RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SANTUZZA BALDASSARRI GHEZZO

Proprietá di ideali in domini d'integritá noetheriani

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 43 (1970), p. 233-246

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__43__233_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

PROPRIETÁ DI IDEALI IN DOMINÎ D'INTEGRITÁ NOETHERIANI

SANTUZZA BALDASSARRI GHEZZO *)

In questa nota si studiano alcune proprietà degli ideali dei dominî d'integrità noetheriani, e si danno caratterizzazioni dei dominî noetheriani che soddisfano alla proprietà di estensione, siffatti cioè che per ogni loro ideale J di altezza maggiore di 1, nel corpo totale delle frazioni di A risulti $\bigcap_{p \not\supset J} A_p = A$, l'intersezione essendo presa sopra tutti gli ideali primi di p di A che non contengono J), (si scriverà $A \in P.E.$).

Premettiamo qualche definizione, precisamente: sia A un dominio noetheriano ed I un suo ideale. Se Q è un ideale di A siffatto che per ogni ideale primo $p \not\supset Q$ è $I_p \cong A_p$, diciamo che J è *localmente libero fuori di* Q. La nota equivalenza

$$I \not\subseteq p \Leftrightarrow I_p = A_p \tag{1}$$

([2], (1.11), pag. 213) mostra intanto che ogni ideale di I è localmente libero fuori di I.

Inoltre si dirà che I è *libero fuori di* Q se, esiste un isomorfismo

$$\bigcap_{p \not\supset Q} A_p \cong \bigcap_{p \not\supset Q} I_p \tag{2}$$

il quale per ogni $p \not\supset Q$ si estenda ad un isomorfismo di A_p su I_p. Dall'equivalenza (1) segue anche che un isomorfismo del tipo (2) esiste certamente ed è fornito dall'identità per $Q = I$. Quindi ogni ideale I è libero fuori di I.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

Premesso ciò, i risultati conseguiti nella presente nota possono riassumersi come segue:

I. Le proposizioni 1-6 esprimono proprietà del conduttore di un dominino noetheriano A in $A[\sigma]$, σ essendo nel corpo totale A_S dei quozienti di A; e condizioni affinchè un ideale I di A sia libero fuori d'un dato ideale Q. Un esempio al n. 7 illustra le proprietà trovate.

II. La proposizione 7 afferma l'esistenza, in ogni dominio noetheriano A che non soddisfi alla proprietà di estensione, di ideali generati da 2 elementi e liberi fuori d'un ideale di altezza maggiore di 1, che hanno dimensione omologica maggiore di 1.

Inoltre ai nn. 10-12 si dimostra (teor. 1) che se $A \in P.E.$ e J è un ideale di A libero fuori d'un ideale di altezza maggiore di 1, ogni A-monomorfismo di J in A^r, $r \geqslant 1$, induce un monomorfismo di A in A^r. Ciò permette di provare (teor. 2) che se $A \in P.E.$ ogni ideale generato da 2 elementi e libero fuori d'un ideale di altezza maggiore di 1 ha una risoluzione libera di lunghezza minore od eguale ad 1.

Si può concludere quindi che: condizione necessaria e sufficiente affinchè un dominio noetheriano soddisfi alla proprietà di estensione è che ogni suo ideale generato da 2 elementi e libero fuori d'un ideale di altezza maggiore di 1 abbia dimensione omologica minore od eguale ad 1; oppure: che ogni siffatto ideale sia del tipo $(Af+Aq)a$, con f non appartenente a nessun divisore primo (= ideale primo associato) di Aq.

Una caratterizzazione degli stessi dominî noetheriani A con proprietà di estensione è data da C. Margaglio [6] in termini di A-coppie.

I.

1. Indicheremo con A un dominio noetheriano, cioè un anello commutativo con $1 \neq 0$, privo di divisori dello zero, e soddisfacente alla condizione delle catene ascendenti. Fra gli ideali di A escluderemo, salvo avviso contrario, l'ideale identico, e diremo altezza $h(p)$ di un ideale primo p di A, il massimo delle lunghezze delle catene discendenti di ideali primi, del tipo della seguente $p = p_r \supset p_{r-1} \supset \ \dots \ p_1 \supset (0)$ (la cui lunghezza è r); e per un ideale I di A, diremo altezza $h(I)$ di I, il minimo

delle altezze dei divisori primi minimali di I, cioè degli ideali primi isolati di I.

