RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCO PARODI

Simmetrizzazioni di una categoria

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 44 (1970), p. 185-222

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__44__185_0>

SIMMETRIZZAZIONI DI UNA CATEGORIA

FRANCO PARODI *)

PARTE I

PREMESSE GENERALI

Introduzione.

Lo scopo di questa parte I è quello di porgere al lettore alcune premesse di carattere generale relative a questioni di algebra delle categorie, alcune note, altre originali, che verranno utilizzate nella parte II, alla quale farà seguito poi una parte III. Si è ritenuto opportuno, per comodità del lettore, riportare alcune dimostrazioni di proposizioni che, pur note, sono sparse in vari lavori sull'argomento. Si introducono inoltre in questa parte le nozioni di « quadrato $\vee$-esatto » e « quadrato $\wedge$-esatto » con relative proprietà.

Chiudono infine questa parte le caratterizzazioni di Equalizzatore, Coequalizzatore, Pull-Back e Push-Out nelle categorie degli insiemi, degli Spazi Topologici ed in categorie Abeliane, e l'illustrazione, mediante opportuni esempi, di alcune anomalie che si presentano nella categoria degli insiemi e degli spazi topologici.

---

*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica, Università di Genova, Via L. B. Alberti, 4, 16132 Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei programmi di ricerca matematica del C.N.R. (Contratto di ricerca n. 13).

Tutti gli enunciati di questa parte I si riferiscono ad una generica categoria $\mathcal{C}$ sulla quale non si fa alcuna ipotesi specifica, salvo esplicito avviso; ciascuna proposizione ammette l'ovvio enunciato duale del quale ometteremo in genere l'esplicita formulazione.

Useremo la notazione antilessicografica per indicare la composizione di mappe consecutive di $\mathcal{C}$:

« epic » indicherà cancellabile a destra,

« monic » indicherà cancellabile a sinistra.

Siano $\varphi : X \to A$, $\psi : X \to B$ mappe di $\mathcal{C}$ ed esista il prodotto $A \times B$, noteremo $\{\varphi, \psi\}$ la mappa che rende commutativo il diagramma seguente in cui π_A, π_B sono le proiezioni del prodotto sui fattori:

$$\begin{tikzcd}
 & A \\
X \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "{\{\varphi, \psi\}}"] \arrow[dr, "\psi"'] & A \times B \arrow[u, "\pi_A"'] \arrow[d, "\pi_B"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

Siano $\rho : A \to X$, $\sigma : B \to X$ mappe di$\mathcal{C}$ ed esista la somma $A+B$ (coprodotto), noteremo $\langle \rho, \sigma \rangle$ la mappa che rende commutativo il diagramma seguente in cui ι_A, ι_B sono le iniezioni di A e B nella somma:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\iota_A"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\
A+B \arrow[r, "{\langle \rho, \sigma \rangle}"] & X \\
B \arrow[u, "\iota_B"] \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

DEFINIZIONE 1.1. Una mappa $\mu : A' \to A$ è un monomorfismo [1]) se

1) μ è monic
2) per ogni quadrato commutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & A' \arrow[d, "\mu"] \\ X'' \arrow[r, "\alpha"'] & A \end{tikzcd}$$

con ε epic, esiste una mappa π (necessariamente unica) tale che il diagramma seguente commuti

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & A' \arrow[d, "\mu"] \\ X'' \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[ur, "\pi"] & A \end{tikzcd}$$

DEFINIZIONE 1.1*. Una mappa $\varepsilon : A \to A''$ è un epimorfismo se

1) ε è epic
2) per ogni quadrato commutativo

$$\begin{tikzcd} X & A'' \arrow[l, "\alpha''"'] \\ X' \arrow[u, "\mu"] & A \arrow[l, "\alpha"] \arrow[u, "\varepsilon"'] \end{tikzcd}$$

con μ monic, esiste una mappa (necessariamente unica) tale che il diagramma seguente commuti

$$\begin{tikzcd} X & A'' \arrow[l, "\alpha''"'] \arrow[dl, "\pi"'] \\ X' \arrow[u, "\mu"] & A \arrow[l, "\alpha"] \arrow[u, "\varepsilon"'] \end{tikzcd}$$

PROPOSIZIONE 1.1. Se $A_2 \to A_1$ e $A_1 \to A$ sono monomorfismi allora la loro composizione $A_2 \to A_1 \to A$ è un monomorfismo.

---

[1]) La presente definizione è di P. Arduini per ulteriori dettagli vedi [1].

PROPOSIZIONE 1.2. Se la composizione $A_2 \to A_1 \to A$ è un monomorfismo, allora $A_2 \to A_1$ è un monomorfismo.

PROPOSIZIONE 1.3. Un epic monomorfismo è un isomorfismo.

PROPOSIZIONE 1.4. Una coretrazione è monomorfismo.

OSSERVAZIONE 1.1. Nelle seguenti categorie monomorfismi sono tutte e sole le inclusioni di ordinari sottospazi:

— Insiemi ordinati - Lattici (con morfismi di lattici) - Gruppi - Spazi topologici - Spazi uniformi - Gruppi topologici - Spazi compatti.

OSSERVAZIONE 1.2. Ogni monic è monomorfismo nella categoria $\mathcal{C}$ se $\mathcal{C}$ è:

— la categoria degli insiemi - la categoria dei gruppi - una categoria esatta (in particolare Abeliana).

DEFINIZIONE 1.2. Si dice che una mappa $\varphi : A \to B$ ammette fattorizzazione epic-mono se esistono $\varepsilon : A \to X$ epic, $\mu : X \to B$ monomorfismo tali che

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & B \\ & X \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

commuti.

Diremo che la coppia di mappe $\varepsilon : A \to X$, $\mu : X \to B$ è una fattorizzazione epic-mono di $\varphi : A \to B$.

DEFINIZIONE 1.2*. Si dice che una mappa $\varphi : A \to B$ ammette fattorizzazione epi-monic se esistono $\varepsilon : A \to X$ epimorfismo, $\mu : X \to B$ monic tali che

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & B \\ & X \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

commuti.

Diremo che la coppia di mappe $\varepsilon : A \to X$, $\mu : X \to B$ è una fattorizzazione epi-monic di $\varphi : A \to B$.

Proposizione 1.5. Se la mappa $\varphi : A \to B$ ammette fattorizzazione epic-mono, questa è individuata univocamente a meno di isomorfismi.

Dim. Siano $\varepsilon : A \to X$, $\mu : X \to B$ e $\varepsilon' : A \to X'$, $\mu' : X' \to B$ due fattorizzazioni epic- mono di φ.

Consideriamo il quadrato commutativo seguente:

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dr, "\mu'"] & \\ A \arrow[ur, "\varepsilon'"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & B \\ & X \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

Poichè μ' monomorfismo ed ε epic, μ monomorfismo ed ε' epic, esiste un'unica mappa $\sigma : X \to X'$ ed esiste una unica mappa $\rho : X' \to X$ tali che

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dr, "\mu'"] \arrow[dd, shift left, "\rho"] & \\ A \arrow[ur, "\varepsilon'"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & B \\ & X \arrow[ur, "\mu"'] \arrow[uu, shift left, "\sigma"] & \end{tikzcd}$$

commuti.

Dalle eguaglianze $\sigma\rho\varepsilon' = \sigma\varepsilon = \varepsilon'$, $\rho\sigma\varepsilon = \rho\varepsilon' = \varepsilon$ essendo ε ed ε' epic si ha $\sigma\rho = 1$ e $\rho\sigma = 1$.

Indicheremo un quadrato del tipo

$$\begin{tikzcd} & D & \\ A \arrow[ur, "\rho"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \\ & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

con la notazione $(\varphi, \psi; \rho, \sigma)$.

