RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FEDERICO MENEGAZZO

Gruppi nei quali la relazione di quasi-normalità è transitiva. II

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 42 (1969), p. 389-399

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1969__42__389_0>

GRUPPI NEI QUALI LA RELAZIONE DI QUASI-NORMALITÀ È TRANSITIVA. II.

FEDERICO MENEGAZZO *)

Il gruppo G si dice Q-gruppo se la relazione di quasi-normalità per i sottogruppi di G è transitiva, o più precisamente se da $A \subseteq_q B \subseteq_q G$ segue $A \subseteq_q G$ per ogni coppia A, B di sottogruppi di G ([8]; per la nozione di sottogruppo quasi-normale H di un gruppo G, notato $H \subseteq_q G$, e per alcune proprietà dell'insieme dei sottogruppi quasi-normali di un gruppo, vedasi [5], [1]). La presente nota contiene nei teoremi 1.3 e 2.3 una caratterizzazione dei Q-gruppi risolubili misti, nei quali cioè esistono elementi aperiodici ed elementi periodici non identici; in vista dei risultati ottenuti in [8] e [4], è dunque completata la determinazione dei gruppi risolubili aventi la proprietà in questione.

Le notazioni sono quelle usuali della teoria dei gruppi. Se G è un gruppo, G è risolubile (supersolubile) se ogni immagine omomorfa non identica di G possiede un sottogruppo normale abeliano (rispettivamente: ciclico) non identico. Il gruppo G è superiormente (inferiormente) nilpotente se la sua serie centrale ascendente (discendente) termina con G (con il sottogruppo identico). G è un T-gruppo se da $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$ segue $A \trianglelefteq G$. Se G è un gruppo misto, G è « separato » se l'insieme degli elementi periodici di G è un sottogruppo; in caso contrario G è « non separato ».

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

Indirizzo dell'Autore: Seminario Matematico, Università, Padova.

1. Il caso « separato ».

È conveniente discutere dapprima alcuni casi particolari.

LEMMA 1.1. *Siano x un elemento ed H un sottogruppo del gruppo G, tali che $G=\langle x, H\rangle$; x sia aperiodico, H un p-gruppo risolubile e normale in G. G è un Q-gruppo se e solo se H è abeliano e x induce su H una potenza $\alpha\equiv 1$ (mod. p) ($\alpha\equiv 1$ (mod. 4) se $p=2$ e $H^4\neq H^2$).*

Se G è un Q-gruppo, $H\lhd G$ è un p-gruppo con proprietà Q; inoltre $A\lhd\lhd H$ implica $A\subseteq_q G$, da cui $A=\langle y, A\rangle\cap H\lhd\langle y, A\rangle$ per ogni elemento aperiodico y di G; H è dunque un T-gruppo risolubile e i sottogruppi subnormali di H sono normali in G. Qualora sia $p\neq 2$, tanto basta per concludere che H è abeliano e che x induce su H una potenza (cioè $x^{-1}hx=h^{\alpha}$, con α intero p-adico indipendente da $h\in H$); esiste un numero naturale r tale che $\alpha^r\equiv 1$ (mod. p), e per un teorema di Iwasawa ([7], p. 19) $\langle x^r, H\rangle$ è quasi-hamiltoniano. Poichè in G la quasi-normalità è transitiva, per ogni $a\in H$ di ordine p è $\langle x^r a\rangle\subseteq_q G$; si possono quindi scegliere due numeri interi u, v tali che $x^p(x^r a)= =(x^r a)^u x^{pv}$ e cioè $x^{p+r}a=x^{ru+pv}a^{u\alpha^{pv}}$, da cui $u\equiv 1$ (mod. p), $v\equiv 1$ (mod. r), $\alpha\equiv\alpha^v\equiv\alpha^{pv}\equiv u\alpha^{pv}\equiv 1$ (mod. p) come volevasi. Sia ora $p=2$, e supponiamo che H non sia abeliano. H non può essere hamiltoniano: infatti in tal caso G sarebbe un gruppo nilpotente e quindi modulare; ma il sottogruppo di torsione dei gruppi modulari misti è abeliano ([7], p. 19). Se poi H fosse un T-gruppo non hamiltoniano [6] sarebbe $H=\langle z, C\rangle$, $C^4=C^2$ e inoltre C abeliano infinito, e $z^{-1}cz=c^{-1}$ per ogni $c\in C$. Per ogni $c\in C$ si ha $\langle x^2, c\rangle\subseteq_q\langle x^2, C\rangle\lhd G$ poichè $\langle x^2, C\rangle$ è quasi-hamiltoniano; ma allora $\langle z\rangle=\langle z, x^2c\rangle\cap H\lhd\langle z, x^2c\rangle$, e quindi $\langle z\rangle\lhd H$, il che è assurdo. Dunque H è abeliano e x induce su H una potenza $\alpha\equiv 1$ (mod. 2); se poi $H^4\neq H^2$ e $\alpha\not\equiv 1$ (mod. 4) il gruppo G/H^4 avrebbe un quoziente diedrale, e quindi non sarebbe un Q-gruppo, contro l'ipotesi, il che stabilisce la necessità della condizione.