2. Indicheremo con A_S il corpo delle frazioni di A, e per ogni elemento $\sigma \in A_S$, indicheremo con I^σ (o con $I_A{}^\sigma$) il conduttore $A : \sigma$ di A in $A[\sigma]$, cioè l'ideale degli elementi r di A tali che $r\sigma \in A$. I^σ non è nullo perchè se σ ammette la rappresentazione f/q, $Aq \subset I^\sigma$; inoltre per ogni x di I^σ, essendo $(f/q)x = a \in A$, è anche $f/q = a/x$. Se σ ammette una rappresentazione del tipo f/q con $f \in Aq$, e quindi anche una del tipo $a/1$ con $a \in A$, noi diremo che $\sigma \in A$, ed in tal caso si ha ovviamente: $I^\sigma = A$, anzi:

$$\sigma \in A \Leftrightarrow I^\sigma = A.$$

Si prova facilmente la seguente:

PROPOSIZIONE 1. *Se f/q è una rappresentazione irriducibile di $\sigma \notin A$, ed f appartiene a qualche divisore primo di Aq, allora $I^\sigma \neq Aq$, ed I^σ è contenuto in qualche divisore primo di Aq. Se invece f non appartiene a nessun divisore primo di Aq, allora $I^\sigma = Aq$, e quindi $h(I^\sigma) = 1$.*

Infatti per ipotesi $f \notin Aq$ e poichè per ogni elemento x di I^σ si ha $(f/q)x \in A$, $fx \in Aq$, e quindi, ([9], cor. 2, pag. 214), se f appartiene ad un divisore primo di Aq, ogni x di I^σ appartiene a qualche divisore primo di Aq, ed esiste qualche $x \in I^\sigma$ fuori di Aq. Dunque I^σ è contenuto nell'unione (finita) dei divisori primi di Aq, e perciò, ([9], pag. 215), I^σ è contenuto in uno di essi, ed $I^\sigma \not\subset Aq$.

Se invece f non appartiene a nessun divisore primo di Aq, non può esistere un x fuori di Aq tale che $fx \in Aq$ quindi $I^\sigma \subset Aq$, e poichè $q \in I^\sigma$ risulta $I^\sigma = Aq$, $(Aq : Af = Aq)$.

3. Ricordiamo che se p è un ideale primo di A, s'indica con A_p l'anello delle frazioni di A con denominatore nella parte moltiplicativa $A - p$, e per ogni ideale I di A s'indica con I_p, e si dice localizzazione di I sopra p, lo A_p-modulo $I \underset{A}{\otimes} A_p$ che s'identifica con l'ideale $I \cdot A_p$ generato in A_p dall'immagine di I nell'omomorfismo canonico $A \to A_p$.

Osserviamo che se $\sigma = f/q$ è un elemento di A_S, per ogni ideale primo p di A che non contenga q è $\sigma \in I_p{}^\sigma = I^\sigma \cdot A_p$, poichè $f/q = q(f/q^2)$.

Diremo che un elemento σ di A_S è *definito sopra un ideale primo* p se e solo se $\sigma \in I_p^\sigma$.

PROPOSIZIONE 2. *Un elemento σ di A_S è definito sopra un ideale primo p se e solo se $I^\sigma \not\subseteq p$, e quindi se e solo se $I_p^\sigma = A_p$.*

Infatti se σ è definito sopra p, esso ammette una rappresentazione f/q con $q \notin p$, e poichè $q \in I^\sigma$, risulta $I^\sigma \not\subseteq p$. Viceversa se $I^\sigma \not\subseteq p$, per un y di I^σ che non appartenga a p, dalla $(f/q)y = a \in A$, si ricava $f/q = a/y$, con y fuori di p. La seconda affermazione dell'enunciato discende dalla equivalenza (1) citata in prefazione.

Dunque sono definiti su p tutti e soli gli elementi di A_S che appartengono ad A_p. Si osservi che se $\sigma = f/q$ è definito su p e $q \in p$, allora anche $f \in p$. Infatti in tal caso per ogni x di I^σ si ha $fx = aq \in p$, e per la prop. 2 non è $x \in p$ per ogni x di I^σ. Si osservi ancora che poichè per $p' \subset p$, è $A_p \subset A_{p'}$, un elemento σ di A_S che sia definito sopra tutti gli ideali massimali m di A è definito sopra tutti gli ideali primi di A, e poichè come è noto, ([7], 33.9, pag. 118) $\bigcap_m A_m = A$, risulta che in tal caso $\sigma \in A$ e quindi $I^\sigma = A$.

Poichè per la proposizione 2, ogni elemento $\sigma \in A_S$ è definito sopra tutti e soli gli ideali primi di A che non contengono I^σ, noi diremo che *σ è definito fuori di I^σ*, e converremo di indicare con $C(I)$ la totalità degli ideali primi di A che non contengono un dato ideale I.

Osserviamo infine che se un elemento $\sigma \in A_S$ è definito almeno fuori di un ideale I, il che significa che $I \not\subseteq p \Rightarrow I^\sigma \not\subseteq p$, allora $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{I^\sigma}$, ed $h(I) \leqslant h(I^\sigma)$.

Diremo che un elemento σ di A_S è *ammissibile* se esso è definito almeno fuori di un ideale di altezza maggiore di 1, il che comporta $h(I^\sigma) > 1$, oppure $I^\sigma = A$. Un dominio noetheriano A si dice soddisfacente alla *proprietà di estensione*, e si scrive $A \in P.E.$, se i soli elementi ammissibili di A_S sono gli elementi di A, in altri termini $A \in P.E.$ se per ogni ideale I di A di altezza maggiore di 1, risulta $\bigcap_{p \in C(I)} A_p = A$, (l'intersezione è fatta in A_S e si scriverà anche $\bigcap_{p \not\supseteq I} A_p$).

