rho}(\chi u)$ sta in $H^{\frac{p}{q^{(q+\rho-\mu_j), q+\rho-\mu_j}}}$ (Ω_+) (dimostrazione analoga a quella fatta sopra) e quindi

$$\gamma_0(s_{\alpha h} D_{\xi}^{\alpha, h} T^{\rho}(\chi u)) \in H^{\frac{p}{q^{(q+\rho-\mu_j-1/2)}}}(\partial\Omega_+) \quad (\forall(\alpha, h)).$$

Applicando poi il Corollario 2 si ha

$$[T^p, s_{ah} \cdot] D_{\xi}^{\alpha, h}(\chi u) \in H^{\frac{p}{q}(q+\rho-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+),$$

ed anche

$$[B_j, T^p](\omega u) \in H^{\frac{p}{q}(q+\rho-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+).$$

In conclusione:

$$\gamma_0 B_j T^p(\omega u) \in H^{\frac{p}{q}(q+\rho-\mu_j-1/2)}(\partial\Omega_+), \quad j=0, 1, \dots, m-1.$$

Si riconosce dunque che $T^p(\omega u)$ verifica le ipotesi della Prop. 8 e quindi possiamo dire che $\exists \tau_2 \leq \tau_1$, tale che $\forall \varphi \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+)$, $\text{supp } (\varphi) \subset J_{\tau_2}$, si ha:

$$\varphi(T^p(\omega u)) \in H^{\frac{p}{q}(q+\rho), q+\rho}(\Omega_+).$$

D'altra parte:

$$\varphi T^p(\omega u) = T^p((\varphi \omega)u) + [\varphi \cdot, T^p](\omega u),$$

ma, per il Corollario 2:

$$[\varphi \cdot, T^p](\omega u) \in H^{\frac{p}{q}(q+\rho), q+\rho}(\Omega_+)$$

e quindi si può concludere che

$$T^p(\omega u) \in H^{\frac{p}{q}(q+\rho), q+\rho}(\Omega_+) \quad \text{se } \omega \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}_+), \quad \text{supp } (\omega) \subset J_{\tau_2}.$$

Dopo di ciò si prova, con un ragionamento più volte ripetuto che

$$D_x^{\alpha} D_y^h(\omega u) \in H^{\frac{p}{q}2p, 2p}(\Omega_+) \quad \text{se } \langle \alpha, 1/p \rangle + h/q \leq 1, \quad h \leq q-1$$

(se $\alpha=0$, ciò segue dal fatto che

$$(1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}} + \eta^2)^{2p} \eta^{2h} \leq (1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}} + \eta^2)^{q+\rho+(p-1)},$$

e, se $\alpha \neq 0$, dal fatto che

$$(1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}} + \eta^2)^{2p} \xi^{2\alpha} \eta^{2h} \leq C(1 + \langle \xi \rangle^{\frac{2}{q}} + \eta^2)^{\langle \alpha, \frac{q}{p} \rangle + h+\rho} t^p(\xi).$$

A tal punto si prova, come nella Prop. 8, che $D_y^q(\omega u) \in H^{\frac{p}{q-2p}, 2p}$. Basta allora richiamare il Lemma I per concludere che la tesi della Prop. 9 è vera (per $k=2$). c.v.d.

3. Ipoellitticità nel semispazio.

Riprendiamo in considerazione gli spazi definiti nei preliminari. Precisamente sia $(m_1, \dots, m_\nu) \in (\mathbf{R}^+)^{\nu}$ e $m = \max_j m_j$, $\gamma = (m/m_1, m/m_2, \dots, m/m_\nu)$, $|\gamma| = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{m}{m_j}$. Se $r \in \mathbf{R}$, poniamo:

$$J_r(\xi) = \left(\sum_{j=1}^{\nu} (1 + \xi_j^2)^{m_j/m} \right)^{r/2} \quad \xi \in \mathbf{R}^{\nu}.$$

J_r è, $\forall r \in \mathbf{R}$, un moltiplicatore di $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^{\nu})$.

DEFINIZIONE 10. Poniamo:

$$\mathcal{H}^r(\mathbf{R}^{\nu}) = \{ u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{\nu}) \mid \mathcal{F}_{\xi}^{-1}(J_r(\xi) \widehat{u}(\xi)) \in L^2(\mathbf{R}^{\nu}) \}$$

e

$$\mathcal{H}^r(\mathbf{R}^{\nu}) \ni u \mapsto \| u; \mathcal{H}^r \| = \| J_r(\xi) \widehat{u}(\xi); L^2(\mathbf{R}^{\nu}) \|$$

sia la norma (hilbertiana) su $\mathcal{H}^r(\mathbf{R}^{\nu})$.

Si osservi che se $\nu = n+1$, $m_j = p_j \in \mathbf{N}$, $j=1, \dots, n$; $m=q$, allora

$$\mathcal{H}^r(\mathbf{R}^{\nu}) \simeq H^{q^{\frac{p}{\sigma}, \sigma}}(\mathbf{R}^{n+1}) \text{ con } \sigma = \frac{q}{m}.$$

Si ha:

PROPOSIZIONE 10. Sia $r \in \mathbf{R}^+$, allora:

1) Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\nu)$ è un multiindice a componenti intere non negative tale che $\langle \alpha, \gamma \rangle + \frac{|\gamma|}{2} < r$, allora $u \in \mathcal{H}^r$ implica che $D^\alpha u$ (modificata eventualmente su un insieme di misura nulla) coincide con una

funzione continua su $\mathbf{R}^v$, infinitesima all' ∞ , che indicheremo ancora con $D^\alpha u$ e:

$$\sup_{\mathbf{R}^v} |D^\alpha u(x)| \leq C \|u\|_{\mathcal{H}^r}$$

$C \in \mathbf{R}^+$ è indipendente da u .

