G. DE MARCO

# Funzioni reali continue e semicontinue

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 43 (1970), p. 203-208

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__43__203_0>

# FUNZIONI REALI CONTINUE E SEMICONTINUE

G. DE MARCO *)

1. Sia $X$ un insieme non vuoto, e sia $\boldsymbol{R}^X$ il corpo dei numeri reali. Diciamo $f$-sottoalgebre di $\boldsymbol{R}^X$ quelle sottoalgebre di $\boldsymbol{R}^X$ che sono algebre di tutte le funzioni continue di $X$ in $\boldsymbol{R}$ per una topologia su $X$.

Detto $F$ un sottoinsieme non vuoto di $\boldsymbol{R}^X$, viene in questa nota dato un procedimento che permette di costruire, con sole operazioni algebriche e reticolari su elementi di $\boldsymbol{R}^X$, la minima $f$-sottoalgebra di $\boldsymbol{R}^X$ che contiene $F$.

S. Ciampa (cfr. [2]) ha considerato una questione analoga, determinando le $f$-sottoalgebre di funzioni limitate di $\boldsymbol{R}^X$. Qui viene ripresa la condizione da lui data perchè una sottoalgebra di $\boldsymbol{R}^X$ sia una $f$-sottoalgebra di funzioni limitate, e vengono in più determinate le $f$-sottoalgebre di funzioni non limitate.

Viene mostrato come il procedimento seguito conduca, con lievi modifiche, anche alla determinazione dei sottoinsiemi di $\boldsymbol{R}^X$ che sono totalità delle funzioni semicontinue inferiormente per una topologia su $X$. Anche questa condizione è stata considerata, sempre in [2], da S. Ciampa.

Ringrazio S. Ciampa che mi ha suggerito la presente ricerca.

Le notazioni e la terminologia sono essenzialmente quelle di [3] tranne che per gli spazi completamente regolari, che possono qui non essere di Hausdorff.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R.
Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

**2.** Sia dunque $X$ un insieme non vuoto, e sia $F \subseteq \boldsymbol{R}^X$. Se $w = w(F)$ è la topologia debole di $F$, cioè la meno fine topologia su $X$ per cui le funzioni di $F$ sono continue, l'algebra $C = C(X, w)$ delle funzioni $w$-continue è ovviamente la minima $f$-sottoalgebra di $\boldsymbol{R}^X$ contenente $F$.

Una prebase di chiusi per $w$ è costituita dagli insiemi

$$\begin{array}{c} f^{-1}[(-\infty, r]] \\ f^{-1}[[r, +\infty)] \end{array} \qquad f \in F,\ r \in \boldsymbol{R}$$

Si ha

$$f^{-1}[(-\infty, r]] = Z[(f-r) \vee 0]$$

$$f^{-1}[[r, +\infty)] = Z[(f-r) \wedge 0]$$

Sia $B$ la minima sottoalgebra con unità di $\boldsymbol{R}^X$, che sia un sottoreticolo di $\boldsymbol{R}^X$, e contenga $F$. Sia $A$ la sottoalgebra delle funzioni limitate di $B$.

Poichè gli zeri delle funzioni di $B$ sono gli zeri delle funzioni di $A$, la famiglia di insiemi $\{Z(u) : u \in A\}$ è una base di chiusi per $w$.

PROPOSIZIONE 1. *Sia $f \in R^X$ inferiormente limitata, $w$-semicontinua inferiormente. Essa è inviluppo delle funzioni di $A$ che non superano $f$.*

DIM. Supponiamo $f$ non negativo (in caso contrario basta considerare la funzione $f - n$, con $n = \inf\{f(x) : x \in X\}$).

Se per $x \in X$ si ha $f(x) > 0$, sia $r \in \boldsymbol{R}$ tale che $0 \leqslant r < f(x)$.

Per la semicontinuità inferiore, esiste un intorno aperto $U$ di $x$ tale che per ogni $y \in U$, $f(y) > r$. Essendo gli $Z(u)$, $u \in A$, una base di chiusi, esiste $u \in A$ tale che $Z(u) \supseteq X - U$ e $x \notin Z(u)$. Posto $\xi = u(x)$, la funzione

$$g = r(((\xi^{-1} u) \vee 0) \wedge 1)$$

è una funzione di $A$ tale che $g(x) = r$, $0 \leqslant g \leqslant f$; infatti, se $y \notin U$, $g(y) = 0 \leqslant f(y)$, se $y \in U$, $g(y) \leqslant r < f(y)$.