4. Se A è finitamente generato sopra un corpo k algebricamente chiuso, in modo che esso può essere identificato con l'anello $\Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ delle sezioni globali del fascio degli anelli locali $\mathcal{O}_V$ di una varietà algebrica affine $(V, \mathcal{O}_V)$ dello spazio affine k^n (con la topologia di Zariski),

ogni elemento σ di A_S che sia definito fuori di un ideale I di A, può identificarsi con una sezione s di $\mathcal{A}_V$ definita sull'aperto U complementare del chiuso degli zeri di I in V, cioè come un elemento dell'anello $\Gamma(U, \mathcal{A}_V)$, e l'ideale I^σ può pensarsi costituito dalle funzioni r regolari su V, siffatte che rs si prolunga a tutta V ([1], pag. 52).

Dunque un elemento σ di A_S è ammissibile quando esso può identificarsi con una sezione di $\mathcal{A}_V$ definita fuori di un chiuso di codimensione maggiore di 1 in V; e $\Gamma(V, \mathcal{A}_V)$ soddisfa alla proprietà di estensione (si dice in tal caso che $V \in P.E.$) quando per ogni aperto U complementare di un chiuso di cdm.>1 in V è: $\Gamma(U, \mathcal{A}_V) \cong \Gamma(V, \mathcal{A}_V)$, nell'isomorfismo ottenuto per restrizione ad U delle sezioni globali di $\mathcal{A}_V$. È noto ([1]) che le varietà algebriche affini normali soddisfano alla proprietà di estensione, anzi che vi soddisfano tutti i dominî d'integrità di Macaulay, i dominî d'integrità localmente fattoriali (cioè i dominî sui quali, per ogni ideale primo massimale m, A_m risulta a fattorizzazione unica), ed i dominî noetheriani integralmente chiusi nel corpo dei quozienti.

5. Sia ancora A un dominio d'integrità noetheriano ed I un ideale di A. Indicheremo con $H(I)$ l'ideale (radicale) intersezione di tutti gli ideali primi p di A tali che I ha localizzazione non libera su A_p e diremo che I è *localmente libero fuori di* $H(I)$. Si ha ([2], pag. 214):

$$H(I) \not\subseteq p \Leftrightarrow I_p \cong A_p\,, \tag{1}$$

e poichè è:

$$I \not\subseteq p \Leftrightarrow I_p = A_p\,, \tag{2}$$

risulta che $I \not\subseteq p \Rightarrow H(I) \not\subseteq p$, ed anche

$$I \subseteq H(I) \text{ ed } h(I) \leqslant h(H(I)).$$

Inoltre ricordiamo che detto i_p l'omomorfismo canonico $A \to A_p$, se è $I \subseteq p$, poichè $i_p^{-1}(I_p)$ è costituito da tutti gli elementi a di A tali che $am \in I$ per qualche $m \notin p$, risulta $I \subseteq i_p^{-1}(I_p) \subseteq p$ ([9], teor. 15 (a), pag. 223); ed i generatori di I_p in A_p si trovano fra i generatori di $i_p^{-1}(I_p) = I_p \cap A$ in A ([8], 2.6, prop. 9).

Dimostriamo ora le seguenti proposizioni:

PROPOSIZIONE 3. *Sia I un ideale d'un dominio noetheriano A, ed S un insieme di ideali primi di A. Se per un $\bar{p}\in S$ è $A_{\bar{p}}\cong I_{\bar{p}}$ in un isomorfismo $\varphi_{\bar{p}}$ tale che $\varphi_{\bar{p}}(1)=\sigma\in \bigcap_{p\in S} I_p$ e se $\bigcap_{p\in S} I_p$ è contenuto nel conduttore $I^{\sigma^{-1}}=(\bigcap_{p\in S} A_p):\sigma^{-1}$, allora $\varphi_{\bar{p}}$ definisce, per restrizione del suo dominio un isomorfismo φ_S di $\bigcap_{p\in S} A_p$ su $\bigcap_{p\in S} I_p$.*

Infatti basta prendere per φ_S lo $(\bigcap_{p\in S} A_p)$-isomorfismo di $\bigcap_{p\in S} A_p$ in $\bigcap_{p\in S} I_p$ definito da $\varphi_S(1)=\sigma=\varphi_{\bar{p}}(1)$. Questo isomorfismo risulta suriettivo in quanto per ogni $\tau\in \bigcap_{p\in S} I_p$, poichè $\tau\in I_{\bar{p}}$ è $\tau=\varphi_{\bar{p}}(\tau')=\tau'\sigma$ con $\tau'\in A_{\bar{p}}$, ma $\tau\in I^{\sigma^{-1}}$ dunque $\tau'\in \bigcap_{p\in S} A_p$ e quindi $\tau=\tau'\varphi_S(1)\in Im(\varphi_S)$.