Definizione 1.3. Un quadrato $(\varphi, \psi; \psi', \varphi')$ è Push-Out se

1) $(\varphi, \psi; \psi', \varphi')$ è commutativo

2) qualunque sia $(\varphi, \psi; \alpha, \beta)$ commutativo esiste una ed una sola mappa π che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
 & P \arrow[u, "\pi"'] & \\
A \arrow[uur, "\alpha"] \arrow[ur, "\psi'"'] & & B \arrow[uul, "\beta"'] \arrow[ul, "\varphi'"] \\
 & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Definizione 1.3*. Un quadrato $(\sigma', \rho'; \rho, \sigma)$ è Pull-Bak se

1) $(\rho', \sigma'; \rho, \sigma)$ è commutativo

2) qualunque sia $(\alpha, \beta; \rho, \sigma)$ commutativo esiste una ed una sola mappa π che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
A \arrow[ur, "\rho"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \\
 & P \arrow[ul, "\sigma'"] \arrow[ur, "\rho'"'] & \\
 & X \arrow[u, "\pi"'] \arrow[uul, "\alpha"] \arrow[uur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Proposizione 1.6. Se $(\varphi, \psi; \psi', \varphi')$ e $(\varphi, \psi; \psi'', \varphi'')$ sono Push Out, allora esiste uno ed uno solo isomorfismo σ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& Q & \\
& P \arrow[u, "\sigma"] & \\
A \arrow[uur, "\psi''"] \arrow[ur, "\psi'"] & & B \arrow[uul, "\varphi''"'] \arrow[ul, "\varphi'"'] \\
& C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Dim. Poichè $(\varphi, \psi; \psi', \varphi')$ è Push Out e $(\varphi, \psi; \psi'', \varphi'')$ è Push Out, quindi commutativo, esiste ed è unica la mappa $\sigma : P \to Q$ tale che $\sigma\psi' = \psi''$ e $\sigma\varphi' = \varphi''$.

Poichè $(\varphi, \psi; \psi'', \varphi'')$ è Push Out e $(\varphi, \psi; \psi', \varphi'$ è Push Out, quindi commutativo, esiste ed è unica la mappa $\rho : Q \to P$ tale che $\rho\psi'' = \psi'$ e $\rho\varphi'' = \varphi'$. Possiamo allora considerare il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
& P & \\
& Q \arrow[u, "\rho"] & \\
& P \arrow[u, "\sigma"] & \\
A \arrow[uuur, "\psi'"] \arrow[uur, "\psi''"] \arrow[ur, "\psi'"] & & B \arrow[uuul, "\varphi'"'] \arrow[uul, "\varphi''"'] \arrow[ul, "\varphi'"'] \\
& C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Poichè anche la mappa $1 : P \to P$ rende commutativo il diagramma e $(\varphi, \psi; \psi', \varphi')$ è Push Out, si ha $\rho\sigma = 1$.

Si prova analogamente che $\sigma\rho = 1$.

PROPOSIZIONE 1.7. Se $(\varphi, \psi; \psi', \varphi')$ è Push Out, allora $(\psi, \varphi; \varphi', \psi')$ è Push Out.

PROPOSIZIONE 1.8. Sia dato

$$\begin{tikzcd}
 & Q & & \\
C \arrow[ur, "\chi''"] & & P \arrow[ul, "\psi'"'] & \\
 & B \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\chi'"] & & D \arrow[ul, "\varphi'"'] \\
 & & A \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\chi"'] &
\end{tikzcd}$$

dove $(\varphi, \chi; \chi', \varphi')$ è Push Out e $(\psi, \chi'; \chi'', \psi')$ è Push Out, allora il quadrato composto $(\psi\varphi, \chi; \chi'', \psi'\varphi')$ è Push Out.

DIM. $(\psi\varphi, \chi; \chi'', \psi'\varphi')$ è ovviamente commutativo essendo commutativi $(\varphi, \chi; \chi', \varphi')$ e $(\psi, \chi'; \chi'', \psi')$.

Sia dato $(\psi\varphi, \chi; \alpha, \beta)$ commutativo, consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & X & & \\
 & Q \arrow[u, dashed, "\pi"] & & \\
C \arrow[uur, "\alpha"] \arrow[ur, "\chi''"] & & P \arrow[ul, "\psi'"'] \arrow[uul, dashed, "\rho"'] & \\
 & B \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\chi'"] & & D \arrow[ul, "\varphi'"'] \arrow[uuul, "\beta"'] \\
 & & A \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\chi"'] &
\end{tikzcd}$$

Poichè ovviamente $(\varphi, \chi; \alpha\psi, \beta)$ è commutativo e $(\varphi, \chi; \chi'\ \varphi')$ è Push Out, esiste una ed una sola $\rho : P \to X$ che rende commutativo il diagramma; ma allora $(\psi, \chi'; \alpha, \rho)$ è commutativo e poichè $(\psi, \chi'; \chi'', \psi')$

è Push Out, esiste una ed una sola $\pi : Q \to X$ che rende commutativo il diagramma.

Se poi $\pi' : Q \to X$ è tale che $\pi'\chi''=\alpha$ e $\pi'\psi'\varphi'=\beta$, si ha allora la relazione $\pi'\psi'\chi'=\pi'\chi''\psi=\alpha\psi$ che assieme a $\pi'\psi'\varphi=\beta$ porge, grazie all'unicità di ρ, $\pi'\psi'=\rho$ e questa assieme a $\pi'\chi''=\alpha$ porge, grazie all'unicità di π, $\pi=\pi'$.

Proposizione 1.9. Sia dato

$$\begin{tikzcd}
 & & P & & \\
 & Q \arrow[ur, "\beta''"] & & R \arrow[ul, "\psi''"'] & \\
D \arrow[ur, "\alpha''"] & & S \arrow[ul, "\psi'"] \arrow[ur, "\beta'"] & & E \arrow[ul, "\varphi''"'] \\
 & B \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\alpha'"'] & & C \arrow[ul, "\varphi'"] \arrow[ur, "\beta"'] & \\
 & & A \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\alpha"'] & &
\end{tikzcd}$$

dove $(\varphi, \alpha; \alpha', \varphi')$, $(\psi, \alpha'; \alpha'', \psi')$, $(\varphi', \beta; \beta', \varphi'')$ e $(\psi', \beta'; \beta'', \psi'')$ sono Push Out; allora $(\psi\varphi, \beta\alpha; \beta''\alpha'', \psi''\varphi'')$ è Push Out.

Dim. È banale conseguenza delle proposizioni 1.7, 1.8.

Proposizione 1.10. Sia $(\varphi, \varepsilon; \varepsilon' \varphi)$ Push Out

$$\begin{tikzcd}
 & P & \\
A \arrow[ur, "\varepsilon'"] & & B \arrow[ul, "\varphi'"'] \\
 & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

se $\varepsilon : C \to B$ è epic, allora $\varepsilon' : A \to P$ è epic.

Dim. Siano $\varkappa$, λ tali che $\varkappa\varepsilon'=\lambda\varepsilon'$, allora per la commutatività di $(\varphi, \varepsilon; \varepsilon', \varphi')$ si ha

$$\varkappa\varphi'\varepsilon=\varkappa\varepsilon'\varphi=\lambda\varepsilon'\varphi=\lambda\varphi'\varepsilon,$$

ed essendo ε epic $\varkappa\varphi'=\lambda\varphi'$.

Posto allora $\alpha=\varkappa\varepsilon'=\lambda\varepsilon'$, $\beta=\varkappa\varphi'=\lambda\varphi'$ si ha il diagramma commutativo seguente

$$\begin{tikzcd} & X & \\ & P \arrow[u, shift right, "\varkappa"] \arrow[u, shift left, "\lambda"'] & \\ B \arrow[uur, "\alpha"] \arrow[ur, "\varepsilon'"'] & & C \arrow[uul, "\beta"'] \arrow[ul, "\varphi'"] \\ & A \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

ma essendo $(\varphi, \varepsilon; \varepsilon', \varphi')$ Push Out è unica la mappa $P \to X$ che rende commutativo il diagramma quindi $\varkappa=\lambda$.

PROPOSIZIONE 1.11. Sia $(\varphi, \varepsilon; \varepsilon', \varphi')$ Push Out

$$\begin{tikzcd} & P & \\ A \arrow[ur, "\varepsilon'"] & & B \arrow[ul, "\varphi'"'] \\ & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

se $\varepsilon : C \to B$ è epimorfismo allora $\varepsilon' : A \to P$ è epimorfismo.

DIM. Intanto è ε' epic poichè ε epic (Prop. 1.10).