Il viceversa è contenuto nel citato teorema di Iwasawa se $p\neq 2$ o se $p=2$, $\alpha\equiv 1$ (mod. 4); possiamo quindi senza restrizione supporre $p=2$, $H^4=H^2$, $\alpha\equiv -1$ (mod. 4). Siano A, B sottogruppi di G tali che $A\subseteq_q B\subseteq_q G$; se A è periodico risulta $A\lhd G$; supponiamo allora $A\nsubseteq H$ e distinguiamo due casi:

i) $A \not\subseteq \langle x^2, H^2 \rangle$. È allora $B = \langle z, B \cap H \rangle$ con z aperiodico e tale che, per ogni $h \in H$, $z^{-1}hz = h^\beta$ con $\beta \equiv -1 \pmod{4}$. Qualunque sia $h \in H$, da $\langle z \rangle (B \cap H) \subseteq_q \langle z, h \rangle (B \cap H)$ segue $\langle \bar{z} \rangle \subseteq_q \langle \bar{z}, \bar{h} \rangle$ dove il soprassegno indica la classe laterale modulo $\langle z, h \rangle \cap B \cap H$, e poichè $\bar{z}^{-1} \bar{h} \bar{z} \equiv \bar{h}^{-1}$ (mod. $\langle \bar{h}^4 \rangle$) risulta $\bar{h}^2 = \bar{1}$, cioè $h^2 \in B$. Lo stesso ragionamento si può fare per A, e quindi $H^2 \subseteq A$; ma G/H^2 è abeliano, da cui $A \lhd G$.

ii) $A \subseteq \langle x^2, H^2 \rangle$. Per concludere nel senso voluto, è sufficiente dimostrare che i sottogruppi ciclici di $\langle x^2, H^2 \rangle$ sono quasi-normali in G, e anzi che risulta $\langle x^{2m} a \rangle \subseteq_q \langle x, a \rangle$ per ogni potenza pari di x e per ogni $a \in H$. Inoltre, poichè $\langle x, a \rangle$ è nilpotente, non è restrittivo supporre $x^{2m} = x^{2^k}$. Il gruppo $\langle x^2, H \rangle$ è quasi-hamiltoniano, e quindi gli intervalli $[\langle x^2, a \rangle / \langle x^{2^k} a \rangle]$ e $[\langle x^2 \rangle / \langle x^{2^k} a \rangle \cap \langle x \rangle]$ sono reticolarmente isomorfi; dimostriamo che $\langle x^2, a \rangle$ è l'unico sottogruppo massimo di $\langle x, a \rangle$ contenente $\langle x^{2^k} a \rangle$. Infatti, se r è pari, $\langle x^{2^k} a, x^r a^s \rangle \subseteq \langle x^2, a \rangle$; se r è dispari, posto $\langle a^m \rangle = \langle a \rangle \cap \langle x^{2^k} a, x^r a^s \rangle$, risulta $\langle x^{2^k} a, x^r a^s \rangle = \langle x a^j, a^m \rangle$ da cui $x^{2^k} a = (x a^j)^u a^{mv} = x^u a^{j(\alpha^{u-1} + \dots + \alpha + 1) + mv}$; ma allora $u = 2^k$, $\alpha^{2^k - 1} + \dots + \alpha + 1$ è pari, $\langle a^m \rangle = \langle a \rangle$ e quindi $\langle x^{2^k} a, x^r a^s \rangle = \langle x, a \rangle$. Si può dunque affermare che gli intervalli $[\langle x, a \rangle / \langle x^{2^k} a \rangle]$ e $[\langle x \rangle / \langle x^{2^k} a \rangle \cap \langle x \rangle]$ sono isomorfi; $\langle x^{2^k} a \rangle$ è allora un elemento di Dedekind nel reticolo di $\langle x, a \rangle$ che è un gruppo nilpotente, e in definitiva $\langle x^{2^k} a \rangle \subseteq_q \langle x, a \rangle$, c.v.d.