PROPOSIZIONE 4. *Se nella prop. 3 l'ipotesi che sia $\bigcap_{p\in S} I_p\subset I^{\sigma^{-1}}$ si sostituisce con la seguente: per ogni $p\in S$ sia $I_p\subset A_p:\sigma^{-1}$, allora risulta che l'isomorfismo φ_S ivi trovato si estende per ogni $p\in S$ ad un isomorfismo φ_p di A_p su I_p.*

Infatti in questa ipotesi posto $\varphi_p(1)=\varphi_S(1)=\sigma$ resta definito un A_p-isomorfismo di A_p in I_p, e poichè per ipotesi ogni $\tau\in I_p$ è tale che $\tau\sigma^{-1}\in A_p$ e quindi $\tau\in\varphi_S(1)A_p$, risulta $I_p=\varphi_S(A_p)$.

Un ideale I di A per il quale esista un isomorfismo φ_S di $\bigcap_{p\in S} A_p$ su $\bigcap_{p\in S} I_p$, il quale si estenda per ogni $p\in S$ ad un isomorfismo di A_p su I_p, verrà detto *libero su S*, ed anche se Q è un ideale di A tale che l'insieme $C(Q)$ degli ideali primi di A che non contengono Q è contenuto in S, diremo che I è *libero fuori di Q*. In particolare I è libero fuori di I, anzi dalla (2) del n. 5, risulta $\bigcap_{p\in C(I)} A_p=\bigcap_{p\in C(I)} I_p$.

6. PROPOSIZIONE 5. *Sia I un ideale di un dominio noetheriano A e, per ogni $p\in C(H(I))$, sia φ_p un isomorfismo di A_p su I_p. Se S è un sottoinsieme di $C(H(I))$ tale che per ogni $p\in S$ sia $\varphi_p(1)\in \bigcap_{p\in S} I_p$, allora per ogni $\bar{p}\in S$ tale che $\bigcap_{p\in S} I_p$ sia contenuto nel conduttore $(\bigcap_{p\in S} A_p):\varphi_{\bar{p}}(1)^{-1}$, φ_p definisce, per restrizione del dominio, un iso-*

morfismo φ_S *di* $\bigcap_{p\in S} A_p$ *su* $\bigcap_{p\in S} I_p$, *e questo isomorfismo si estende per ogni* $p\in S$ *ad un* A_p*-isomorfismo* φ'_p *di* A_p *su* I_p *che fattorizza* φ_p.

Infatti l'isomorfismo φ_S resta definito da $\varphi_{\bar{p}}$ come risulta dalla prop. 3. Inoltre da $\varphi_p(1)\in \bigcap_{p\in S} I_p$ per ogni $p\in S$, segue che per ogni coppia p, $p'\in S$ è $\varphi_p(1)=\varphi_{p'}(\rho_{p,p'})$ con $\rho_{p,p'}\in A_{p'}$ e $\varphi_{p'}(1)=\varphi_p(\rho_{p',p})$ con $\rho_{p',p}\in A_p$ da cui (nel corpo dei quozienti di A) $\varphi_p(1)=\rho_{p,p'}\rho_{p',p}\varphi_p(1)$ e perciò $\rho_{p,p'}\rho_{p',p}=1$; dunque $\rho^{-1}_{p,p'}=\rho_{p',p}\in A_p$. Allora per ogni $p\in S$ si può definire un A_p-isomorfismo φ'_p di A_p in I_p ponendo $\varphi'_p(1)=\varphi_S(1)=\varphi_{\bar{p}}(1)=$ $=\rho^{-1}_{p,\bar{p}}\ \varphi_p(1)$, dunque componendo φ'_p con la divisione per $\rho^{-1}_{p,\bar{p}}$ si ottiene φ_p

In particolare, tenuto conto che dalle (1) e (2) del n. 5 segue che è $C(I)\subseteq C(H(I))$, vale anche la seguente

PROPOSIZIONE 6. *Sia* I *un ideale di un dominio noetheriano* A, *se* p_i *è un ideale appartenente a* $C(H(I))$ *e non a* $C(I)$, *e se nell'isomorfismo* $\varphi_{p_i}: A_{p_i}\to I_{p_i}$ *è* $\varphi_{p_i}(1)=\sigma$ *con* σ *definito ed invertibile fuori di* I, *allora* I *è libero su* $S=C(I)\cup p_i$, *e l'isomorfismo* φ_S *si estende per ogni* $p\in C(I)$ *ad un automorfismo di* $A_p=I_p$.

Infatti per ipotesi $p_i\supset I$ e σ ha numeratore in I, perciò se σ è definito fuori di I, ponendo $\varphi_S(1)=\sigma$ si ottiene un isomorfismo φ_S di $\bigcap_{p\in S} A_p$ in $\bigcap_{p\in S} I_p$; inoltre se σ (che non è invertibile in A_{p_i}) è invertibile fuori di I, ogni $\tau\in \bigcap_{p\in S} I_p$ può scriversi nella forma $\sigma\tau'$ con $\tau'\in \bigcap_{p\in S} A_p$. Il resto è ovvio.