2) Se $\frac{|\gamma|}{2} < r < \frac{|\gamma|}{2} + 1$, allora $u \in \mathcal{H}^r$ implica che u (modificata eventualmente su un insieme di misura nulla) coincide con una funzione continua su $\mathbf{R}^v$, infinitesima all' ∞ , che indicheremo ancora con u e:

$$\sup_{\mathbf{R}^v} |u| + \sup_{x, h \in \mathbf{R}^v} |u(x+h) - u(x)| \left(\sum_1^v |h_j|^{\frac{m_j}{m} \left(r - \frac{|\gamma|}{2}\right)} \right)^{-1} \leq C \|u\|_{\mathcal{H}^r}$$

$C \in \mathbf{R}^+$ è indipendente da u .

$$3) \text{ Se } 0 < r < |\gamma|/2, \text{ allora } \mathcal{H}^r \hookrightarrow L^p \text{ con } \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{r}{|\gamma|}.$$

DIMOSTRAZIONE. Il risultato 1), 2) è in sostanza noto (vedi [15]). Qui diamo una dimostrazione un po' differente da quella che trovasi in [15]. Si osservi che se $m_j = m \forall j$ (quindi $|\gamma| = v$) si riottengono note disuguaglianze di Sobolev.

$$1) \text{ Se } \langle \alpha, \gamma \rangle + \frac{|\gamma|}{2} < r \text{ si ha:}$$

$$\begin{aligned} |\widehat{u}(\xi) \xi^\alpha| &\leq |\widehat{u}(\xi)| \left(\sum_1^v \xi_j^{2m_j} \right)^{\frac{\langle \alpha, \gamma \rangle}{2m}} \leq \\ &\leq C_1 |\widehat{u}(\xi)| \left(1 + \sum_1^v \xi_j^{2m_j/m} \right)^{\frac{\langle \alpha, \gamma \rangle}{2}} = \\ &= C_1 |u(\xi)| \left(1 + \sum \xi_j^{2m_j/m} \right)^{r/2} \left(1 + \sum \xi_{ju/\ell u \gamma} \right)^{-\frac{r - \langle \alpha, \gamma \rangle}{2}} \end{aligned}$$

e pertanto:

$$\int |\xi^\alpha \widehat{u}(\xi)| d\xi \leq C_2 \left(\int J_{2r}(\xi) |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int (1 + \sum \xi_j^{2m_j/m})^{-(r - \langle \alpha, \gamma \rangle)} d\xi \right)^{1/2}.$$

Ora:

$$\int (1 + \sum \xi_j^{2m_j/m})^{\langle \alpha, \gamma \rangle - r} d\xi = \int (1 + \sum \xi_j^{2m_j/m})^{-\rho} \frac{|\gamma|}{2} d\xi, \quad \rho = \frac{r - \langle \alpha, \gamma \rangle}{|\gamma|/2} > 1$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1 + \sum_{j=1}^v \xi_j^{2m_j/m})^{\rho|\gamma|/2}} d\xi &\leq C' \int \frac{1}{\prod_{k=1}^v (1 + \sum_{j=1}^v |\xi_j|^{\rho m_j/m})^{m/m_k}} d\xi \leq \\ &\leq C'' \int \frac{1}{\prod_{k=1}^v (1 + |\xi_k|^\rho + \sum_{j \neq k} |\xi_j|^{\rho m_j/m_k})} d\xi \leq C'' \int \frac{1}{\prod_{k=1}^v (1 + |\xi_k|^\rho)} d\xi < +\infty. \end{aligned}$$

Pertanto $\xi^a \widehat{u}(\xi) \in L^1(\mathbf{R}^v)$ e quindi $D^a u = \mathcal{F}_\xi^{-1}((i\xi)^a \widehat{u}(\xi)) \in C^0(\mathbf{R}^v)$ e $D^a u \rightarrow 0$ per $|x| \uparrow +\infty$; inoltre, dalle valutazioni fatte si ha:

$$\sup_{\mathbf{R}^v} |D^a u(x)| \leq (2\pi)^{-v} \int |\xi^a u(\xi)| d\xi \leq C \|u\|_{\mathcal{H}^r}.$$

Dove C non dipende da u .

2) Per 1) (con $\alpha=0$) si ha che u è continua su $\mathbf{R}^v$ ed infinitesima all' ∞ ; inoltre $\sup_{\mathbf{R}^v} |u(x)| \leq C \|u\|_{\mathcal{H}^r}$, con C indipendente da u .