LEMMA 1.2. *Sia G un gruppo risolubile non abeliano, misto e « separato », e il sottogruppo di torsione T di G sia prodotto diretto dei sottogruppi di Sylow T_p. G è un Q-gruppo se e solo se T e G/T sono abeliani, il rango di G/T è uno, e ogni elemento aperiodico $g \in G$ induce su ogni T_p una potenza $\alpha_p(g) \equiv 1$ (mod. p) ($\alpha_2(g) \equiv 1$ (mod. 4) se $T_2^4 \neq T_2^2$).*

Dimostriamo la necessità della condizione. G/T è un Q-gruppo risolubile aperiodico e quindi abeliano ([4], teor. B); inoltre, se $g \in G$ è un arbitrario elemento aperiodico, risulta $\langle g, T_p \rangle \cong \langle g, T \rangle / T_{p'} \unlhd G/T_{p'}$ per ogni sottogruppo di Sylow T_p di T ($T_{p'}$ indica il complemento di T_p in T). $\langle g, T_p \rangle$ è allora un Q-gruppo, e per il lemma 1.1 T_p (e quindi T) è abeliano; inoltre g induce su T_p una potenza $\alpha_p(g) \equiv 1$ (mod. p) ($\alpha_2(g) \equiv 1$ (mod. 4) se $T_2^4 \neq T_2^2$). Proviamo ora che se il rango di G/T è maggiore di uno G è abeliano. Qualunque sia $g \in G$ e aperiodico, esiste in queste ipotesi un elemento aperiodico $h \in G$ tale che $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = 1$. $\langle g^2, T \rangle$ è quasi-hamiltoniano e normale in G; segue che $\langle g^2 \rangle \subseteq_q G$ e che $\langle g^2, h \rangle$ è aperiodico e quindi abeliano. Sia ora x un arbitrario elemento aperiodico di G; se $\langle x \rangle \cap \langle g^2 \rangle = 1$ come sopra $[x, g^2] = 1$. Nel caso contrario $\langle xh \rangle \cap \langle g^2 \rangle = 1$ e ancora $[x, g^2] = 1$: infatti se $x^r \in \langle g^2 \rangle$, $(xh)^s \in \langle g^2 \rangle$ con $r, s \neq 0$, $(xh)^{rs} = x^{rs} h^{rs} t \in \langle g^2 \rangle$, per un opportuno $t \in T$, $h^{rs} t \in \langle g^2 \rangle$ ed è facile vedere che una potenza non identica di h apparterrebbe a $\langle g^2 \rangle$. Ma allora $g^2 \in Z_1(G)$ e, per l'arbitrarietà di g, $G^2 \subseteq Z_1(G)$, da cui G è nilpotente e modulare, e dunque [7] abeliano.

Viceversa, G sia un gruppo soddisfacente la condizione assegnata. Dimostriamo che ogni sottogruppo di G^2 è quasi-normale in G: infatti se $x \in G^2$ è periodico, $\langle x \rangle \lhd G$; se x è aperiodico e y è un qualunque elemento di G, $|\langle y \rangle : \langle x \rangle \cap \langle y \rangle| = 2^t m$ con m dispari; poichè G/T_2 è quasi-hamiltoniano $\langle x, T_2 \rangle \subseteq_q G$ e poichè $G/T_{2'}$ è un Q-gruppo a norma del lemma 1.1 e $xT_{2'} \in (G/T_{2'})^2$, anche $\langle x, T_{2'} \rangle \subseteq_q G$. Segue allora che $|\langle y^{2^t} \rangle : \langle y^{2^t} \rangle \cap \langle x, T_{2'} \rangle| = |\langle y^{2^t}, x, T_{2'} \rangle : \langle x, T_{2'} \rangle|$ è dispari, da cui $\langle y^{2^t}, x, T_{2'} \rangle = \langle z, T_{2'} \rangle$ risulta quasi-hamiltoniano; in particolare $\langle x \rangle \langle y^{2^t} \rangle = \langle y^{2^t} \rangle \langle x \rangle$. Analogamente $|\langle y^m \rangle : \langle y^m \rangle \cap \langle x, T_2 \rangle| = |\langle y^m, x, \mathrm{T}_2 \rangle : \langle x, T_2 \rangle|$ è una potenza di 2 e $\langle y^m, x, T_2 \rangle = \langle u, T_2 \rangle$ è un Q-gruppo; ma $x \in \langle u^2, T_2 \rangle$ e quindi $\langle x \rangle \subseteq_q \langle y^m, x, T_2 \rangle$. Risulta dunque $\langle y \rangle \langle x \rangle = \langle y^m \rangle \langle y^{2^t} \rangle \langle x \rangle = \langle y^m \rangle \langle x \rangle \langle y^{2^t} \rangle = \langle x \rangle \langle y^m \rangle \langle y^{2^t} \rangle = \langle x \rangle \langle y \rangle$, come volevasi. Siano ora A, B sottogruppi di G tali che $A \subseteq_q B \subseteq_q G$; senza introdurre restrizioni supponiamo che G non sia quasi-hamiltoniano e che $A \nsubseteq G^2$. Esiste allora $x \in G$ tale che $B \cap \langle x, T_2^2 \rangle \nsubseteq \langle x^2, T_2^2 \rangle$, mentre è $B \cap \langle x, T_2^2 \rangle \subseteq_q \subseteq_q \langle x, T_2^2 \rangle$; e il ragionamento del lemma 1.1 *i*) indica che $T_2^2 \subseteq B$. Analogamente esiste $b \in B$ tale che $A \cap \langle b, T_2^2 \rangle \nsubseteq \langle b^2, T_2^2 \rangle \subseteq B$, e ancora $T_2^2 \subseteq A$; ma G/T_2^2 è un gruppo quasi-hamiltoniano, e dunque $A \subseteq_q G$, c.v.d.