Sia poi $(\alpha, \varepsilon'; \mu, \beta)$ commutativo con μ monic; consideriamo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} & X & & \\ X' \arrow[ur, "\mu"] & & P \arrow[ul, "\beta"'] \arrow[ll, dashed, "\pi"'] & \\ & A \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\varepsilon'"'] & & B \arrow[ul, "\varphi'"'] \arrow[lll, dashed, "\rho"] \\ & & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

si ha $(\alpha\varphi,\ \varepsilon;\ \mu,\ \beta\varphi')$ commutativo con μ monic, allora essendo ε epimorfismo esiste $\rho : B \to X'$ tale che il diagramma commuti. Risulta così $(\varphi,\ \varepsilon;\ \alpha,\ \rho)$ commutativo e poichè $(\varphi,\ \varepsilon;\ \varepsilon',\ \varphi')$ Push Out esiste $\pi : P \to X'$ tale che $\pi\varepsilon' = \alpha$ e $\pi\varphi' = \rho$. Resta da provare che anche $\mu\pi = \beta$ per avere che il diagramma è commutativo e quindi ε' è epimorfismo: $\beta\varepsilon' = \mu\alpha = \mu\pi\varepsilon'$ ma ε' è epic quindi $\beta = \mu\pi$.

PROPOSIZIONE 1.12. Sia $(\varphi,\ \mu;\ \mu',\ \varphi')$ Push Out,

$$\begin{tikzcd} & P & \\ A \arrow[ur, "\mu'"] & & B \arrow[ul, "\varphi'"'] \\ & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

se $\mu : C \to B$ è una coretrazione, allora $\mu' : A \to P$ è una coretrazione.

DIM. Se $\mu : C \to B$ è una coretrazione esiste $\varepsilon : B \to C$ tale che $\varepsilon\mu = 1_C$; allora consideriamo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} & A & \\ & P \arrow[u, dashed, "\pi"] & \\ A \arrow[uur, "1"] \arrow[ur, "\mu'"'] & & B \arrow[uul, "\varphi\varepsilon"'] \arrow[ul, "\varphi'"] \\ & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

risulta $(\varphi,\ \mu;\ 1,\ \varphi\varepsilon)$ commutativo allora, poichè $(\varphi,\ \mu;\ \mu',\ \varphi'$ è Push Out, esiste $\pi : P \to A$ tale che il diagramma commuti. In particolare si avrà $\pi\mu' = 1_A$ quindi μ' è coretrazione.

OSSERVAZIONE 1.3. La proposizione precedente (1.12) non è più vera in generale se supponiamo che $\mu : C \to B$ sia monomorfismo anzichè coretrazione (per un esempio vedi [1]).

PROPOSIZIONE 1.13. Se il quadrato

$$\begin{tikzcd}
& P & \\
A \arrow[ur, "\rho"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \\
& C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

è commutativo e ψ e ρ sono isomorfismi, allora è Push Out.

DIM. Sia $(\varphi, \psi; \alpha, \beta)$ commutativo se esiste π tale che

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
& P \arrow[u, "\pi"] & \\
A \arrow[uur, "\alpha"] \arrow[ur, "\rho"'] & & B \arrow[uul, "\beta"'] \arrow[ul, "\sigma"] \\
& C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

sia commutativo si ha in particolare $\alpha = \pi\rho$ e poichè ρ è isomorfismo $\alpha\rho^{-1} = \pi\rho\rho^{-1} = \pi$.

Consideriamo la mappa $\alpha\rho^{-1} : P \to X$ essa è tale che $\alpha\rho^{-1}\rho = \alpha$ e $\alpha\rho^{-1}\sigma = \alpha\varphi\psi^{-1} = \beta\psi\psi^{-1} = \varphi$ pertanto rende commutativo il diagramma.

Si osservi che è stato sfruttato il fatto che nelle nostre ipotesi $\rho^{-1}\sigma = \varphi\psi^{-1}$ infatti $\rho^{-1}\sigma\psi = \rho^{-1}\rho\varphi = \varphi$.

COROLLARIO. Sia ψ isomorfismo $(\varphi, \psi; 1, \varphi\psi^{-1})$ è Push Out.

PROPOSIZIONE 1.14. Sia $(\psi, \psi; \psi', \psi'')$ Push Out allora ψ' e ψ'' sono coretrazioni.

DIM. $(\psi, \psi; 1, 1)$ è ovviamente commutativo; allora, essendo $(\psi, \psi; \psi', \psi'')$ Push Out, esiste π tale che il diagramma

$$
\begin{tikzcd}
 & A & \\
 & P \arrow[u, "\pi"] & \\
A \arrow[uur, "1"] \arrow[ur, "\psi'"'] & & A \arrow[uul, "1"'] \arrow[ul, "\psi''"] \\
 & C \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}
$$

sia commutativo quindi $\pi\psi'=1$, $\pi\psi''=1$.

PROPOSIZIONE 1.15. La mappa $: \varepsilon \quad C \to A$ è epic se e solo se $(\varepsilon, \varepsilon; 1, 1)$ è Push Out.

DIM. Sia ε epic, $(\varepsilon, \varepsilon; 1, 1)$ è commutativo. Sia dato $(\varepsilon, \varepsilon; \alpha, \beta)$ commutativo, il diagramma

$$
\begin{tikzcd}
 & X & \\
 & A \arrow[u, "\alpha"] & \\
A \arrow[uur, "\alpha"] \arrow[ur, "1"'] & & A \arrow[uul, "\beta"'] \arrow[ul, "1"] \\
 & C \arrow[ul, "\varepsilon"] \arrow[ur, "\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}
$$

è commutativo infatti poichè $\varepsilon : C \to A$ è epic da $\alpha\varepsilon=\beta\varepsilon$ segue $\alpha=\beta$. Se poi $\pi : A \to X$ è tale da rendere commutativo il diagramma allora $\alpha=\pi 1=\pi$.

Viceversa sia $(\varepsilon, \varepsilon; 1, 1)$ Push Out e siano α, β tali che $\alpha\varepsilon=\beta\varepsilon$, allora $(\varepsilon, \varepsilon; \alpha, \beta)$ è commutativo per cui esiste $\pi : A \to X$ tale che $\alpha=\pi 1=\pi$, $\beta=\pi 1=\pi$ quindi $\alpha=\pi=\beta$, quindi ε è epic.

Proposizione 1.16. Sia dato il diagramma commutativo

$$
\begin{tikzcd}
& P & \\
A \arrow[ur, "\psi'"] & & B \arrow[ul, "\varphi'"'] \\
& C \arrow[ul, "\rho"] \arrow[ur, "\sigma"'] & \\
& D \arrow[uul, "\varphi"] \arrow[u, "\tau"] \arrow[uur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}
$$

se (φ, ψ; ψ', φ') è Push Out, allora (ρ, σ; ψ', φ') è Push Out.

Dim. (ρ, σ; ψ', φ') è commutativo per ipotesi. Sia dato (ρ, σ; α, β) commutativo

$$
\begin{tikzcd}
& X & \\
& P \arrow[u, dashed, "\pi"] & \\
A \arrow[uur, "\alpha"] \arrow[ur, "\psi'"] & & B \arrow[uul, "\beta"'] \arrow[ul, "\varphi'"'] \\
& C \arrow[ul, "\rho"] \arrow[ur, "\sigma"'] & \\
& D \arrow[uul, "\varphi"] \arrow[u, "\tau"] \arrow[uur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}
$$

il quadrato (φ, ψ; α, β) è commutativo ovviamente; allora poiché (φ, ψ; ψ', φ') è Push Out, esiste una ed una sola mappa $\pi : P \to X$ che rende commutativo il diagramma e questo prova che (ρ, σ; ψ', φ') è Push Out.

Corollario. Siano (φ, ψ; ψ', φ') Push Out, (ρ, σ; ψ', φ') Pull Bak, allora (ρ, σ; ψ', φ') è Push Out.

Proposizione. 1.17. Sia dato il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
 & P & \\
A \arrow[ur, "\sigma'"] & & B \arrow[ul, "\rho'"'] \\
 & C \arrow[ul, "\rho"'] \arrow[ur, "\sigma"] & \\
 & D \arrow[u, "\varepsilon"'] \arrow[uul, "\varphi"] \arrow[uur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

dove ε epic e $(\rho, \sigma; \sigma', \rho')$ Push Out, allora $(\varphi, \psi; \sigma', \rho')$ è Push Out.