Si ha poi:

$$\begin{aligned} |u(x+h) - u(x)| &= (2\pi)^{-v} \left| \int e^{i\langle x, \xi \rangle} [e^{i\langle h, \xi \rangle} - 1] \widehat{u}(\xi) d\xi \right| = \\ &= (2\pi)^{-v} \left| \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{e^{i\langle h, \xi \rangle} - 1}{(\sum |\xi_j|^{m_j/m})^r} (\sum |\xi_j|^{m_j/m})^r u(\xi) d\xi \right| \leq \\ &\leq (2\pi)^{-v} (\int (\sum |\xi_j|^{m_j/m})^{2r} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi)^{1/2} \psi(h)^{1/2} \leq C_1 \|u\|_{\mathcal{H}^r} \psi(h)^{1/2} \end{aligned}$$

dove:

$$\psi(h) = \int |e^{i\langle h, \xi \rangle} - 1|^2 (\sum |\xi_j|^{m_j/m})^{-2r} d\xi$$

con $C_1 \in \mathbf{R}^+$ indipendente da u . Ora $\psi(h) < +\infty \quad \forall h \in \mathbf{R}^v$. Infatti se $I = [-1, 1]^v$, si ha:

$$\int_I |e^{i\langle \xi, h \rangle} - 1|^2 (\sum |\xi_j|^{m_j/m})^{-2r} d\xi \leq C' \int_I \prod_{k=1}^v \frac{1}{(1 + |\xi_k|^\rho)} d\xi$$

dove $\rho = \frac{2r}{|\gamma|} > 1$ (basta ragionare come nella prova di 1)). Inoltre:

$$\begin{aligned} \int_I |e^{i\langle \xi, h \rangle} - 1|^2 (\Sigma |\xi_j|^{m_j/m})^{-2r} d\xi &= \int_I \left| \frac{e^{i\langle h, \xi \rangle} - 1}{\langle h, \xi \rangle} \right|^2 \frac{|\langle h, \xi \rangle|^2}{(\Sigma |\xi_j|^{m_j/m})^{2r}} d\xi \leq \\ &\leq C''(h) \sum_{j=1}^v \int_I \xi_k^2 (\Sigma |\xi_j|^{m_j/m})^{-2r} d\xi. \end{aligned}$$

Ora $2r < |\gamma| + 2$ e quindi $2r = \mu(|\gamma| + 2)$, $\mu \in]0, 1[$, sicchè:

$$(\Sigma |\xi_j|^{m_j/m})^{2r} \geq C_1 (\Sigma |\xi_j|^{\mu m_j/m})^{|\gamma|} (\Sigma |\xi_j|^{2\mu m_j/m})$$

e pertanto:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^v \int_I \xi_k^2 (\Sigma |\xi_j|^{m_j/m})^{-2r} d\xi &\leq C_1^{-1} \int_I \frac{\Sigma (\xi_k^{2\mu m_k/m} \cdot \xi_k^{2(1-\frac{\mu m_k}{m})})}{(\Sigma |\xi_j|^{\mu m_j/m})^{|\gamma|} (\Sigma |\xi_j|^{2\mu m_j/m})} d\xi \leq \\ &\leq C_2 \int_I (\Sigma |\xi_j|^{\mu m_j/m})^{-|\gamma|} d\xi \leq C_3 \int \prod_{k=1}^v |\xi_k|^{-\mu} d\xi < +\infty. \end{aligned}$$

Si osservi poi che:

$$\begin{aligned} \psi(h_1/(\Sigma |h_j|^{m_j/m})^{m/m_1}, \dots, h_v/(\Sigma |h_j|^{m_j/m})^{m/m_v}) = \\ = (\Sigma |h_j|^{m_j/m})^{|\gamma| - 2r} \psi(h_1, \dots, h_v). \end{aligned}$$

Poichè d'altra parte ψ è continua su $\mathbf{R}^v$ (convergenza dominata), allora:

$$\psi(h) \leq \max \{ \psi(\omega) \mid \sum_{j=1}^v |\omega_j|^{m_j/m} = 1 \} (\Sigma |h_j|^{m_j/m})^{2r - |\gamma|}.$$

Di qui e dalla 1) segue 2).

3) Sarà $\mathcal{H}^r \hookrightarrow L^p \Leftrightarrow J_{-r}(\xi)$ è un moltiplicatore (L^2 , L^p) (infatti $u \in \mathcal{H}^r \Leftrightarrow \widehat{u} = \widehat{J}_{-r} \widehat{v}$, $v \in L^2(\mathbf{R}^v)$).

Se α è un multiindice intero con $\alpha_j = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \forall j$ e $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$, allora:

$$|(\prod_{k=1}^v \xi_k^{a_k + \lambda}) D_\xi^\alpha (J_{-r}(\xi))| \leq C_\alpha \{ \prod_{k=1}^v |\xi_k|^\lambda \} (J_{-r}(\xi)), \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^v$$

$C_\alpha \in \mathbf{R}^+$ indipendente da ξ . Poichè $\prod_{k=1}^v |\xi_k|^\lambda \leq C J_r(\xi)$, per un teorema di Miklin-Lizorkin (vedi [10]), si ha l'asserto. c.v.d.