Siamo ora in grado di affrontare il problema, limitatamente ai gruppi « separati », nella sua piena generalità.

TEOREMA 1.3. *Il gruppo G è un Q-gruppo risolubile misto « separato » se e solo se G contiene un sottogruppo periodico L tale che*

a) *ogni sottogruppo di L è normale in G;*

b) *L è di Hall in G, e privo di elementi di periodo 2;*

c) G/L *è un gruppo misto, ed è abeliano, oppure gli elementi periodici di* G/L *formano un sottogruppo* T/L *abeliano tale che* G/T *è abeliano di rango* 1, *e ogni elemento di* G/L *induce su ogni sottogruppo di Sylow* $(T/L)_p$ *di* T/L *una potenza* $\alpha_p \equiv 1$ (*mod.* p) ($\alpha_2 \equiv 1$ (*mod.* 4) *se* $(T/L)_2^4 \neq (T/L)_2^2$);

d) *nessun elemento aperiodico di* G *induce una potenza congrua ad* 1 (*mod.* p) *su di un* p-*gruppo di Sylow non identico di* L.

Sia G un Q-gruppo risolubile misto « separato », con sottogruppo di torsione P. Se P è prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow $L=1$ soddisfa le condizioni richieste a norma del lemma 1.2; in caso contrario ([4], teor. D) il Q-gruppo risolubile periodico P contiene un sottogruppo N ogni cui sottogruppo è normale in P; inoltre N è di Hall in P e privo di elementi di periodo 2, e P/N è prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow. Ogni sottogruppo M di N è quasi-normale in G e, per ogni elemento aperiodico $x \in G$, $M = \langle x, M \rangle \cap P \lhd \langle x, M \rangle$, da cui $M \trianglelefteq G$. Sia allora L il sottogruppo di N riunione dei sottogruppi di Sylow di N che non sono fattori diretti di P; L soddisfa *a*) e *b*), P/L è ancora prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow, e un'applicazione del lemma 1.2 a G/L prova *c*). Supponiamo ora, in contraddizione con *d*), che esista un elemento aperiodico $g \in G$ inducente una potenza congrua ad 1 (mod. p) sul p-sottogruppo di Sylow non identico S di L. $h = g^2$ gode della stessa proprietà; poichè $hL \in (G/L)^2$ risulta $\langle h, L \rangle \subseteq_q G$ e ancora, se R è il complementare di S in L, $\langle h, S \rangle \cong \langle h, L \rangle / R$ è un gruppo quasi-hamiltoniano. Ma allora, qualunque sia $s \in S$, $\langle hs, R \rangle \subseteq_q G$ e, se $x \in P$, $\langle x, hs, R \rangle \cap P = \langle x \rangle (\langle hs, R \rangle \cap P) = \langle x, R \rangle \lhd \langle x, hs, R \rangle$, da cui $S \subseteq \mathfrak{N}_G(\langle x, R \rangle)$. Quindi se $(|x|, p) = 1$ $[x, s] \in S \cap \langle x, R \rangle = 1$ perchè $\langle x, R \rangle$ non contiene p-elementi, mentre se $|x|$ è una potenza di p la stessa conclusione si ottiene per la commutatività di S. In definitiva S è contenuto nel centro del gruppo localmente finito P, e dunque ne è un fattore diretto, contro l'ipotesi fatta su L; ed L soddisfa *d*).