Dim. $(\varphi, \psi; \sigma', \rho')$ è commutativo per ipotesi. Sia dato $(\varphi, \psi; \alpha, \beta)$ commutativo

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
 & P \arrow[u, dashed, "\pi"'] & \\
A \arrow[uur, "\alpha"] \arrow[ur, "\sigma'"'] & & B \arrow[uul, "\beta"'] \arrow[ul, "\rho'"] \\
 & C \arrow[ul, "\rho"'] \arrow[ur, "\sigma"] & \\
 & D \arrow[u, "\varepsilon"'] \arrow[uul, "\varphi"] \arrow[uur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

risulta $(\rho, \sigma; \alpha, \beta)$ commutativo infatti $\alpha\rho\varepsilon = \alpha\varphi = \beta\psi = \beta\sigma\varepsilon$ ed essendo ε epic $\alpha\rho = \beta\sigma$.

Allora poichè $(\rho, \sigma; \sigma', \rho')$ è Push Out esiste una ed una sola $\pi : P \to X$ che rende commutativo il diagramma.

Definizione 1.4. Siano date due mappe $\varphi : A \to B$, $\psi : A \to B$ $\alpha : B \to C$ dicesi coequalizzatore di φ e ψ se:

1) $\alpha\varphi = \alpha\psi$

2) comunque dato $\beta : B \to X$ tale che $\beta\varphi = \beta\psi$ esiste ed è unica la mappa $\pi : C \to X$ tale che

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[dl, "\pi"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

commuti.

Definizione 1.14*. Siano date due mappe $\varphi : A \to B$, $\psi : A \to B$ $\alpha : E \to A$ dicesi equalizzatore di φ e ψ se:

1) $\varphi\alpha = \psi\alpha$

2) comunque dato $\beta : X \to A$ tale che $\varphi\beta = \psi\beta$ esiste ed è unica la mappa $\pi : X \to E$ tale che

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\alpha"] & A \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & B \\
 & X \arrow[u, "\beta"'] \arrow[ul, "\pi"] &
\end{tikzcd}$$

commuti.

Proposizione 1.18. Siano date $\varphi : A \to B$, $\psi : A \to B$; se $\alpha : B \to C$ e $\alpha' : B \to C'$ sono coequalizzatori di φ e ψ, allora esiste uno ed uno solo isomorfismo $\sigma : C \to C'$ tale che il diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[dd, "\sigma"] \\
A \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & B \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & \\
 & & C'
\end{tikzcd}$$

PROPOSIZIONE 1.19. Siano date $\varphi : A \to B$, $\psi : A \to B$ se $\alpha : B \to C$ è coequalizzatore allora α è epimorfismo.

DIM. Proviamo intanto che α è epic; siano date due mappe ρ, $\sigma : C \to X$ tali che $\rho\alpha = \sigma\alpha$, consideriamo il seguente diagramma commutativo, dove $\beta = \rho\alpha = \sigma\alpha$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[dl, shift right, "\rho"'] \arrow[dl, shift left, "\sigma"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

essendo $\alpha : B \to C$ coequalizzatore è unica la mappa $C \to X$ tale che il diagramma commuti, quindi $\rho = \sigma$.

Sia dato poi il quadrato commutativo

$$\begin{tikzcd} X & C \arrow[l, "\gamma"'] \\ X' \arrow[u, "\mu"] & B \arrow[l, "\beta"] \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

con μ monic; consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ & X' \arrow[r, "\mu"'] & X \end{tikzcd}$$

dalla commutatività del quadrato e dal fatto che $\alpha\varphi = \alpha\psi$ si ha $\mu\beta\varphi = \gamma\alpha\varphi = \gamma\alpha\psi = \mu\beta\psi$ e poichè μ è monic $\beta\varphi = \beta\psi$.

Allora poichè $\alpha : B \to C$ è coequalizzatore di φ e ψ esiste $\pi : C \to X'$ tale che $\pi\alpha = \beta$.

Il diagramma

$$\begin{tikzcd} X & C \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[dl, "\pi"'] \\ X' \arrow[u, "\mu"] & B \arrow[l, "\beta"] \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

è allora commutativo infatti $\mu\pi\alpha=\mu\beta=\gamma\alpha$ quindi $\mu\pi=\gamma$ essendo α epic.

PROPOSIZIONE 1.20. Sia dato

$$\begin{tikzcd} & P & \\ A \arrow[ur, "\psi'"] \arrow[r, "\iota_A"'] & A+B \arrow[u, "\langle\psi',\varphi'\rangle"] & B \arrow[ul, "\varphi'"'] \arrow[l, "\iota_B"] \\ & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

$(\varphi, \psi; \psi', \varphi')$ è Push Out se e solo se $\langle\psi', \varphi'\rangle : A+B \to P$ è coequalizzatore di $\iota_A\varphi$ e $\iota_B\psi$.

DIM. Sia $\langle\psi', \varphi'\rangle$ coequalizzatore di $\iota_A\varphi$ e $\iota_B\beta$, intanto $(\varphi, \psi; \psi', \varphi')$ è commutativo infatti $\psi'\varphi=\langle\psi', \varphi'\rangle\iota_A\varphi=\langle\psi', \varphi'\rangle\iota_B\psi=\varphi'\psi$. Sia dato poi $(\varphi, \psi; \alpha, \beta)$ commutativo consideriamo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} & X & \\ & P & \\ A \arrow[uur, "\alpha"] \arrow[ur, "\psi'"] \arrow[r, "\iota_A"'] & A+B \arrow[u, "\langle\psi',\varphi'\rangle"] \arrow[uu, bend left, "\langle\alpha, \beta\rangle"] & B \arrow[uul, "\beta"'] \arrow[ul, "\varphi'"'] \arrow[l, "\iota_B"] \\ & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

osserviamo che $\langle\alpha, \beta\rangle\iota_A\varphi=\alpha\varphi=\beta\psi=\langle\alpha, \beta\rangle\iota_B\psi$ e poichè $\langle\psi', \varphi'\rangle$ è coequalizzatore di $\iota_A\varphi$ e $\iota_B\psi$ allora esiste una ed una sola mappa

$\pi : P \to X$ tale che $\pi\langle\psi', \varphi'\rangle = \langle\alpha, \beta\rangle$ da cui segue che π è l'unica mappa $P \to X$ tale che

$$\pi\psi' = \pi\langle\psi', \varphi'\rangle\iota_A = \langle\alpha, \beta\rangle\iota_A = \alpha, \qquad \pi\varphi' = \pi\langle\psi' \ \varphi'\rangle\iota_B = \langle\alpha, \beta\rangle\iota_B = \beta.$$

Se invece $(\varphi, \psi; \psi' \ \varphi')$ è Push Out e $\gamma : A+B \to X$ tale che $\gamma\iota_A\varphi = \gamma\iota_B\psi$ allora consideriamo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
 & P \arrow[u, dashed, "\pi"] & \\
A \arrow[uur, "\gamma\iota_A"] \arrow[ur, "\psi'"] \arrow[r, "\iota_A"'] & A+B \arrow[u, "\langle\psi',\varphi'\rangle"'] \arrow[uu, bend left=40, "\gamma"] & B \arrow[uul, "\gamma\iota_B"'] \arrow[ul, "\varphi'"'] \arrow[l, "\iota_B"] \\
 & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

poichè $(\varphi, \psi; \gamma\iota_A, \gamma\iota_B)$ è commutativo esiste una ed una sola mappa $\pi : P \to X$ tale che $\pi\psi' = \gamma\iota_A$, $\pi\varphi' = \gamma\iota_B$ ovvero $\pi\langle\psi', \varphi'\rangle\iota_A = \gamma\iota_A$, $\pi\langle\psi', \varphi'\rangle\iota_B = \gamma\iota_B$ da cui π è l'unica mappa $P \to X$ tale che $\pi\langle\psi', \varphi'\rangle = \gamma$.