Si osservi che se $r \in \mathbf{R}^+$,

$$J_{2r}(\xi) \sim \sum_j (1 + \xi_j^2)^{\frac{m_j}{m} r}$$

e quindi se $r > \frac{2}{|\gamma|}$ allora

$$\frac{m_v}{m} r > \frac{1}{2} \frac{m_v}{m} \sum_1^v \frac{m}{m_j} = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_1^{v-1} \frac{m_v}{m_j} \right).$$

È quindi definita la traccia $\gamma_0 u$, $u \in \mathcal{H}^r$, sull'iperpiano $x_v = 0$ e (vedi B dei Preliminari):

$$\int_{\mathbf{R}^{v-1}} |\widehat{\gamma_0 u}(\xi^1)|^2 \sum_1^{v-1} (1 + \xi_j^2)^{\frac{m_j}{m_v} \left(\frac{m_v}{m} r - \frac{1}{2} \right)} d\xi^1 \leq C \|u\|_{\mathcal{H}^r}$$

$C \in \mathbf{R}^+$, indipendente da u .

Se $\mu = \max_{j=1, \dots, v-1} m_j$, allora

$$\frac{m_j}{m_v} \left(\frac{m_v}{m} r - \frac{1}{2} \right) = \frac{m_j}{\mu} \left(\frac{\mu}{m} r - \frac{\mu}{2m_v} \right).$$

Pertanto se $\frac{|\gamma|}{2} < r < \frac{|\gamma|}{2} + 1$ si ha:

$$\frac{1}{2} \sum_1^{v-1} \frac{\mu}{m_j} < \mu \left(\frac{r}{m} - \frac{1}{2m_v} \right) < \frac{1}{2} \sum_1^{v-1} \frac{\mu}{m_j} + 1.$$

(da una parte $\mu \frac{r}{m} > \frac{1}{2} \mu \sum_1^v \frac{1}{m_k}$ perchè $r > \frac{|\gamma|}{2}$ e dall'altra: $\mu \frac{r}{m} < \frac{1}{2} \sum_1^v \frac{\mu}{m_k} + 1$ e quindi $\mu r < \frac{1}{2} \mu |\gamma| + m$ e $r < \frac{|\gamma|}{2} + \frac{m}{\mu}$, ma $m \geq \mu$ e poichè $r < \frac{|\gamma|}{2} + 1$ si ha la doppia disuglianza indicata).

Dunque se $u \in \mathcal{H}^r$ con $\frac{|\gamma|}{2} < r < \frac{|\gamma|}{2} + 1$, la traccia $\gamma_0 u$, su $x_v = 0$,

coincide (salvo modifica su un insieme di misura nulla) con una funzione continua, infinitesima all' ∞ e hölderiana; precisamente:

$$\begin{aligned} & \sup_{x', h} \frac{|(\gamma_0 u)(x' + h) - (\gamma_0 u)(x')|}{\sum_{j=1}^{v-1} |h_j|^{\frac{m_j}{\mu} \left(\frac{\mu r}{m} - \frac{\mu}{2m\nu} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{v-1} \frac{\mu}{m_k} \right)}} = \\ & = \sup_{x', h} \frac{|(\gamma_0 u)(x' + h) - (\gamma_0 u)(x')|}{\sum_{j=1}^{v-1} |h_j|^{\frac{m_j}{m} \left(r - \frac{|\gamma|}{2} \right)}} < +\infty. \end{aligned}$$

Se indichiamo con $\mathcal{H}'(\Omega_+)$ il sottospazio di $\mathfrak{D}'(\Omega_+)$ costituito dalle restrizioni ad $\bar{\Omega}_+$ degli elementi di $\mathcal{H}'$, con la topologia quoziente naturale, allora sussistono i risultati della Prop. 10 relativamente ad $\mathcal{H}'(\Omega_+)$ (è sufficiente servirsi del più volte citato operatore di prolungamento continuo $E: \mathcal{H}'(\Omega_+) \rightarrow \mathcal{H}'(\mathbf{R}^n)$, $r_+ E = 1$).

Dalle Prop. 9 e 10 si deduce la:

PROPOSIZIONE 11. *Sia A propriamente quasi-ellittico di tipo m su $\bar{\Omega}_+$ a coefficienti in $C^\infty(\bar{\Omega}_+)$ e $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ una famiglia di operatori differenziali su Ω_+ a coefficienti in $C^\infty(\bar{\Omega}_+)$ ricoprente A su $\partial\bar{\Omega}_+$ e con ordini trasversali $\mu_j \leq q-1$ ($j=0, \dots, m-1$). Sia $u \in H^{p,q}(\Omega_+)$ tale che $Au \in C^\infty(\bar{\Omega}_+)$ e $\gamma_0 B_j u \in C^\infty(\partial\Omega_+)$ ($j=0, \dots, m-1$); allora $u \in C^\infty(\bar{\Omega}_+)$.*

4. Applicazione ai problemi ai limiti quasi-ellittici.

Diamo ora una applicazione dei risultati di regolarità ottenuti, alle soluzioni dei problemi ai limiti quasi-ellittici. Per semplicità faremo ipotesi di massima regolarità sui dati.