7. Illustriamo le affermazioni precedenti con il seguente esempio:

Sia A l'anello delle coordinate della superficie V dello S^4, appartenente all'ideale $J(V)=(y^2-x^2(1-z),\ t^2-z^2(1-z),\ tx-yz)$, ([1], pag. 53), di $k[x, y, z, t]$, cioè $A=k[x, y, z, t]/J(V)$, dove k è un corpo algebricamente chiuso.

Consideriamo in A l'ideale (non principale) $I=(Y,\ Z(1-Z),\ T)$. Poichè $I=(Y, Z, T)\cap(Y, 1-Z, T)$, il chiuso degli zeri di I in V, costituito dall'origine 0 contata due volte e dalla retta $y=t=0$, $z=1$, è di cdm. 1 in V, quindi $h(I)=1$. Gli ideali primi che contengono I sono $p_0=(X, Y, Z, T)$, $p_a=(X-a,\ Y,\ 1-Z,\ T)$ per ogni a di k, e $p'=(Y,$

$1-Z,\ T)\subset p_a$; si verifica subito che $A_{p_a}\overset{\varphi_{p_a}}{\cong} I_{p_a}$ e quindi ([2], pag. 214) $A_{p'}\overset{\varphi_{p'}}{\cong} {}_{p'}$, infatti, (n. 5), $I_{p_a}\cap A=I_{p'}\cap A=(Y,\ 1-Z,\ T)$ e in A_{p_a} come in $A_{p'}$, Y e $(1-Z)$ appartengono all'ideale principale generato da T, in quanto, viste le relazioni valide in A, $Y=(X/Z)T$ e $1-Z=(T/Z^2)T$, quindi i generatori di I_{p_a} in A_{p_a} e di $I_{p'}$ in $A_{p'}$ sono divisori di T, anzi gli isomorfismi φ_{p_a} e $\varphi_{p'}$ possono essere definiti da $\varphi_{p_a}(1)=\varphi_{p'}(1)=$ $=T/Z$, per ogni a. Invece $I_{p_0}\not\cong A_{p_0}$ poichè $I_{p_0}\cap A=(X^2,\ Y,\ Z,\ T)$ e X^2, Y, Z, T generano in A_{p_0} un ideale contenuto nell'ideale massimale e non principale. Infine sugli ideali primi p che non contengono I è $A_p=I_p$, quindi $\varphi_p(1)=1$.

Ora nel corpo totale A_S dei quozienti di A è $T/Z=Y/X=Z(1-$ $-Z)/T=X(1-Z)/Y=\sigma$ che è un elemento definito fuori di p_0 quindi $\sigma\in\bigcap_{p\neq p_0} I_p$; e infine $(\bigcap_{p\neq p_0} I_p)\subset(\bigcap_{p\neq p_0} A_p):\sigma^{-1}$ in quanto σ è invertibile fuori di p_0. Risulta allora dalla prop. 5 che I è libero fuori di $p_0=(X,\ Y,\ Z,\ T)$ che è il conduttore $I_A{}^\sigma$ di A in $A[\sigma]$, ed è $h(I_A{}^\sigma)>1$.

L'esistenza in A_S dell'elemento ammissibile $\sigma\notin A$ mostra che $A\notin P.E.$; osserviamo inoltre che $h(I)=1$, ma I è libero fuori di un ideale $I_A{}^\sigma=H(I)$ di altezza maggiore di 1 in A, ed inoltre esso non è proiettivo ([4], pag. 141).

II.

8. Osservazione: *In un dominio noetheriano A nessun ideale proprio I di altezza maggiore di* 1 *è proiettivo su A.*

In altri termini se $I\neq A$ ed $h(I)>1$, I, che risulta libero fuori di un ideale d'altezza maggiore di 1 (fine n. 5), non è ovunque localmente libero.

Infatti essendo $h(I)>1$, per ogni ideale primo minimale p di A risulta $I_p=A_p$, inoltre se p' è un ideale primo non minimale in A ed esiste un isomorfismo di $A_{p'}$ su $I_{p'}$ definito da $\varphi_{p'}(1)=\tau\in I_{p'}$, allora per ogni primo minimale p di A contenuto in p', ricordando che, ([2], pag. 214), $A_p\cong A_p\bigotimes_{A_{p'}} A_{p'}\cong A_p\bigotimes_{A_{p'}} I_{p'}\cong I_p$ si vede che $\varphi_{p'}$ induce un isomorfismo di A_p su I_p che si può definire ponendo $\varphi_p(1)=(1_{A_p}\bigotimes_{A_{p'}}\varphi_{p'})(1\otimes 1)=\tau$, e che

deve essere un automorfismo di A_p. Dunque per ogni ideale primo minimale $p \subset p'$, τ deve esse invertibile in A_p cioè $\tau \notin pA_p$, ma allora τ è invertibile in $A_{p'}$, poichè se fosse $\tau = \frac{f}{q} \in p'A_{p'}$, f sarebbe contenuto in qualche primo minimale $p \subset p'$, e quindi τ apparterrebbe a pA_p. Se ne deduce che se I è localmmente libero su A, per ogni ideale primo p di A risulta $I_p = A_p$, e quindi necessariamente $I = A$.