Proposizione 1.21. Sia dato

$$\begin{tikzcd}
 & P & \\
A \arrow[ur, "\psi'"] \arrow[r, "\iota_A"'] & A+B \arrow[u, "\langle\psi',\varphi'\rangle"'] & B \arrow[ul, "\varphi'"'] \arrow[l, "\iota_B"] \\
 & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

dove $(\varphi, \psi; \psi', \varphi')$ è Push Out, allora $\langle\psi', \varphi'\rangle$ è epimorfismo.

Dim. È conseguenza immediata delle proposizioni 1.19, 1.20.

PROPOSIZIONE 1.22. Sia dato

$$\begin{tikzcd}
 & & C & & \\
 & P \arrow[ur, "\beta"] & & B \arrow[ul, "\alpha"'] & \\
B \arrow[ur, "\psi'"] \arrow[urrr, "1"' near end] \arrow[rr, "\iota_1"'] & & B+B \arrow[ul, "{\langle \psi', \varphi' \rangle}"' near start] \arrow[ur, "{\langle 1, 1 \rangle}" near start] & & B \arrow[ll, "\iota_2"] \arrow[ulll, "\varphi'" near end] \arrow[ul, "1"'] \\
 & & A \arrow[ull, "\varphi"] \arrow[urr, "\psi"'] & &
\end{tikzcd}$$

dove $(\varphi, \psi; \psi', \varphi')$ è Push Out e $(\langle \psi', \varphi' \rangle, \langle 1, 1 \rangle; \beta, \alpha)$ è Push Out, allora α è coequalizzatore di φ e ψ.

DIM. Sia dato $\gamma : B \to X$ tale che $\gamma\varphi = \gamma\psi$ consideriamo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & & X & & \\
 & & C \arrow[u, dashed, "\pi"] & & \\
 & P \arrow[ur, "\beta"] \arrow[uur, dashed, "\rho"] & & B \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[uul, "\gamma"'] & \\
B \arrow[uuurr, "\gamma"] \arrow[ur, "\psi'"] \arrow[urrr, "1"' near end] \arrow[rr, "\iota_1"'] & & B+B \arrow[ul, "{\langle \psi', \varphi' \rangle}"' near start] \arrow[ur, "{\langle 1, 1 \rangle}" near start] & & B \arrow[uuull, "\gamma"'] \arrow[ll, "\iota_2"] \arrow[ulll, "\varphi'" near end] \arrow[ul, "1"'] \\
 & & A \arrow[ull, "\varphi"] \arrow[urr, "\psi"'] & &
\end{tikzcd}$$

il quadrato $(\varphi, \psi; \gamma, \gamma)$ è commutativo, allora essendo $(\varphi, \psi; \psi', \varphi')$ Push Out esiste una unica mappa $\rho : P \to X$ tale che $\rho\psi' = \gamma$ e $\rho\varphi' = \gamma$.

Si ha allora che $\rho\langle \psi', \varphi' \rangle = \gamma\langle 1, 1 \rangle$ infatti

$$\rho\langle \psi', \varphi' \rangle\iota_1 = \rho\psi' = \gamma \quad \text{e} \quad \gamma\langle 1, 1 \rangle\iota_1 = \gamma 1 = \gamma,$$

$$\rho\langle \psi', \varphi' \rangle\iota_2 = \rho\varphi' = \gamma \quad \text{e} \quad \gamma\langle 1, 1 \rangle\iota_2 = \gamma 1 = \gamma;$$

pertanto il quadrato $(\langle \psi', \varphi' \rangle, \langle 1, 1 \rangle; \rho, \gamma)$ è commutativo, allora essendo $(\langle \psi', \varphi' \rangle \langle 1, 1 \rangle; \beta, \alpha)$ Push Out esiste una ed una sola mappa $\pi : C \to X$ tale che $\pi\beta = \rho$ e $\pi\alpha = \gamma$.

Si vede poi facilmente che $\pi : C \to X$ è l'unica mappa tale che $\pi\alpha = \gamma$ infatti se $\pi' : C \to X$ è tale che $\pi'\alpha = \gamma$, allora

$$\pi'\beta\psi' = \pi\beta\langle \psi', \varphi' \rangle\iota_1 = \pi\alpha\langle 1, 1 \rangle\iota_1 = \gamma$$

$$\pi'\beta\varphi' = \pi\beta\langle \psi', \varphi' \rangle\iota_2 = \pi\alpha\langle 1, 1 \rangle\iota_2 = \gamma$$

quindi $\pi'\beta = \rho$ e infine $\pi' = \pi$.

Ciò prova che $\alpha : B \to C$ è coequalizzatore di φ e ψ.

Osservazione 1.5. Le proposizioni 1.20, 1,22 provano che se $\mathcal{C}$ è una categoria in cui per ogni coppia di oggetti esiste la somma, allora sono equivalenti le due proprietà:

1) per ogni coppia di mappe

$$\begin{tikzcd} A & & B \\ & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

esiste $(\varphi, \psi; \psi', \varphi')$ Push Out (la categoria è dotata di Push Out);

2) per ogni coppia di mappe $\rho, \sigma : X \to Y$ esiste coequalizzatore (la categoria è dotata di coequalizzatore).

DEFINIZIONE 1.5. Il quadrato (φ, ψ; ρ, σ) dicesi $\vee$-esatto se

1) (φ ,ψ; ρ, σ) è commutativo;

2) esiste (φ, ψ; ψ', φ') Push Out ed è monomorfismo la mappa π che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & D & \\
 & P \arrow[u, "\pi"] & \\
A \arrow[uur, "\rho"] \arrow[ur, "\psi'"] & & B \arrow[uul, "\sigma"'] \arrow[ul, "\varphi'"'] \\
 & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

DEFINIZIONE 1.5*. Il quadrato (φ, ψ; ρ, σ) dicesi $\wedge$-esatto se

1) (φ, ψ; ρ, σ) è commutativo;

2) esiste (σ', ρ'; ρ, σ) Pull Bak ed è epimorfismo la mappa che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & D & \\
A \arrow[ur, "\rho"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \\
 & P \arrow[ul, "\sigma'"] \arrow[ur, "\rho'"'] & \\
 & C \arrow[u, "\pi"] \arrow[uul, "\varphi"] \arrow[uur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

PROPOSIZIONE 1.23. Ogni Push Out è $\vee$-esatto.

PROPOSIZIONE 1.24. Sia (φ, ψ; ρ, σ) $\vee$-esatto, ψ monomorfismo e (φ, ψ; ψ', φ') Push Out, allora σ è monomorfismo se e solo se ψ' è monomorfismo.

PROPOSIZIONE 1.25. Sia $\mathcal{C}$ una categoria con Push Out. Comunque dato

$$
\begin{tikzcd}
 & F & & \\
C \arrow[ur, "\tau"] & & E \arrow[ul, "\sigma"'] & \\
 & B \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\xi"] & & D \arrow[ul, "\rho"'] \\
 & & A \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\chi"'] &
\end{tikzcd}
$$

con $(\varphi, \chi; \xi, \rho)$ $\vee$-esatto e $(\psi, \xi; \tau, \sigma)$ $\vee$-esatto, il quadrato composto $(\psi\varphi, \chi; \tau, \sigma\rho)$ è $\vee$-esatto se e solo se comunque dato

$$
\begin{tikzcd}
 & P & \\
X \arrow[ur, "\mu'"] & & Y \arrow[ul, "\alpha'"'] \\
 & Z \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}
$$

$(\alpha, \mu; \mu', \alpha')$ Push Out e μ monomorfismo, μ' è monomorfismo.

DIM. Sia dato $(\alpha, \mu; \mu', \alpha')$ Push Out e μ monomorfismo, consideriamo

$$
\begin{tikzcd}
 & P & & \\
X \arrow[ur, "\mu'"] & & Y \arrow[ul, "\alpha'"'] & \\
 & Z \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\mu"] & & Z \arrow[ul, "\mu"'] \\
 & & Z \arrow[ul, "1"] \arrow[ur, "1"'] &
\end{tikzcd}
$$

$(1, 1; \mu, \mu)$ è $\vee$-esatto essendo μ monomorfismo (ovvio!), $(\alpha, \mu; \mu', \alpha')$ è $\vee$-esatto essendo Push Out; allora nelle nostre ipotesi il quadrato $(\alpha 1, 1; \mu', \alpha'\mu)$ è $\vee$-esatto, pertanto

$$\begin{tikzcd}
 & P & & \\
X \arrow[ur, "\mu'"] \arrow[r, "1"'] & X \arrow[u, "\mu'"] & Y \arrow[ul, "\alpha'"'] & \\
 & Z \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\mu"] & & Z \arrow[ull, "\alpha"] \arrow[ul, "\mu"'] \\
 & & Z \arrow[ul, "1"] \arrow[ur, "1"'] &
\end{tikzcd}$$

poichè $(\alpha, 1; \alpha, 1)$ è Push Out, $\mu' : X \to P$ che rende commutativo il diagramma è monomorfismo.