Dimostriamo che la condizione è sufficiente. Per *a*) e *b*) L è abeliano, G/L è metabeliano per *c*) e quindi G è risolubile; G è misto per *c*) ed è evidentemente « separato » con sottogruppo di torsione T; inoltre T è un Q-gruppo ([4], teor. D). Siano poi A, B sottogruppi di G tali che $A \subseteq_q B \subseteq_q G$; poichè $A \cap L \lhd G$ (il che ci permette di supporre $A \not\subseteq L$) risulta $A/A \cap L \subseteq_q B/A \cap L \subseteq_q G/A \cap L$. Se $A \subseteq T$ da $A \subseteq_q B \cap T \subseteq_q T$ segue $A \subseteq_q T$, da cui $A/A \cap L \subseteq_q T/A \cap L$; in particolare $A/A \cap L$ è quasi-normale e di Hall (e quindi caratteristico) in $AL/A \cap L$ che è normale in $G/A \cap L$, e anche in questo caso $A \triangleleft G$. Non è dunque restrittivo supporre che A, e quindi B, contenga un elemento aperiodico a; dimostriamo che in queste ipotesi $L \subseteq A$. Infatti, sia S il sottogruppo di Sylow di L relativo ad un certo numero primo p, e sia $s \in S$ un elemento d'ordine p tale che $s \notin B$; $s \in \mathfrak{N}_G(B)$, quindi $[s, a] \in \langle s \rangle \cap B = 1$, e a induce su S una potenza $\alpha \equiv 1$ (mod. p) in contraddizione con d)); dunque $S \subseteq B$. Ma $A \subseteq_q B$ e per il medesimo ragionamento anche $A \supseteq S$, da cui la conclusione per l'arbitrarietà di S, e $A/L \subseteq_q B/L \subseteq_q G/L$, in vista del fatto che G/L è un Q-gruppo per il lemma 1.2, porge $A \subseteq_q G$,, c.v.d.

2. **Il caso « non separato ».**

Per la determinazione dei Q-gruppi di questo tipo sarà utile la seguente generalizzazione della proposizione 3.2 di [4].

LEMMA 2.1. *Sia G un gruppo inferiormente nilpotente. Se G è un Q-gruppo, ogni sottogruppo di G è quasi-normale in G.*

Detto Γ_α il termine α-esimo della serie centrale discendente di G, proviamo per induzione transfinita che G/Γ_α gode della proprietà enunciata. Se $\alpha = 1$ la cosa è ovvia; se poi α ammette un precedente $\alpha - 1$, tutti i sottogruppi di $G/\Gamma_{\alpha-1}$ risultano quasi-normali in $G/\Gamma_{\alpha-1}$, e per ogni $x \in G$ $\langle x, \Gamma_{\alpha-1} \rangle / \Gamma_\alpha = \langle x\Gamma_\alpha \rangle (\Gamma_{\alpha-1}/\Gamma_\alpha)$ è un gruppo abeliano in quanto il quoziente sopra il suo centro è ciclico; di qui segue $\langle x, \Gamma_\alpha \rangle \triangleleft \langle x, \Gamma_{\alpha-1} \rangle \subseteq_q G$, da cui $\langle x, \Gamma_\alpha \rangle \subseteq_q G$, come volevasi. Sia allora α un ordinale limite, e siano a, b due elementi di G tali che $a\Gamma_\alpha$ e $b\Gamma_\alpha$ risultino periodici in G/Γ_α. Per ogni $\beta \leq \alpha$ definiamo il sottogruppo $H_\beta = \langle a, \Gamma_\beta \rangle$; se $\beta < \alpha$ $H_\beta \subseteq_q G$ per l'ipotesi induttiva, e inoltre risulta $H_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} H_\beta$: infatti, se $x \in \bigcap_{\beta<\alpha} H_\beta$ e $\langle a \rangle \cap \Gamma_\alpha = \langle a^u \rangle$ con $u \geq 0$ e minimo, per ogni $\beta < \alpha$ esistono $h_\beta \in \Gamma_\beta$ e un numero intero r_β soddisfacente alla $0 \leq r_\beta < u$, tali che $x = h_\beta a^{r_\beta}$; ed inoltre esiste $\gamma < \alpha$ tale che $\gamma < \beta \leq \alpha$ implica $\langle a \rangle \cap \Gamma_\beta = \langle a \rangle \cap \Gamma_\alpha$. Ma allora se $\alpha > \beta' > \beta > \gamma$ da $x = h_\beta a^{r_\beta} = h_{\beta'} a^{r_{\beta'}}$ (con evidente significato dei simboli) segue $a^{r_{\beta'}} = a^{r_\beta}$, $h_{\beta'} = h_\beta$

e in definitiva $h_\beta \in \bigcap_{\beta'<\alpha} \Gamma_{\beta'} = \Gamma_\alpha$, e cioè $x \in \langle a, \Gamma_\alpha \rangle = H_\alpha$. Per [4], prop. 3.1 si ha quindi $H_\alpha \subseteq_q \langle b, H_\alpha \rangle$, da cui $\langle a\Gamma_\alpha \rangle \subseteq_q \langle a\Gamma_\alpha, b\Gamma_\alpha \rangle$; quest'ultimo gruppo è pertanto periodico e dunque, attesa l'arbitrarietà di $a\Gamma_\alpha$ e $b\Gamma_\alpha$, gli elementi periodici di G/Γ_α costituiscono un sottogruppo; ricordando la proposizione 3.2 di [4] si ottiene la conclusione desiderata.

Il risultato che segue modifica, adattandolo ad una situazione particolare, un noto teorema di Černikov ([3], II, p. 234).