9. Supponiamo ora che $A \notin P.E.$, allora esiste in A_S un elemento $\sigma \notin A$ tale che $h(I^\sigma) > 1$ (n. 3), quindi, (n. 2), è $I^\sigma \neq A$, ed I^σ non è principale, perciò se f/q è una rappresentazione irriducibile di σ, $q \notin Af$ ed f appartiene a qualche divisore primo di Aq (n. 2, prop. 1), e non ad Aq. Inoltre per l'osservazione del n. precedente I^σ non è un A-modulo proiettivo .

Consideriamo in A l'ideale $I = (q, -f)$, essendo esso generato da due elementi è $h(I) \leqslant 2$ ([7], (9.3)) e, poichè $\frac{f}{q}$ è irriducibile, I non è principale; inoltre per ogni ideale primo p di A che non contenga I^σ, preso un elemento x di I^σ che non stia in p, è $xf = yq$ con $y \in A$ ed ogni elemento di I_p può scriversi nella forma:

$$\alpha q - \beta f = (\alpha x q - \beta x f)/x = [(\alpha x - \beta y)/x]q, \qquad \alpha, \beta \in A_p,$$

quindi, qualunque sia $p \not\supset I^\sigma$, è $A_p \cong I_p$, nell'isomorfismo $\varphi_p(1) = q$, dunque, (n. 6, prop. 5), I è libero fuori dell'ideale I^σ di altezza > 1.

Consideriamo ora per I la sequenza esatta

$$0 \to N_c(\psi) \to A^2 \xrightarrow{\psi} I \to 0$$

dove $\psi(a, b) = aq - bf$. Qui $N_c(\psi)$ è costituito dalle coppie $(a, b) \in A^2$ con $aq - bf = 0$, cioè dalle coppie che rappresentano σ in A_S. Le seconde componenti degli elementi di $N_c(\psi)$ descrivono dunque l'ideale I^σ di A. Ne segue che $N_c(\psi)$ non può essere proiettivo, perchè

$$N_c(\psi) \cong qN_c(\psi) = q\{(a, b)\} = (f, q)\{b\} \cong I^\sigma, \qquad (a, b) \in N_c(\psi), \qquad b \in I^\sigma,$$

ed I^σ non è proiettivo.

Notiamo che si può dunque anche affermare che I non è proiettivo ([2], n. 10, lemma 1). In definitiva abbiamo provato ([5], pag. 201), che vale la seguente

PROPOSIZIONE 7. *Se un dominio noetheriano A non soddisfa alla proprietà di estensione, esso contiene qualche ideale generato da 2 elementi e libero fuori di un ideale di altezza >1, avente dimensione omologica >1.*

Osserviamo che l'ideale $I=(q, -f)$, sopra costruito a partire dall'elemento ammissibile $\sigma=f/q$ di A_S, è di altezza 1.

Infatti in I^σ esiste qualche elemento y che non appartiene a nessun divisore primo minimale di Aq, poichè in caso contrario I^σ starebbe nell'unione finita dei divisori primi minimali di Aq e quindi in uno di essi (che è minimale anche in A ([9], pag. 238, teor. 29)) e ciò è assurdo perchè $h(I^\sigma)>1$. Allora poichè $fy\in Aq$, fy appartiene ai divisori primi minimali di Aq, e di conseguenza f e quindi anche $I=(q, -f)$ sono contenuti in un divisore primo minimale di Aq: perciò $h(I)=1$.

10. Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA 1. *Se A è un dominio noetheriano soddisfacente alla proprietà di estensione e J è un suo ideale libero fuori d'un ideale Q di altezza maggiore di 1; allora detto x l'isomorfismo di $\bigcap_{p \not\subset Q} J_p$ su $\bigcap_{p \not\subset Q} A_p$, ogni A-monomorfismo i di J in A^r $r\geqslant 1$, induce un monomorfismo ψ di A in A^r siffatto che $\psi\cdot(x/J)=i$.*

Infatti osserviamo dapprima che per ipotesi è $\bigcap_{p \not\supset Q} J_p=Aa$, (poichè $\bigcap_{p \not\supset Q} A_p=A$), dove $a\in A$ ed è tale che per ogni $p\not\supset Q$ esiste un $m_p\notin p$ per cui $\dfrac{am_p}{m_p}\in J_p$; e inoltre $J_p=A_pa$ per ogni $p\not\supset Q$. D'altra parte, per ogni $p\not\supset Q$, poichè $J_p=J\otimes_A A_p$, si ha una iniezione

$$0 \longrightarrow J_p \xrightarrow{i\otimes 1_{A_p}} A_p^r,$$

e se $p\not\supset Q$ e $p'\not\supset Q$ risulta $(i\otimes 1_{A_p})(a)=i(am_p)\otimes\dfrac{1}{m_p}$ e $(i\otimes 1_{A_{p'}})(a)=$ $=i(am'_{p'})\otimes\dfrac{1}{m'_{p'}}$, e perciò $m_pm'_{p'}(i\otimes 1_{A_p})(a)=m_pm'_{p'}(i\otimes 1_{A_p})(a)$, dunque