Viceversa sia dato

$$\begin{tikzcd}
 & F & & \\
C \arrow[ur, "\tau"] & & E \arrow[ul, "\sigma"'] & \\
 & B \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\xi"] & & D \arrow[ul, "\rho"'] \\
 & & A \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\chi"'] &
\end{tikzcd}$$

con $(\varphi, \chi; \xi, \rho)$ $\vee$-esatto e $(\psi, \xi; \tau, \sigma)$ $\vee$-esatto, consideriamo il diagramma seguente

$$
\begin{tikzcd}
 & F & & \\
 & R \arrow[u, "\nu"] & & \\
 & Q \arrow[u, "\mu'"] & E \arrow[ul, "\psi''"'] \arrow[uul, "\sigma"'] & \\
C \arrow[uuur, "\tau"] \arrow[ur, "\chi''"] & & P \arrow[ul, "\psi'"'] \arrow[u, "\mu"'] & \\
 & B \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\chi'"'] \arrow[uur, "\xi"] & & D \arrow[ul, "\varphi'"] \arrow[uul, "\rho"'] \\
 & & A \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\chi"'] &
\end{tikzcd}
$$

dove sono:

(φ, χ; χ', φ') Push Out e μ che rende commutativo il diagramma monomorfismo essendo (φ, χ; ξ, ρ) $\vee$-esatto,

(ψ, χ'; χ'', ψ') Push Out, (ψ', μ; μ', ψ'') Push Out e allora nelle nostre ipotesi μ' monomorfismo essendo μ monomorfismo.

Risulta allora per la proposizione 1.8 ($\psi\varphi$, χ; χ'', $\psi'\varphi'$) Push Out e ν che rende commutativo il diagramma monomorfismo essendo (ψ, ξ; τ, σ) $\vee$-esatto, inoltre sempre per la proposizione 1.8 ($\psi\varphi, \chi$; $\chi'', \psi'\varphi'$) è Push Out e la mappa $\nu\mu' : Q \rightarrow F$ che rende commutativo il diagramma è monomorfismo essendo composta di monomorfismi, ciò prova che ($\psi\varphi$, χ; τ, $\sigma\rho$) è $\vee$-esatto.

DEFINIZIONE 1.6. Un quadrato (φ, ψ; ρ, σ dicesi esatto se esso è $\vee$-esatto e $\wedge$-esatto.

PROPOSIZIONE 1.26. Se (φ, ψ; ρ, σ) è esatto, (φ, ψ; ψ', φ') è Push Out e (σ', ρ'; ρ, σ) Pull Bak, allora (σ', ρ'; ψ', φ') è tanto Push Out che Pull Bak

$$\begin{tikzcd}
& D & \\
& P \arrow[u, "\mu"'] & \\
A \arrow[uur, "\rho"] \arrow[ur, "\psi'"'] & & B \arrow[uul, "\sigma"'] \arrow[ul, "\varphi'"] \\
& Q \arrow[ul, "\sigma'"'] \arrow[ur, "\rho'"] & \\
& C \arrow[u, "\varepsilon"'] \arrow[uul, "\varphi"] \arrow[uur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

DIM. È conseguenza immediata delle Prop. 1.17, 1.17*.

OSSERVAZIONE 1.6. Un quadrato $\vee$-esatto non è necessariamente esatto.

Un quadrato $\wedge$-esatto non è necessariamente esatto.

Alcuni esempi nella categoria degli insiemi provano queste affermazioni, rinviamo per tali esempi alle pagine seguenti.

Esempi.

Ha interesse caratterizzare in alcune categorie particolari, le nozioni definite in questo capitolo per una categoria $\mathcal{C}$ del tutto generale.

COEQUALIZZATORE.

a) *Categoria degli insiemi.*

Siano $\varphi, \psi : A \to B$ applicazioni tra insiemi, consideriamo in B la relazione di equivalenza generata dalla relazione: $x, y \in B$, $x \sim y$ se esiste $a \in A$ tale che $x = \varphi(a)$, $y = \psi(a)$ (non è in generale relazione di equivalenza).

Sia $\alpha : B \to B/\sim$ l'applicazione canonica, α è coequalizzatore di φ e ψ, infatti: per ogni $a \in A$ $\alpha\varphi(a) = \alpha\psi(a)$ quindi $\alpha\varphi = \alpha\psi$.

Se poi $\beta : B \to X$ è un'applicazione tale che $\beta\varphi = \beta\psi$, consideriamo in B la relazione di equivalenza: $x, y \in B$, $x \underset{\beta}{\sim} y$ se $\beta(x) = \beta(y)$, questa è meno fine della relazione di equivalenza $\sim$ prima considerata, infatti: se x, $y \in B$, $x \sim y$ allora esiste $a \in A$ tale che $x = \varphi(a)$, $y = \psi(a)$, allora $\beta(x) = \beta\varphi(a) = \beta\psi(a) = \beta(y)$ per cui $x \underset{\beta}{\sim} y$.

Detta ε l'applicazione canonica $B \to B/\underset{\beta}{\sim}$, esiste allora una unica applicazione $\rho : B/\sim \; \to B/\underset{\beta}{\sim}$ tale che commuti il triangolo:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & B/\sim \arrow[dl, "\rho"] \\
& B/\underset{\beta}{\sim} &
\end{tikzcd}$$

Poichè si ha la fattorizzazione canonica

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dd, "\beta"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\
& B/\underset{\beta}{\sim} \arrow[dl, "\mu"] \\
X &
\end{tikzcd}$$

il diagramma seguente è commutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & B \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\varepsilon"] \arrow[dd, "\beta"'] & & B/\sim \arrow[dl, "\rho"] \\
& & B/\underset{\beta}{\sim} \arrow[dl, "\mu"] & \\
& X & &
\end{tikzcd}$$

posto $\pi = \mu\rho$ si ha $\pi\alpha = \beta$ e poichè α è epic π è l'unica applicazione che verifica questa eguaglianza.

b) *Categoria degli spazi topologici.*

Siano A, B spazi topologici, φ, $\psi : A \to B$ applicazioni continue, con riferimento alle considerazioni precedenti sia $\alpha : B \to B/\sim$ coequalizzatore di φ e ψ pensante come applicazione tra insiemi, se dotiamo $B/\sim$ della topologia quoziente risulta α continua ed è facile verificare che α è coequalizzatore di φ e ψ.

Data $\beta : B \to X$ applicazione continua, dotato della topologia quoziente $B/\underset{\beta}{\sim}$, basta far vedere che l'applicazione $\rho : B/\sim \;\to \beta/\underset{\beta}{\sim}$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & B/\sim \arrow[dl, "\rho"] \\ & B/\underset{\beta}{\sim} & \end{tikzcd}$$

è continua.

Sia V aperto di $B/\underset{\beta}{\sim}$, $\rho^{-1}(V)$ è tale che $\alpha^{-1}\rho^{-1}(V)=\varepsilon^{-1}(V)$ aperto in B, quindi è aperto in $B/\sim$.

L'applicazione $\mu : B/\underset{\beta}{\sim} \to B$ è poi ovviamente continua.

c) $\mathcal{C}$ *categoria abeliana* [2]).

Siano A, B oggetti di $\mathcal{C}$ categoria abeliana.

φ, $\psi : A \to B$ mappe è noto che $\alpha : B \to C$ è coequalizzatore di φ e ψ se e solo se la sequenza

$$A \xrightarrow{\varphi-\psi} B \xrightarrow{\alpha} C \longrightarrow 0$$

è esatta, come dire $C=B/Im(\varphi-\psi)$.