PROPOSIZIONE 2. *Sia $f \in R^X$ superiormente limitata, $w$-semicontinua superiormente. Essa è inviluppo inferiore delle funzioni $v \in A$ per cui $v \geq f$.*

DIM. $-f$ è inferiormente limitata, $w$-semicontinua inferiormente. Per la prop. 1

$$-f = \bigvee \{u \in A : u \leq -f\}$$

quindi

$$f = \bigwedge \{v \in A : v \geq f\}.$$

3. Diciamo $L$-sezione, o sezione reticolare di $A$ una coppia ordinata $(\Phi, \Psi)$ di sottoinsiemi con vuoti di $A$ tali che

i) $\bigvee \Phi$, $\bigwedge \Psi$ esistono in $R^X$, e $\bigvee \Phi = \bigwedge \Psi$

ii) se $\varphi \in \Phi$, $\varphi' \in A$, $\varphi' \leq \varphi$ allora $\varphi' \in \Phi$ e se $\psi \in \Psi$, $\psi' \in A$, $\psi' \geq \psi$ allora $\psi' \in \Psi$.

La funzione $f = \bigvee \Phi = \bigwedge \Psi$ la diciamo elemento separatore della $L$-sezione.

Indichiamo con $C^*$ la sottoalgebra delle funzioni limitate di $C = C(X, w)$.

TEOREMA 1. *$C^*$ è l'insieme degli elementi separatori delle $L$-sezioni di $A$.*

DIM. Se $f \in C^*$, posto $\Phi = \{\varphi \in A : \varphi \leq f\}$, $\Psi = \{\psi \in A : \psi \geq f\}$, $(\Phi, \Psi)$ è una $L$-sezione di $A$ di cui $f$ è elemento separatore, per le Propp. 1, 2.

Sia poi $f$ elemento separatore di una $L$-sezione $(\Phi, \Psi)$ di $A$; per ogni $\varphi \in \Phi$ e ogni $\psi \in \Psi$ si ha $\varphi \leq f \leq \psi$, ed essendo $\varphi$ e $\psi$ limitate, tale è anche $f$. Inoltre $f$ è inferiormente semicontinua, essendo $f = \bigvee \Phi$, e superiormente semicontinua in quanto $f = \bigwedge \Psi$.

Noto $C^*$, $C$ si costruisce nel modo seguente:

Diciamo $t$-successione, o successione di troncamenti di $C^*$ una successione $(u_n)_{n \in N}$ di elementi non negativi di $C^*$ tale che

I) $\bigvee \{u_n : n \in N\}$ esiste in $R^X$

II) $u_{n+1} \wedge n = u_n$ per ogni $n \in N$.

Sia $C_+$ la totalità delle funzioni non negative di $C$.

TEOREMA 2. *$C_+$ è l'insieme degli inviluppi superiori delle t-successioni di $C^*$.*

DIM. Se $f\in C_+$, si ponga $u_n=f\wedge n$. La successione $(u_n)_{n\in N}$ è una $t$-successione di $C^*$ tale che $f=\bigvee\{u_n : n\in N\}$.

Sia poi $f$ inviluppo superiore di una $t$-successione di $C$, $f=$ $=\{u_n : n\in N\}$. Allora $u_n=f\wedge n$, e posto $A_n=\{x\in X : f(x)<n\}=\{x\in X :$ $: u_n(x)<n\}$, gli $A_n$ sono aperti, $\bigcup\{A_n : n\in N\}=X$, e $f\,|\,A_n=u_n\,|\,A_n$ è continua per ogni $n$. Quindi $f$ è continua.

La conoscenza di $C_+$ porge $C$, potendosi per ogni $f\in C$ scrivere

$$f=f^+-f^-$$

dove $f^+=f\vee 0$, $f^-=-(f\wedge 0)$.

**4.** Mostriamo ora come il procedimento del paragrafo precedente conduca alla determinazione dei sottoreticoli $I$ di $\boldsymbol{R}^X$ che sono reticoli di tutte le funzioni semicontinue inferiormente di $X$ in $R$ per una topologia su $X$. Per semplicità di linguaggio diremo $I$-reticoli questi sottoreticoli. Dato un sottoinsieme, $F$, di $\boldsymbol{R}^X$ costituiremo il minimo $I$-sottoreticolo di $\boldsymbol{R}^X$ contenente $F$.

Sia $w_i$ la meno fine topologia su $X$ che rende semicontinue inferiormente le funzioni di $F$.