LEMMA 2.2. *Sia G un gruppo superiormente nilpotente, e sia T il sottogruppo degli elementi periodici di G. Se il sottogruppo di Sylow S di G relativo al numero primo p è abeliano e $(G/T)^p = G/T$, allora S è nel centro di G.*

Sia a un arbitrario elemento di S, e sia α il minimo ordinale tale che $a \in Z_\alpha(G)$ dove $Z_\alpha(G)$ è il termine α-esimo della serie centrale ascendente di G; la dimostrazione è per induzione su α. Se $\alpha = 1$ $a \in Z_1(G)$ e non c'è niente da dimostrare; supponiamo che α ammetta un precedente $\alpha - 1$; per ogni $x \in G$ $[x, a] \in S \cap Z_{\alpha-1}(G)$ e per l'ipotesi induttiva $[x, a] \in Z_1(G)$; ne consegue che $a \in Z_2(G)$ e $\langle x, a \rangle$ è nilpotente di classe al più 2, da cui $[x^{p^n}, a] = [x, a^{p^n}] = 1$ se $p^n = |a|$. Ma ogni elemento $g \in G$ si può rappresentare come prodotto $g = x_1^{p^n} \dots x_r^{p^n} t$ con $t \in T$, e poichè $S \subseteq Z_1(T)$ risulta $[g, a] = 1$, come volevasi. Se poi α non ha precedente ma $Z_\alpha(G) = \bigcup_{\beta<\alpha} Z_\beta(G)$ risulta $a \in Z_\beta(G)$ per un certo $\beta < \alpha$ e ancora $a \in Z_1(G)$ per l'ipotesi induttiva.

Dimostriamo ora il teorema centrale di questa sezione, contenente una caratterizzazione dei Q-gruppi risolubili « non separati ».

TEOREMA 2.3 *Il gruppo G è un Q-gruppo risolubile misto « non separato » se e solo se G contiene un sottogruppo abeliano C di indice 2 in G tale che $G = \langle z, C \rangle$, $C = A \times B$ con A gruppo abeliano misto 2-divisibile, B 2-gruppo limitato, z 2-elemento, $z^{-1}az = a^{-1}$ per ogni $a \in A$ e inoltre*

1) *$z^2 = 1$, B elementare, $z^{-1}bz = b$ $\forall b \in B$; oppure*

2) *$z^2 \neq 1$, $\langle z \rangle \cap A = 1$, $B = B_1 \times B_2 \times B_3$, $B_1 = \langle z^2 \rangle$, B_2 elementare, $B_3 = \langle b_3 \rangle$ ciclico di ordine 2, $z^{-1}bz = b$ $\forall b \in B_1 \times B_2$, $z^{-1}b_3z \equiv b_3$ (mod. $\langle z^4 \rangle$); oppure*

3) $z^2 \neq 1$, $B = B_1 \times B_2$, B_1 *elementare*, $B_2 = \langle b_2 \rangle$ *ciclico di ordine* 4, $z^2 = b_2^2$, $z^{-1}bz = b$ $\forall b \in B_1$, $z^{-1}b_2z = b_2^{-1}$; *o infine*

4) $z^2 \neq 1$, $B = B_1 \times B_2$, B_1 *elementare*, $B_2 = \langle b_2 \rangle$ *ciclico di ordine* 2, $z^2 = ab_2$ $(a \in A)$, $z^4 = a^2$, $z^8 = 1$, $z^{-1}bz = b$ $\forall b \in B_1$, $z^{-1}b_2z = z^4b_2$.