PUSH OUT.

a) *Categoria degli insiemi.*

Si data una coppia di applicazioni:

$$\begin{tikzcd} A & & B \\ & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Consideriamo in $A+B$ la relzione di equivalenza generata dalla relazione: x, $y \in A+B$, $x \sim y$ se esiste $c \in C$ tale che

$$x=\iota_A\varphi(c), \quad y=\iota_B\psi(c).$$

---

[2]) Per quanto riguarda qui e altrove le categorie Abeliane vedi [4], [5].

Dalla caratterizzazione del coequalizzatore nella categoria degli insiemi, e dalla prop. 1.20 si ha che

$$\begin{tikzcd} & A+B/\sim & \\ A \arrow[ur, "\psi'"] & & B \arrow[ul, "\varphi'"'] \\ & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

è Push Out, dove, posto $\rho : A+B \longrightarrow A+B/\sim$ la proiezione canonica, sono $\psi' = \rho\iota_A$, $\varphi' = \rho\iota_B$.

Poichè nella categoria degli insiemi ogni monomorfismo è coretrazione si ha dalla prop. 1.12 che se:

$$\begin{tikzcd} & P & \\ A \arrow[ur, "\mu'"] & & B \arrow[ul, "\varphi'"'] \\ & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

è Push Out e μ monomorfismo, allora μ' è monomorfismo.

b) *Categoria degli spazi topologici.*

Sia data una coppia di applicazioni continue tra spazi topologici

$$\begin{tikzcd} A & & B \\ & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Se, in riferimento alla caratterizzazione del Push Out nella categoria degli insiemi, dotiamo $A+B/\sim$ della topologia quoziente della somma topologica $A+B$ si ha che

$$\begin{tikzcd} & A+B/\sim & \\ A \arrow[ur, "\psi'"] & & B \arrow[ul, "\varphi'"'] \\ & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

è Push Out.

Anche in questa categoria se

$$\begin{tikzcd} & P & \\ A \arrow[ur, "\mu'"] & & B \arrow[ul, "\varphi'"'] \\ & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

è Push Out e μ monomorfismo, μ' è monomorfismo infatti μ' continua, è certamente iniettiva come applicazione di insiemi, quindi monic nella categoria. Inoltre dalla caratterizzazione del Push Out nella categoria: $P=A+B/\sim$, si ha che se U è aperto di A, $\varphi^{-1}(U)$ è aperto di C poichè φ è continua, ed essendo μ monomorfismo esiste U' aperto di B tale che $\varphi^{-1}(U)=\mu^{-1}(U')$. Allora $\iota_A(U)\cup\iota_B(U')$ è aperto di $A+B$ saturo rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$, detta $\rho : A+B/\sim$ la proiezione canonica si ha che $V=\rho(\iota_A(U)\cup\iota_B(U'))$ in $A+B/\sim$ è aperto e tale che

$$\mu'^{-1}(V)=\mu'^{-1}\rho(\iota_A(U)\cup\iota_B(U'))=\iota_A^{-1}\rho^{-1}\rho(\iota_A(U)\cup\iota_B(U'))=$$
$$=\iota_A^{-1}(\iota_A(U)\cup\iota_B(U'))=U$$

ciò prova che μ' è un monomorfismo.

c) $\mathcal{C}$ *categoria abeliana.*

È noto che in $\mathcal{C}$ categoria abeliana un quadrato

$$\begin{tikzcd} & P & \\ A \arrow[ur, "\psi'"] & & B \arrow[ul, "\varphi'"'] \\ & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

è Push Out se e solo se è esatta la sequenza

$$C \xrightarrow{\{\varphi,\,\psi\}} A\oplus B \xrightarrow{\langle\psi',\,-\varphi'\rangle} P \longrightarrow O$$

è pure noto che in $\mathcal{C}$ categoria abeliana se

$$\begin{tikzcd} & P & \\ A \arrow[ur, "\mu'"] & & B \arrow[ul, "\varphi'"'] \\ & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

è Push Out e μ monomorfismo allora μ' è monomorfismo.

EQUALIZZATORE.

a) *Categoria degli insiemi.*

Siano φ, $\psi : A \to B$ applicazioni tra insiemi, consideriamo $E = \{a \mid a \in A$ tali che $\varphi(a) = \psi(a)\}$, $\alpha : E \to A$ l'inclusione, è facile verificare che $\alpha : E \to A$ è equalizzatore di φ e ψ.

b) *Categoria degli spazi topologici.*

Siano φ, $\psi : A \to B$ applicazioni continue tra spazi topologici, equalizzatore di φ e ψ è $\alpha : E \to A$, dove E è il sottoinsieme di A definito al punto a) dotato della topologia di sottospazio di A, α l'inclusione di E in A come sottospazio.

c) $\mathcal{C}$ *categoria abeliana.*

Siano φ, $\psi : A \to B$ mappe di $\mathcal{C}$ categoria abeliana.

È noto che $\alpha : E \to A$ è equalizzatore di φ e ψ se e solo se la sequenza

$$O \longrightarrow E \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\varphi-\psi} B$$

è esatta, come dire $E = \operatorname{Ker}(\varphi - \psi)$.

PULL BAK.

a) *Categoria degli insiemi.*

Sia data una coppia di applicazioni tra insiemi

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, "\rho"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

Consideriamo il sottoinsieme P di $A \times B$ costituito da tutte le coppie (a, b) con $a \in A$, $b \in B$ tali che $\rho(a) = \sigma(b)$.

Dalla caratterizzazione dell'equalizzatore nella categoria e dalla prop. 1.20* si ha che

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, "\rho"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \\ & P \arrow[ul, "\sigma'"] \arrow[ur, "\rho'"'] & \end{tikzcd}$$

è Pull Bak, dove posto $\iota : P \rightarrow A \times B$ l'applicazione di inclusione, sono $\sigma' = \pi_A \iota$ $\rho' = \pi_B \iota$.

Poichè nella categoria degli insiemi ogni epimorfismo è retrazione si ha dalla prop. 1.12* che se

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, "\varepsilon"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \\ & P \arrow[ul, "\sigma'"] \arrow[ur, "\varepsilon'"'] & \end{tikzcd}$$

è Pull Bak ed ε epimorfismo, allora ε' è epimorfismo.

b) *Categoria degli spazi topologici.*

Sia data una coppia di applicazioni continue tra spazi topologici

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, "\rho"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

Se, con riferimento alla caratterizzazone del Pull Bak nella categoria degli insiemi, dotiamo P della topologia di sottospazio del prodotto topologico $A \times B$ si ha che

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, "\rho"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \\ & P \arrow[ul, "\sigma'"] \arrow[ur, "\rho'"'] & \end{tikzcd}$$

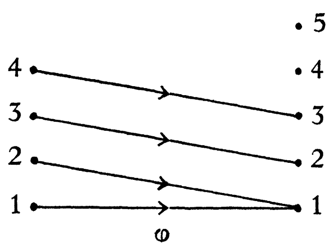
è Pull Bak.

È interessante notare che, in questa categoria, se

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, "\varepsilon"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \\ & P \arrow[ul, "\sigma'"] \arrow[ur, "\varepsilon'"'] & \end{tikzcd}$$

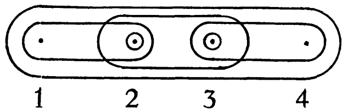
è Pull Bak ed ε epimorfismo non è detto che ε' sia epimorfismo come si vede nel seguente esempio.