Sia $\Omega(\mathcal{O})$ un aperto limitato di $\mathbf{R}^m(\mathbf{R}^n)$ tale che $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ ($\bar{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \cup \partial\mathcal{O}$) sia una C^∞ varietà con bordo $\partial\Omega(\partial\mathcal{O})$ m -dimensionale (n -dimensionale). Sia $\{\Omega_i\}_{i=1}^I(\{\mathcal{O}\}_{j=1}^J)$ un ricoprimento di $\partial\Omega(\partial\mathcal{O})$ aperto in $\mathbf{R}^m(\mathbf{R}^n)$ e $\{\chi_i\}_{i=1}^I(\{\varphi_j\}_{j=1}^J)$ una famiglia di applicazioni tali che:

- 1) per $i=1, 2, \dots, I$:

$$\chi_i : \Omega_i \rightarrow \mathcal{Q}_m = \{u \in \mathbf{R}^m \mid u = (u', u_m), \mid u' \mid < 1, u_m \in]-1, 1[\}$$

sia un C^∞ -diffeomorfismo in modo che:

$$\chi_i : \Omega_i \cap \Omega \rightarrow \mathcal{Q}_m^+ = \{u \in \mathcal{Q}_m \mid u_m > 0\}$$

$$\chi_i : \partial\Omega_i \cap \Omega \rightarrow \mathcal{Q}_m^0 = \{u \in \mathcal{Q}_m \mid u_m = 0\}$$

inoltre le χ_i verifichino le consuete condizioni di compatibilità.

2) per $j=1, 2, \dots, J$:

$$\varphi_j : \mathcal{O}_j \rightarrow \mathcal{Q}_n = \{v \in \mathbf{R}^n \mid v = (v', v_n), \mid v' \mid < 1, v_n \in]-1, 1[\}$$

sia un C^∞ -diffeomorfismo in modo che:

$$\varphi_j : \mathcal{O}_j \cap \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{Q}_n^+ = \{v \in \mathcal{Q}_n \mid v_n > 0\}$$

$$\varphi_j : \mathcal{O}_j \cap \partial\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{Q}_n^0 = \{v \in \mathcal{Q}_n \mid v_n = 0\}$$

inoltre le φ_j verifichino le consuete condizioni di compatibilità.

Poniamo $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}$, $\Omega_0 = \Omega$ e $\varphi_0 = 1_{\mathcal{O}}$, $\chi_0 = 1_{\Omega}$. Sia poi $\{\omega_i\}_{i=0}^I (\{\zeta_j\}_{j=0}^J)$ una C^∞ -partizione dell'unità relativa al ricoprimento $\{\Omega_i\}_{i=0}^I (\{\mathcal{O}_j\}_{j=0}^J)$ di $\overline{\Omega}(\overline{\mathcal{O}})$.

Supponiamo assegnato su $\overline{\Omega \times \mathcal{O}}$ l'operatore differenziale:

$$(37) \quad A(x, y; D_x, D_y) = \sum_{|\alpha|/p + |\beta|/q \leq 1} \alpha_{\alpha\beta}(x, y) D_x^\alpha D_y^\beta$$

essendo $p, q \in \mathbf{N}$, $|\alpha|/p + |\beta|/q = \sum_1^m \alpha_j/p + \sum_1^n \beta_j/q$. Ammettiamo che $a_{\alpha\beta} \in C^\infty(\overline{\Omega \times \mathcal{O}})$ per ogni α, β . Chiamiamo parte principale dell'operatore definito in (37), l'operatore:

$$(38) \quad A_0(x, y; D_x, D_y) = \sum_{|\alpha|/p + |\beta|/q = 1} \alpha_{\alpha\beta}(x, y) D_x^\alpha D_y^\beta.$$

Sia $(x, y) \in \Omega_i \times \mathcal{O}_j$ e poniamo: $\theta_{ij} : (x, y) \mapsto (\chi_i(x), \varphi_j(y))$.

Consideriamo il diagramma (supposto $i \neq 0, j \neq 0$):

$$\theta_{ij}^* \left[\begin{array}{ccc} C^\infty((\Omega_i \cap \overline{\Omega}) \times (\mathcal{O}_j \cap \overline{\mathcal{O}})) & \xrightarrow{A} & C^\infty((\Omega_j \cap \overline{\Omega}) \times (\mathcal{O}_j \cap \overline{\mathcal{O}})) \\ & \searrow^{A_{ij}} & \\ C^\infty(\overline{\mathcal{Q}_m^+} \times \overline{\mathcal{Q}_n^+}) & \longrightarrow & C^\infty(\overline{\mathcal{Q}_m^+} \times \overline{\mathcal{Q}_n^+}) \end{array} \right] \theta_{ij*}$$

dove $\theta_{ij}^* : f \mapsto f \circ \theta_{ij}$, $\theta_{ij*} : g \mapsto g \circ \theta_{ij}^{-1}$ ed A_{ij} definito in modo da rendere commutativo il diagramma. A_{ij} è un operatore differenziale su $\overline{\mathcal{Q}}_m^+ \times \overline{\mathcal{Q}}_n^+$ (a coefficienti di classe C^∞ e si scriverà:

$$(39) \quad A_{ij}(u, v; D_u, D_v) = \sum_{|\alpha|/p + |\beta|/q \leq 1} b_{\alpha\beta}(u, v) D_u^\alpha D_v^\beta$$

(considerazioni analoghe per $i=0$ o $j=0$).