Una prebase di chiusi per $w_i$ è costituita dagli insiemi

$$f^{-1}[(-\infty,\ r]]=Z[(f-r)\vee 0] \quad f\in F \quad r\in R$$

Sia $G$ il sottoreticolo di $\boldsymbol{R}^X$ generato dalle costanti non negative e dalle funzioni della forma

$$s\cdot(f-r)\vee 0 \quad f\in F; \quad r\in \boldsymbol{R}; \quad s\in \boldsymbol{R}_+$$

($\boldsymbol{R}_+$ denota l'insieme dei numeri reali non negativi).

Allora $G$ contiene solo funzioni non negative, ed essendo per $f,\ g\in G$

$$Z(f)\cup Z(g)=Z(f\wedge g)$$

gli insiemi $\{Z(u) : u \in G\}$ costituiscono una base di chiusi per $w_i$. Poniamo $A' = \boldsymbol{R} + G$ dove $\boldsymbol{R} + G$ indica la totalità delle funzioni della forma $r+g$, $r \in \boldsymbol{R}$, $g \in G$.

PROPOSIZIONE 1'. *Ogni $f \in \boldsymbol{R}^X$ $w_i$-semicontinua inferiormente, e inferiormente limitata, è inviluppo superiore delle funzioni $u \in A'$ tali che $u \leq f$.*

La proposizione 1' si dimostra in modo identico alla Prop. 1 dimostrando dapprima che ogni funzione $w_i$-semicontinua inferiormente, e non negativa, è inviluppo superiore delle funzioni di $G$ che sono non maggiori di essa. In questa dimostrazione si sfrutta la proprietà di chiusura di $G$ rispetto alla moltiplicazione di suoi elementi per costanti reali non negative. L'essere poi $A' = \boldsymbol{R} + G$ permette di « traslare » convenientemente le operazioni fatte anche a funzioni non positive.

Diciamo ora $L$-segmento di $A'$ ogni sottoinsieme non vuoto $\Phi$ di $A'$ tale che

i)' $\bigvee \Phi$ esiste in $\boldsymbol{R}^X$

ii)' se $\varphi \in \Phi$, $\varphi' \in A'$, $\varphi' \leq \Phi$ allora $\varphi' \in \Phi$.

Diciamo $I^* = I^*(X, w_i)$ la totalità delle funzioni $w_i$-semicontinue inferiormente, inferiormente limitate.

TEOREMA 1'. *$I^*$ è l'insieme degli inviluppi superiori degli $L$-segmenti di $A'$.*

La dimostrazione è evidente.

Noto $I^*$, $I = I(X, w_i)$ reticolo di tutte le funzioni $w_i$-semicontinue inferiormente si costituisce con la medesima tecnica usata per costruire $C_+$ a partire da $C$.

Diciamo $t$-successione di $I$ ogni successione $(u_n)_{n \in N}$ di funzioni di $I$ tali che

I)' $\bigwedge \{u_n : n \in N\}$ esiste in $\boldsymbol{R}^X$

II)' $u_{n+1} \wedge (-n) = u_n$ per ogni $n \in N$.

**5.** I risultati trovati si riassumono nei seguenti enunciati.

*Sia $C$ una sottoalgebra con unità di $R^X$, $C^*$ la sua sottoalgebra delle* *funzioni limitate, C sia sottoreticolo di* $\boldsymbol{R}^X$. *Allora*

a) $C^*$ *è una f-sottoalgebra di funzioni limitate se e solo se contiene gli elementi separatori delle sue L-sezioni;*

b) *C è una f-sottoalgebra se e solo se* $C^*$ *è una f-sottoalgebra di funzioni limitate e C contiene l'insieme degli inviluppi superiori delle t-successioni di* $C^*$;

*Sia I un sottoreticolo di* $\boldsymbol{R}^X$ *tale che* $I+I\subseteq I$ *e* $\boldsymbol{R}_+I\subseteq I$; *I contenga le costanti. Sia* $I^*$ *il sottoreticolo delle funzioni inferiormente limitate di I. Allora*

a)′ $I^*$ *è un I-reticolo di funzioni inferiormente limitate se e solo se contiene gli inviluppi superiori dei suoi L-segmenti;*

b)′ *I è un I-reticolo se e solo se* $I^*$ *è un I reticolo di funzioni inferiormente limitate e I contiene gli inviluppi inferiori delle t-successioni di* $I^*$.

## BIBLIOGRAFIA


[1] CIAMPA, S.: *Topologie e funzioni reali semicontinue,* Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa, XXII, 1968.

[2] CIAMPA, S.: *Full Rings of continuous real functions,* Rend. Sem. Mat. Università di Padova, XL, 1968.

[3] GILLMANN, L. and JERISON, M.: *Rings of continuous functions,* Van Nostrand, 1960.


Manoscritto pervenuto in redazione il 3 luglio 1969.