Iniziamo dimostrando che la condizione è necessaria. Consideriamo il sottogruppo K del Q-gruppo G intersezione di tutti i termini della serie centrale discendente di G: $K = \bigcap_{\alpha} \Gamma_\alpha(G)$. Ogni sottogruppo di G/K è quasi-normale in G/K (lemma 2.1); in particolare gli elementi periodici di G/K sono un sottogruppo, e se K fosse periodico G sarebbe « separato » contro l'ipotesi. Quindi K contiene degli elementi aperiodici; inoltre $K^2 = K$: infatti se $a \in K$, $a \notin K^2$, poichè K/K^2 è abeliano, risulterebbe $\langle aK^2 \rangle \subseteq_q G/K^2$ e quindi ([4], prop. 1.1.) $aK \in Z_2(G/K^2)$ e G/K^2 sarebbe inferiormente nilpotente, da cui $K^2 = K$. Poichè G è supersolubile ([4], teor. A) K è un Q-gruppo superiormente nilpotente e per il lemma 1.2, tenendo conto del fatto che $K^2 = K$, ogni sottogruppo di K è quasi-normale (in K e quindi) in G; indicato con P il sottogruppo degli elementi periodici di K, poniamo $C/P = \mathfrak{C}_{G/P}(K/P)$. K/P è un sottogruppo normale aperiodico, e quindi abeliano, di G/P; ne consegue ([4], prop. 1.2) che $|G : C| \leq 2$ e ogni elemento di G/P induce su K/P l'identità o l'inversione. C è « separato »: infatti, qualunque sia l'elemento periodico $a \in C$, e per un arbitrario elemento aperiodico $k \in K$, $\langle k \rangle \subseteq_q G$ implica $a^{-1}ka = k^r a^s = kb$ con $b \in P$, r, s numeri interi opportuni; ma $\langle b \rangle \subseteq_q G$, da cui $\langle a, b \rangle$ è un sottogruppo periodico; e quindi $k^{r-1} = 1$, $k \in \mathfrak{N}_G(\langle a \rangle)$. Per l'arbitrarietà di k, e poichè K è generato dai suoi elementi aperiodici, risulta $\langle a \rangle \triangleleft \langle a, K \rangle \subseteq_q G$, $\langle a \rangle \subseteq_q G$: tutti i sottogruppi periodici di C sono quasi-normali in G, da cui in particolare si conclude che gli elementi periodici di C sono un sottogruppo T che è il prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow. Quindi $G \neq C$, $|G : C| = 2$, $G = \langle z, C \rangle$ dove z è un opportuno 2-elemento, $z^{-1}cz \equiv c^{-1}$ (mod. T) per ogni $c \in C$, e inoltre $(C/T)^2 = C/T$ perchè in caso contrario G avrebbe un quoziente diedrale. C è un Q-gruppo e per il lemma 1.2 C è abeliano oppure il rango di G/T è 1 e T è abeliano; inoltre il lemma 2.2 assicura che il 2-Sylow-gruppo di T è contenuto nel centro di C: ma allora ogni sottogruppo di C è quasi-normale in C, e anzi in G (lemma 1.2 e [7], p. 21); in particolare $\langle z^2 \rangle \subseteq Z_1(G)$. Dimostriamo ora che C è abeliano, supponendo dapprima $z^2 = 1$. In questo caso, sia x

un qualunque elemento aperiodico di C: da $\langle x\rangle \lhd \langle z, x\rangle$ e $z^{-1}xz=x^{-1}t$ per un opportuno $t\in T$ risulta $z^{-1}xz=x^{-1}$, e questo per ogni tale $x\in C$. Pertanto, comunque si scelgano $a\in T$, $b\in C$, $b\notin T$, si ha $z^{-1}bz=b^{-1}$, $z^{-1}baz=b^{-1}z^{-1}az=a^{-1}b^{-1}$ e cioè $bab^{-1}=z^{-1}a^{-1}z$, e anzi $b^2ab^{-2}=$ $=z^{-2}az^2=a$; e poichè ogni elemento aperiodico $c\in C$ si può scrivere nella forma $c=b^2t$ con $t\in T$, ne segue per l'abelianità di T $c^{-1}yc=y$ per ogni $y\in T$ e quindi $T\subseteq Z_1(C)$: C è dunque un gruppo localmente ciclico sopra il suo centro, e quindi abeliano. In generale allora $C/\langle z^2\rangle$ è abeliano, il 2-gruppo di Sylow di T è contenuto nel centro di C, e per ogni p-Sylow-gruppo S di T con $p\neq 2$ risulta $[c, S]\subseteq S\cap\langle z^2\rangle=1$ qualunque sia $c\in C$, e ancora $T\subseteq Z_1(C)$ e C è abeliano. Nelle considerazioni precedenti è implicito che z induce su $C/\langle z^2\rangle$ l'inversione, e quindi $(C/\langle z^2\rangle)^4=(C/\langle z^2\rangle)^2$, da cui $C/\langle z^2\rangle=\bar{A}\times\bar{B}$ con $\bar{A}^2=\bar{A}$, $\bar{B}^2=\bar{1}$, altrimenti G avrebbe un quoziente diedrale. La parte ridotta B del 2-sottogruppo di Sylow di C è limitata, in quanto $\langle B, z^2\rangle/\langle z^2\rangle$ è isomorfo ad un sottogruppo di $\bar{B}$; B è allora un fattore diretto di C ([2], teor. 50.3), e il suo complementare A è un gruppo 2-divisibile. Se $z^2=1$ non c'è più niente da dimostrare; supponiamo $z^2\neq 1$ e distinguiamo due casi:

i) $\langle z\rangle\cap A\neq 1$. Ovviamente $B\cap\langle z^2\rangle=1$, da cui $B\cong\bar{B}$ è elementare; se $z^4=1$ si ha $z^{-1}bz=b$ per ogni $b\in B$ (in caso contrario $\langle b\rangle$ non sarebbe quasi-normale in $\langle b, z\rangle$), mentre se $z^4\neq 1$ risulta $B=B_1\times B_2$, $z^{-1}bz=b$ per ogni $b\in B_1$, $B_2=\langle b_2\rangle$, $z^2=ab_2$ con $a\in A$, $z^{-1}b_2z=b_2z^4$ e $z^8=1$.