Sull'operatore A faremo la seguente:

IPOTESI 1.

a) $(x, y) \in \overline{\Omega \times \mathcal{O}}$, $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$, $|\xi| + |\eta| > 0 \Rightarrow A_0(x, y; i\xi, i\eta) \neq 0$.

b) Se $(x, y) \in \partial\Omega \times \mathcal{O}$, $\xi \in T_x^*(\partial\Omega)^2$, $\rho \notin T_x^*(\partial\Omega)$, $\eta \in \mathbf{R}^n$, $|\xi| + |\eta| > 0$, allora il polinomio in λ : $A_0(x, y; i\xi + \lambda\rho, i\eta)$ ha r ($r \in \mathbf{N}$) radici a parte reale negativa e $p-r$ a parte reale positiva.

c) Se $(x, y) \in \Omega \times \partial\mathcal{O}$, $\xi \in \mathbf{R}^m$, $\eta \in T_y^*(\partial\mathcal{O})$, $\nu \notin T_y^*(\partial\mathcal{O})$, $|\xi| + |\eta| > 0$, allora il polinomio in λ : $A_0(x, y; i\xi, i\eta + \lambda\nu)$ ha s ($s \in \mathbf{N}$) radici a parte reale negativa e $q-s$ a parte reale positiva.

Brevemente diremo allora che l'operatore A è propriamente quasi-ellittico di tipo (r, s) su $\overline{\Omega \times \mathcal{O}}$.

Siano poi assegnate due famiglie di operatori differenziali:

$$\{B_j(x, D_x)\}_{j=0}^{r-1}, \{Q_j(y, D_y)\}_{j=0}^{s-1}, \text{ dove:}$$

$$(40) \quad \begin{cases} B_j(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m_j} a_{\alpha,j}(x) D_x^\alpha \\ \text{con } a_{\alpha,j} \in C^\infty(\overline{\Omega}) \text{ e } m_j \in \mathbf{N} \cup \{0\}, m_j \leq p-1 \end{cases} \quad j=0, 1, \dots, r-1,$$

$$(41) \quad \begin{cases} Q_j(y, D_y) = \sum_{|\beta| \leq n_j} b_{\beta,j}(y) D_y^\beta \\ \text{con } b_{\beta,j} \in C^\infty(\overline{\mathcal{O}}) \text{ e } n_j \in \mathbf{N} \cup \{0\}, n_j \leq q-1 \end{cases} \quad j=0, 1, \dots, s-1.$$

²⁾ Con $T_x^*(\partial\Omega)$ si indica lo spazio cotangente in x a $\partial\Omega$.

Indichiamo poi con $B_j^0(Q_j^0)$ la parte principale di $B_j(Q_j)$, cioè la somma dei termini nelle derivate di ordine massimo.

Diremo che il sistema $(\{B_j\}, \{Q_j\})$ ricopre A su $\partial(\Omega \times \mathcal{O})$ se è soddisfatta la seguente ipotesi:

IPOTESI 2.

a) Se $(x, y) \in \partial\Omega \times \mathcal{O}$, $\xi \in T_x^*(\partial\Omega)$, $\rho \notin T_x^*(\partial\Omega)$, $\eta \in \mathbf{R}^n$, $|\xi| + |\eta| > 0$, il problema:

$$\begin{cases} A_0(x, y; i\xi + \rho D_t, i\eta)u(t) = f(t), & t \geq 0 \\ B_j^0(x, i\xi + \rho D_t)u(t)|_{t=0} = c_j, & j = 0, 1, \dots, r-1 \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione in $\mathcal{S}(\bar{\mathbf{R}}^+)$ per ogni $f \in \mathcal{S}(\bar{\mathbf{R}}^+)$ e per ogni $(c_0, \dots, c_{r-1}) \in \mathbf{C}^r$.

b) Se $(x, y) \in \Omega \times \partial\mathcal{O}$, $\xi \in \mathbf{R}^m$, $\eta \in T_x^*(\partial\mathcal{O})$, $\nu \notin T_x^*(\partial\mathcal{O})$, $|\xi| + |\eta| > 0$, il problema:

$$\begin{cases} A_0(x, y; i\xi, i\eta + \nu D_t)u(t) = f(t), & t \geq 0 \\ Q_j^0(y; i\eta + \nu D_t)u(t)|_{t=0} = c_j, & j = 0, 1, \dots, s-1 \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione in $\mathcal{S}(\bar{\mathbf{R}}^+)$ per ogni $f \in \mathcal{S}(\bar{\mathbf{R}}^+)$ e per ogni $(c_0, \dots, c_{s-1}) \in \mathbf{C}^s$.

Se A verifica l'ipotesi 1 e $(\{B_j\}, \{Q_j\})$ l'ipotesi 2 si dirà che il sistema $(A, \{B_j\}_{j=0}^{r-1}, \{Q_j\}_{j=0}^{s-1})$ è quasi-ellittico regolare di tipo (r, s) su $\bar{\Omega} \times \bar{\mathcal{O}}$.

Richiamiamo brevemente la definizione degli spazi $H^{\alpha, \beta}(\Omega \times \mathcal{O})$, $H^{\alpha, \beta}(\partial\Omega \times \mathcal{O})$, $H^{\alpha, \beta}(\Omega \times \partial\mathcal{O})$, $H^{\alpha, \beta}(\partial\Omega \times \partial\mathcal{O})$ (vedi a tale proposito [6], [12], [15]). Posto, per $\alpha, \beta \geq 0$:

$$\begin{aligned} H^{\alpha, \beta}(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n) = \{ & u \in L^2(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n) \mid [(1 + |\xi|^2)^{\alpha/2} + \\ & + (1 + |\eta|^2)^{\beta/2}] \widehat{u}(\xi, \eta) \in L^2(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n) \} \end{aligned}$$