è

$$(i \otimes 1_{A_p})(a) = (i \otimes 1_{A_{p'}})(a)$$

e questo elemento appartiene ad ogni A_p^r con $p \not\supset Q$ di conseguenza, poichè $A \in P.E.$, esso sta in A^r. Indicata allora con i' la restrizione di $i \otimes 1_{A_p}$ (per un qualunque $p \not\supset Q$) a $\bigcap_{p \not\supset Q} J_p$, si potrà scrivere il seguente diagramma di A-moduli

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \bigcap_{p \not\supset Q} J_p \arrow[r, "x"] \arrow[d, "i'"'] & A \arrow[r] & 0 \\
 & A^r \arrow[ur, "\psi"'] & &
\end{tikzcd}$$

dove $i'/J = i$, e ψ è il monomorfismo che rende commutativo il nostro diagramma; ψ verifica perciò l'eguaglianza $\psi \circ (x/J) = i$. Il teorema è così dimostrato.

11. Lemma 1. *In un dominio noetheriano A soddisfacente alla proprietà di estensione, sia I un ideale generato da 2 elementi e libero fuori d'un ideale Q di altezza >1. Allora nelle seguenza esatta canonica*

$$(1) \qquad 0 \to N_c(\varphi) \to A^2 \xrightarrow{\varphi} I \to 0$$

anche $N_c(\varphi)$ è libero almeno fuori di Q.

Infatti per ipotesi $\bigcap_{p \not\supset Q} I_p = Aa$ e $I_p = A_p a$ dove $a \in A$ ed è tale che per ogni $p \not\supset Q$ esiste un $m_p \notin p$ per il quale è $m_p a \in I$; inoltre se $I = Ax + Ay$, posto $\sigma = \dfrac{-y}{x}$, nella (1) risulta $N_c(\varphi) \cong I^\sigma$ (n. 9).

Ora siano $\dfrac{f_1}{q_1} = \dfrac{f_2}{q_2} = \dots = \dfrac{f_n}{q_n}$ le rappresentazioni irriducibili di σ, per cui sarà $I^\sigma = Aq_1 + Aq_2 + \dots + Aq_n$ ed $I = (Af_1 + Aq_1)a'a$, $(-y = f_1 a'a$ e $x = q_1 a'a$, perchè $I \subset \bigcap_{p \not\supset Q} I_p)$, perciò per ogni $p \not\supset Q$ esisteranno in A un $m_p \notin p$ e a_{1p}, a_{2p} siffatti che $m_p a = (a_{1p} f_1 + a_{2p} q_1) a'a$, e quindi $(a_{1p} f_1 + a_{2p} q_1) a' = m_p \notin p$, se ne deduce che o $f_1 \notin p$ o $q_1 \notin p$.

Se $q_1 \notin p$ è

$$I_p^\sigma = A_p + A_p q_2 + \dots + A_p q_n = A_p ,$$

e se $f_1 \notin p$ e $q_1 \in p$ allora è

$$I_p^\sigma = f_1 I_p^\sigma = (A_p q_1 + A_p q_2 + \dots + A_p q_n) f_1 = (A_p + A_p f_2 + \dots + A_p f_n) q_1 = A_p q_1 ,$$

ed in questo caso presa una decomposizione di q_1 in fattori irriducibili, I_p^σ potrà venir generato dal prodotto di quei fattori di q_1 che appartengono a p. Nella decomposizione di q_1 qui sopra considerata, sia q' il prodotto dei fattori irriducibili che appartengono a qualche $p \not\supset Q$, sarà allora $I_p^\sigma = A_p q'$ per ogni $p \not\supset Q$, e di conseguenza si può affermare che

$$\bigcap_{p \not\supset Q} I_p^\sigma = Aq' \cong A = \bigcap_{p \not\supset Q} A_p .$$

Infatti $A \in P.E.$ ed $\bigcap_{p \not\supset Q} I_p^\sigma$ è costituito da tutti e soli gli elementi r di A tali che per ogni $p \not\supset Q$ esiste un $m_p \notin p$ per cui $\frac{rm_p}{m_p} \in I_p^\sigma$, e quindi $r = \frac{r_p}{s_p} q'$, questo implica che, nel corpo totale dei quozienti di A, $\tau = \frac{r_p}{s_p}$ è indipendente da $p \not\supset Q$ e quindi intero perchè $A \in P.E.$ Il lemma è così dimostrato.