Esempio. Ci sarà comodo, qui e nel seguito, descrivere applicazioni tra insiemi finiti mediante illustrazioni grafiche come ad esempio la seguente:



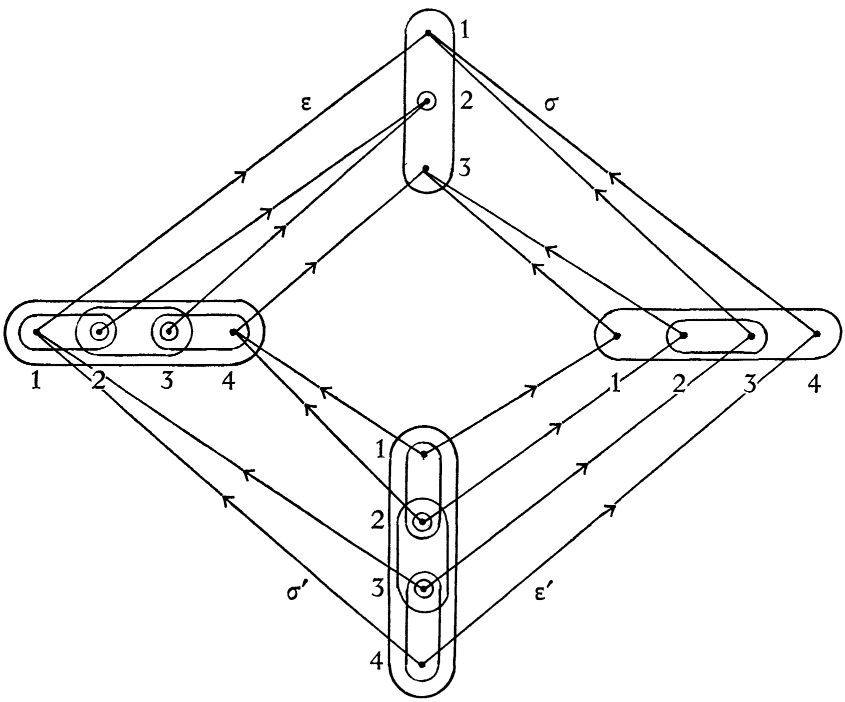
in cui si descrive l'applicazione $\varphi : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tale che $\varphi(1)=1$, $\varphi(2)=1$, $\varphi(3)=2$, $\varphi(4)=3$.

Descriveremo spazi topologici finiti mediante illustrazioni grafiche come ad esempio la seguente:



in cui si rappresenta lo spazio topologico costituito dall'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ e dalla famiglia di sottoinsiemi aperti $O=\{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$, gli aperti sono individuabili nel disegno come sottoinsiemi racchiusi da una linea chiusa.

Ricordando che epimorfismi nella categoria degli spazi topologici sono tutte e sole le applicazioni $\varepsilon : X \to Y$ continue e suriettive tali che se $U \subset Y$, $\varepsilon^{-1}(U)$ è aperto in X allora U è aperto in X, consideriamo il seguente quadrato di applicazioni continue:



$(\sigma', \varepsilon', \varepsilon, \sigma)$ è Pull Bak, ε è epimorfismo ed ε' è epic ma non epimorfismo in quanto $\varepsilon'^{-1}(2)$ è aperto e 2 non è aperto.

c) $\mathcal{C}$ *categoria abeliana.*

È noto che in $\mathcal{C}$ categoria abeliana un quadrato

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, "\rho"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \\ & P \arrow[ul, "\sigma'"] \arrow[ur, "\rho'"'] & \end{tikzcd}$$

è Pull Bak se e solo se è esatta la sequenza

$$O \longrightarrow P \xrightarrow{\{\sigma', \rho'\}} A \oplus B \xrightarrow{<\rho, -\sigma>} C$$

È pure noto che se in $\mathcal{C}$ categoria abeliana

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, "\varepsilon"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \\ & P \arrow[ul, "\sigma'"] \arrow[ur, "\varepsilon'"'] & \end{tikzcd}$$

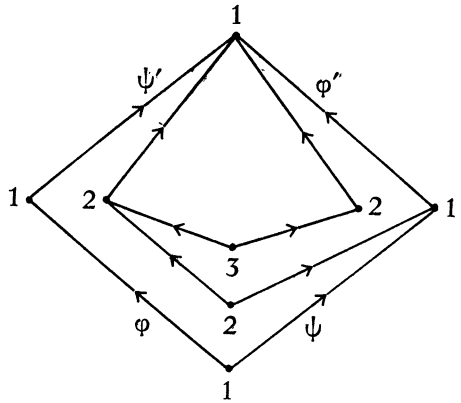
è Pull Bak e ε epimorfismo allora ε' è epimorfismo.

QUADRATI $\vee$-ESATTI, $\wedge$-ESATTI, ESATTI.

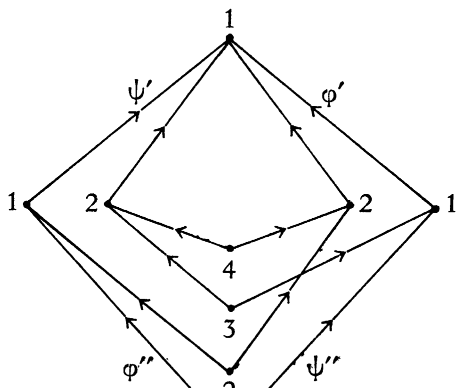
Caratterizzati nelle varie categorie Push Out e monomorfismi, Pull Bak ed epimorfismi, restano ovviamente caratterizzati i quadrati $\vee$-esatti, $\wedge$-esatti, ed esatti.

Sono interessanti i seguenti due esempi nella categoria degli insiemi di quadrati $\vee$-esatti ma non esatti, $\wedge$-esatti ma non esatti.

ESEMPIO. Consideriamo il seguente quadrato:



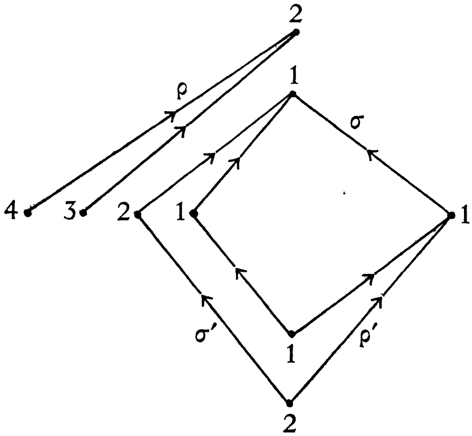
(φ, ψ; ψ', φ') è Push Oout quindi $\vee$-esatto.



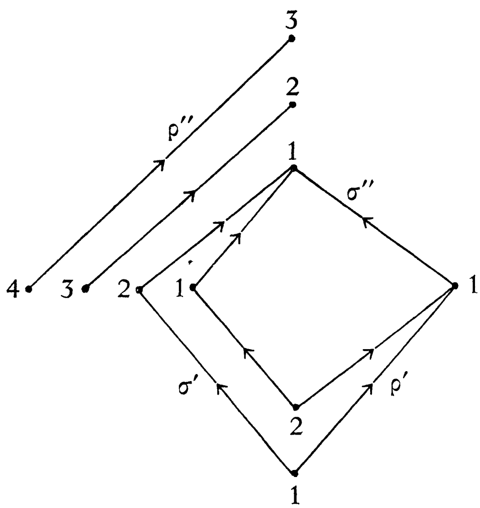
(φ'', ψ''; ψ', φ') è Pull Bak ed ovviamente non esistono epimorfismi dall'insieme $\{1, 2, 3\}$ all'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$.

Il quadrato (φ, ψ; ψ', φ') è $\vee$-esatto, anzi Push Out, ma non $\wedge$-esatto, quindi non è esatto.

ESEMPIO. Consideriamo il seguente quadrato:



$(\sigma', \rho'; \rho, \sigma)$ è Pull Bak quindi $\wedge$-esatto



$(\sigma', \rho'; \rho'', \sigma'')$ è Push Out ed ovviamente non esistono monomorfismi dall'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ all'insieme $\{1, 2\}$.

Il quadrato $(\sigma', \rho'; \rho, \sigma)$ è $\wedge$-esatto anzi Pull Bak ma non $\vee$-esatto, quindi non esatto.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARDUINI P.: *Monomorphism and epimorphism in abstract categories*, Rend. Sem. Mat. Università di Padova (1969) volume XLII.

[2] BOURBAKI N.: *Théorie des ensembles*, Chap. III, ed. Hermann, Paris.

[3] CARTAN H., EILEMBERG S.: *Homological Algebra*, Princenton University Press (1956).

[4] HILTON P.: *Correspondences and exact squares Proc. of the Conf. on Categ. Alg.*, La Jolla (1965).

[5] MITCHELL B.: *Theory of categories*, Academic Press, New York and London (1965).

Manoscritto pervenuto in redazione il 30 maggio 1970.