con la norma naturale, restano definiti, per restrizione: $H^{\alpha, \beta}(\mathbf{R}_+^m \times \mathbf{R}^n)$, $H^{\alpha, \beta}(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+^n)$ e $H^{\alpha, \beta}(\mathbf{R}_+^m \times \mathbf{R}_+^n)$. Ciò premesso, se $\{\Omega_i\}_{i=0}^I (\{\mathcal{O}_i\}_{i=0}^I)$ è il ricoprimento indicato più sopra e $\{\omega_i\}_{i=0}^I (\{\zeta_j\}_{j=0}^J)$ una C^∞ -partizione

dell'unità associata, diremo che $f \in L^2(\Omega \times \mathcal{O})$ è in $H^{\alpha, \beta}(\Omega \times \mathcal{O})$ se:

$$f_0(x, y) = \omega_0(x) \zeta_0(y) u(x, y) \in H^{\alpha, \beta}(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n)$$

$$f_{i,0}(u, y) = \omega_i(\chi_i^{-1}(u)) \zeta_0(y) u(\chi_i^{-1}(u), y) \in H^{\alpha, \beta}(\mathbf{R}_+^m \times \mathbf{R}^n), \quad i=1, 2, \dots, I$$

$$f_{0,j}(x, v) = \omega_0(x) \zeta_j(\varphi_j^{-1}(v)) u(x, \varphi_j^{-1}(v)) \in H^{\alpha, \beta}(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+^n), \quad j=1, 2, \dots, J$$

$$f_{i,j}(u, v) = \omega_i(\chi_i^{-1}(u)) \zeta_j(\varphi_j^{-1}(v)) u(\chi_i^{-1}(u), \varphi_j^{-1}(v)) \in H^{\alpha, \beta}(\mathbf{R}_+^m \times \mathbf{R}_+^n),$$

$$\begin{cases} i=1, \dots, I \\ j=1, \dots, J \end{cases}$$

(le f_{ij} , $i=0, \dots, I$, $j=0, \dots, J$ si intendono opportunamente prolungate con lo zero). Su $H^{\alpha, \beta}(\Omega \times \mathcal{O})$ si mette la norma naturale. Tale norma dipende ovviamente dai ricoprimenti e dalle partizioni dell'unità, ma è possibile provare la topologia definita ne è indipendente. Analogamente diremo che $f \in H^{\alpha, \beta}(\partial\Omega \times \mathcal{O})$ se $f: \partial\Omega \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{C}$ tale che:

$$\omega_i(\chi_i^{-1}(u)) \zeta_0(y) f(\chi_i^{-1}(u), y) \in H^{\alpha, \beta}(\mathbf{R}^{m-1} \times \mathbf{R}^n), \quad i=1, \dots, I.$$

In modo analogo si definisce $H^{\alpha, \beta}(\Omega \times \partial\mathcal{O})$ ed infine diremo che $f \in H^{\alpha, \beta}(\partial\Omega \times \partial\mathcal{O})$ se $f: \partial\Omega \times \partial\mathcal{O} \rightarrow \mathbf{C}$ ed è tale che:

$$\omega_i(\chi_i^{-1}(u)) \zeta_j(\varphi_j^{-1}(v)) f(\chi_i^{-1}(u), \varphi_j^{-1}(v)) \in H^{\alpha, \beta}(\mathbf{R}^{m-1} \times \mathbf{R}^{n-1}).$$

La topologia è quella naturale.

Siano ora $\{B_j\}_{j=0}^{r-1}$, $\{Q_j\}_{j=0}^{s-1}$ gli operatori differenziali definiti in (40), (41). Vale il seguente teorema di tracce:

E. Si consideri l'applicazione:

$$\vec{\gamma}: C^\infty(\overline{\Omega \times \mathcal{O}}) \rightarrow C^\infty(\partial\Omega \times \overline{\mathcal{O}})^r \times C^\infty(\overline{\Omega} \times \partial\mathcal{O})^s$$

così definita:

$$\vec{\gamma}: u \mapsto (B_0 u|_{\partial\Omega \times \mathcal{O}}, \dots, B_{r-1} u|_{\partial\Omega \times \mathcal{O}}, Q_0 u|_{\Omega \times \partial\mathcal{O}}, \dots, Q_{s-1} u|_{\Omega \times \partial\mathcal{O}}).$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$, $\alpha - 1/2 > \max_j m_j$, $\beta - 1/2 > \max_j n_j$, l'applicazione $\vec{\gamma}$

si prolunga con continuità in una applicazione (indicata ancora con $\vec{\gamma}$):

$$\vec{\gamma} : H^{\alpha, \beta}(\Omega \times \mathcal{O}) \rightarrow \prod_{j=0}^{r-1} H^{\alpha_j, \beta_j}(\partial\Omega \times \mathcal{O}) \times \prod_{j=0}^{s-1} H^{\mu_j, \nu_j}(\Omega \times \partial\mathcal{O})$$

con:

$$\alpha_j/\alpha = \beta_j/\beta = (\alpha - m_j - 1/2)/\alpha, \quad j=0, 1, \dots, r-1$$

$$\mu_j/\alpha = \nu_j/\beta = (\beta - n_j - 1/2)/\beta, \quad j=0, 1, \dots, s-1.$$

Per una dimostrazione si veda ad es. [6].