Si può ora provare il seguente

TEOREMA 2. *In un dominio noetheriano soddisfacente alla proprietà di estensione, ogni ideale I generato da 2 elementi e libero fuori d'un ideale Q di altezza maggiore di 1, ammette una risoluzione libera di lunghezza $\leqslant 1$.*

Osserviamo intanto che per il lemma 1, dalla seguenza esatta

$$0 \to N_c(\varphi) \xrightarrow{i} A^2 \xrightarrow{\varphi} I \to 0$$

dove i è l'iniezione canonica, si deduce che $N_c(\varphi)$ è un A-modulo di rango 1 ed esiste un A-isomorfismo ε di $N_c(\varphi)$ su un ideale I^σ di A libero fuori di Q. Di conseguenza applicando il teorema 1 del n. 10 alla iniezione $i \circ \varepsilon^{-1}$ di I^σ in A^2 se ne deduce, se τ è l'isomorfismo di $\bigcap_{p \not\supset Q} I_p^\sigma$ su $\bigcap_{p \not\supset Q} A_p = A$, l'esistenza di una iniezione ψ di A in A^2 siffatta che $\psi \circ (\tau / I^\sigma) = i \circ \varepsilon^{-1}$ come illustra il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
 & I^\sigma \arrow[dl, "\varepsilon"'] \arrow[dr, "\tau/I^\sigma"] \arrow[dd, "i \circ \varepsilon^{-1}"] & \\
N_c(\varphi) \arrow[dr, "i"'] & & A \arrow[dl, "\psi"] \\
 & A^2 &
\end{tikzcd}$$

Si può allora considerare il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & N_c(\varkappa) \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners, to path={-- ([xshift=-2ex]\tikztostart.west) |- ([yshift=-2ex]\tikztotarget.south) -- (\tikztotarget)}] \\
0 \arrow[r] & N_c(\varphi) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\delta"'] & A^2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "1_{A^2}"] & I \arrow[r] \arrow[d, "\varkappa"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & A^2 \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d] & C_n(\psi) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & C_n(\psi) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & C_n(\varkappa) \arrow[d] & \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

nel quale $\delta=(\tau/I^\sigma)\circ\varepsilon$, e l'esistenza di x si deduce dal fatto che se $z\in I$ ed è $z=\varphi(\alpha_1)=\varphi(\alpha_2)$, α_1, $\alpha_2\in A^2$ è $\alpha_1-\alpha_2=i(y)=\psi\circ\delta(y)$ con $y\in N_c(\varphi)$ e quindi $\psi'(\alpha_1)-\psi'(\alpha_2)=\psi'\circ\psi\circ\delta(y)=0$, e infine l'esistenza di $\gamma: N_c(x)\cong Cn(\delta)$ si deduce in base al « diagramma del serpente » ([3], pag. 23), e $Cn(\delta)$ ha rango 0, quindi poichè I è privo di torsione sarà $N_c(\varkappa)=Cn(\delta)=0$ e quindi $N_c(\varphi)\cong A$ come volevasi.

Dal teor. 2, poichè $N_c(\varphi)\cong I^\sigma$ risulta $I^\sigma\cong A$, quindi si deduce (prop. 1, n. 2) il seguente

COROLLARIO. *In un dominio noetheriano $A\in P.E.$, ogni ideale generato da 2 elementi e libero fuori d'un ideale d'altezza >1 è del tipo $(Af+Aq)a$, con f non appartenente a nessun divisore primo di Aq,* (cioè con $Aq : Af=Aq$).

12. In definitiva la proposizione 7 del n. 9 ed il teorema 2 del n. 11 portano a concludere con il seguente

TEOREMA 3. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un dominio noetheriano soddisfi alla proprietà di estensione è che ogni suo ideale generato da 2 elementi e libero fuori d'un ideale di altezza maggiore di 1 abbia dimensione omologica minore od eguale ad 1.*

Ed ancora

TEOREMA 4. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un dominio noetheriano A appartenga alla proprietà di estensione è che ogni suo ideale generato da due elementi e libero fuori d'un ideale d'altezza* >1, *sia del tipo* $(Af+Aq)a$, *con* f *non appartenente a nessun divisore primo di* Aq.

BIBLIOGRAFIA

[1] BALDASSARRI, *M.*: *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci,* Atti del Conv. Internaz. di Geom. Alg. di Torino del 1961.

[2] BALDASSARRI GHEZZO, S.: *Sulle localizzazioni di ideali e moduli di tipo finito privi di torsione,* Rend. del Seminario Mat. della Univ. di Padova, C.E.D.A.M., (1967).

[3] BALDASSARRI GHEZZO, S.; MARGAGLIO,, C. e MILLEVOI, T.: *Introduzione ai metodi della geometria algebrica,* Cremonese, Roma, (1967).

[4] BOURBAKI, N.: *Algèbre commutative,* Chap. 1 e 2, Hermann, Paris, (1961).

[5] MAC LANE, S.: *Homology,* Springer-Verlag, Berlin, (1963).

[6] MARGAGLIO, C.: *Alcune proprietà delle R-coppie in un dominio d'integrità,* Rend. del Seminario Mat. della Univ. di Padova, C.E.D.A.M., (1967).

[7] NAGATA, M.: *Local rings,* Interscience Publishers, (1962).

[8] NORTHCOTT, D. G.: *Ideal theory,* Cambridge at the Univ. Press, (1953).

[9] ZARISKI, O. and SAMUEL, P.: *Commutative algebra I,* D. van Nostrand Comp. Inc., (1958).

Manoscritto pervenuto in redazione il 2 ottobre 1969.
(Un estratto anticipato è stato stampato presso C.E.D.A.M., Padova).