Sia ora $(A, \{B_j\}_{j=0}^{r-1}, \{Q_j\}_{j=0}^{s-1})$ un sistema quasi-ellittico regolare di tipo (r, s) su $\Omega \times \mathcal{O}$. Posto $\sigma \in \mathbf{R}^+$, $\sigma > 1$, resta definita (per E) una applicazione continua:

$$\Phi : H^{p\sigma, q\sigma}(\Omega \times \mathcal{O}) \rightarrow H^{p(\sigma-1), q(\sigma-1)}(\Omega \times \mathcal{O}) \times K_{\sigma}^{p, q}(\partial\Omega \times \partial\mathcal{O})$$

dove $\Phi : u \rightarrow (Au, \vec{\gamma}u)$ e:

$$K_{\sigma}^{p, q}(\partial\Omega \times \partial\mathcal{O}) = \prod_{j=0}^{r-1} H^{p_k(\sigma), q_k(\sigma)}(\partial\Omega \times \mathcal{O}) \times \prod_{j=0}^{s-1} H^{\mu_j(\sigma), \nu_j(\sigma)}(\Omega \times \partial\mathcal{O})$$

con:

$$p_k(\sigma)/p = q_k(\sigma)/q = (p\sigma - m_k - 1/2)/p \quad k=0, 1, \dots, r-1$$

$$\mu_j(\sigma)/p = \nu_j(\sigma)/q = (q\sigma - n_j - 1/2)/q \quad j=0, 1, \dots, s-1.$$

Possiamo ora enunciare il risultato seguente:

PROPOSIZIONE 10. Se:

- 1) $u \in H^{p, q}(\Omega \times \mathcal{O})$.
- 2) $\Phi u \in H^{p(\sigma-1), q(\sigma-1)} \times K_{p, q}^{\sigma}$;

allora $\forall \varphi \in C_0^{\infty}(\overline{\Omega \times \mathcal{O}} - (\partial\Omega \times \partial\mathcal{O}))$ si ha $\varphi u \in H^{p\sigma, q\sigma}(\Omega \times \mathcal{O})$.

DIMOSTRAZIONE. Per localizzazione ci si riporta in un semispazio di $\mathbf{R}^{m+n}$ ed allora si usa la Prop. 9.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ARKERYD L.: *On L^p -estimates for quasi-elliptic boundary problems*. Math. Scand., Vol. 24, fasc. I (1969), pp. 141-144.
- [2] BAROZZI G. C.: *Sulla struttura degli operatori quasi-ellittici*. Atti convegno sulle Equaz. a derivate parziali (Nervi, 1965), Ed. Cremonese (Roma), pp. 25-32.
- [3] BAROZZI G. C.: *Un problema al contorno non omogeneo in un dominio angoloso per equazioni fortemente quasi-ellittiche in due variabili*. Rend. Sem. Mat Univ. di Padova, Vol. XLIV, pp. 27-63.
- [4] CAVALLUCCI A.: *Sulle proprietà differenziali delle soluzioni delle equazioni quasi ellittiche*. Ann. Mat. Pura Appl., Vol. 67 (1965), pp. 143-168.
- [5] GIUSTI E.: *Equazioni quasi ellittiche e spazi $\mathcal{L}^{p,0}$, (II)*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Vol. XXI-III (1967), pp. 353-372.
- [6] GRISVARD P.: *Équations différentielles abstraites*. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4-met serie, t. 2 (1969), pp. 311-395.
- [7] HARDY G., LITTLEWOOD J., POLYA G.: *Inequalities*. Cambridge (1934).
- [8] HÖRMANDER L.: *Linear partial differential operators*. Springer Verlag (Berlino, 1964).
- [9] LIONS J. L., MAGENES E.: *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Vol. I e II, Dunod (Parigi, 1968).
- [10] LIZORKIN P. I.: *Sui moltiplicatori dell'integrale di Fourier negli spazi $L_{p,0}$* . Trudy Mat. Inst. Stek. Akad. Nauk SSSR, Vol. LXXXIX, 2 (1967), pp. 231-250 (in russo).
- [11] MATSUZAWA T.: *On quasi-elliptic boundary problems*. Transac. Amer. Math. Soc., Vol. 133 (1968), pp. 241-265.
- [12] PAGNI M.: *Problemi al contorno per una certa classe di equazioni lineari alle derivate parziali*. Atti Sem. Mat. Fis. Modena, (1964), pp. 119-164.
- [13] PINI B.: *Su un problema tipico relativo ad una certa classe di equazioni ipoellittiche*. Atti Acc. Sc. Ist. Bologna, Serie XII, t. 1, (1964), pp. 25-50.
- [14] PINI B.: *Sulla rappresentazione delle soluzioni delle equazioni quasi-ellittiche in una regione angolosa*. Ann. Mat. Pura Appl., Vol. 80 (1968), pp. 359-372.
- [15] SLOBODETSKI L. N.: *Spazi di Sobolev generalizzati e applicazioni ai problemi al contorno per le equazioni differenziali a derivate parziali*. Uchen. Zap. Leningrad Gos. Ped. Inst., Vol. 197 (1958), pp. 54-112, (in russo).
- [16] VOLEVIC L. P.: *Proprietà locali delle soluzioni dei sistemi quasi-ellittici*. Mat. Sbornik., Vol. 59 (101), (1962), pp. 1,52, (in russo).

Manoscritto pervenuto in redazione il 30 ottobre 1970.