ii) $\langle z\rangle\cap A=1$. Scegliendo B in maniera opportuna si può supporre $z^2\in B$; poichè B è limitato risulta $B=H\times K$, con $H^2=1$ e K prodotto diretto di gruppi ciclici di ordine ≥ 4. Se $K=1$ $z^4=1$ e come sopra $z^{-1}bz=b$ per ogni $b\in B$; se $K\neq 1$ sia $k\in K$ un elemento d'ordine 2: per un conveniente $l\in K$ è $k=l^2$, e da $B^2\subseteq\langle z^2\rangle$ segue che k è l'unico elemento di $\langle z^2\rangle$ che abbia ordine 2, e quindi K è ciclico e normale in G. Consideriamo ora il gruppo $\langle z, K\rangle$: se esso possiede un elemento u di periodo 2 non contenuto in K, è $G=\langle u, C\rangle$ e siamo ricondotti ad un caso studiato in precedenza; anzi, per quanto visto sopra, sarebbe $B^2=1$ in contraddizione con $K\neq 1$. Quindi $\langle z, K\rangle$ ha un solo elemento di periodo 2, ed è ciclico, nel qual caso $H=B_1\times B_2$, $z^{-1}bz=b$ per ogni $b\in B_1$, $B_2=\langle b_2\rangle$, $z^{-1}b_2z=b_2z^{2^{n-1}}$ se $2^n=|z|$, oppure $\langle z, K\rangle$ è isomorfo al gruppo dei quaternioni, $z^4=1$ e $z^{-1}bz=b$ per ogni $b\in H$, il che conclude la dimostrazione che la condizione assegnata è necessaria.

Per quanto riguarda la sufficienza, osserviamo dapprima che i sottogruppi di C sono quasi-normali in G: infatti se $c\in A$, $\langle c\rangle \lhd G$; se $\langle c\rangle \cap A=1$ non è restrittivo supporre $c\in B$, e se $x\in C$ $xc=cx$ mentre se $x\notin C$ risulta $\langle x, B\rangle \cong G/A$ che è un 2-gruppo modulare, e ancora $\langle x\rangle\langle c\rangle=\langle c\rangle\langle x\rangle$; se $c\notin A$ ma $\langle c\rangle \cap A\neq 1$ $\langle c\rangle\cap A\lhd G$, e la conclusione si ottiene ripetendo il ragionamento precedente in $G/A\cap\langle c\rangle$. Siano ora H, K sottogruppi di G tali che $H\subseteq_q K\subseteq_q G$: dimostriamo che $H\subseteq_q G$. Se $H\subseteq C$ l'affermazione è già stata provata; se $H\not\subseteq C$ si può senz'altro supporre $z\in H$. Ma in questo caso per ogni $c\in A$ risulta $z(zc)=(zc)^r k$ con r numero intero e $k\in K$ convenienti, e cioè $z^2c=z^{2s}k$, da cui $c\in K$, se $r=2s$ è pari, e $z^2c=z^{2s+1}ck$, da cui $cz^2=c^{-1}z^{2s+1}k$ e $c^2\in K$, se $r=2s+1$ è dispari; e in ogni caso $A^2=A\subseteq K$. Con la stessa tecnica si dimostra che $A\subseteq H$ e in definitiva $H\subseteq_q G$ per la modularità di G/A.

3. Osservazioni finali.

È noto [8] che per un gruppo finito G sono equivalenti le due condizioni

M l'insieme $s(G)$ dei sottogruppi subnormali di G coincide con l'insieme $q(G)$ dei sottogruppi quasi-normali;

Q la relazione di quasi-normalità per i sottogruppi di G è transitiva.

Tale equivalenza è ancora vera se G è un gruppo risolubile periodico: infatti nel corso della dimostrazione del teorema D in [4] si è implicitamente provato che Q implica M, mentre l'implicazione inversa si dimostra osservando che tutti i teoremi di [4] rimangono validi qualora negli enunciati (e nelle dimostrazioni) alla locuzione « Q-gruppo » si sostituisca « gruppo verificante M », ad eccezione della proposizione 3.2 nella quale occorre aggiungere l'ipotesi che G sia periodico. Così pure avviene se G è un gruppo risolubile aperiodico, per motivi analoghi. Per i gruppi risolubili misti, invece, Q non implica, in generale, M, come dimostra l'esempio seguente: sia H un p-gruppo abeliano divisibile ($p\neq 2$), $G=\langle x, H\rangle$ con $xhx^{-1}=h^\alpha$ per ogni $h\in H$, α intero p-adico non identico, $\alpha\equiv 1$ (mod. p). G è un Q-gruppo, anzi un gruppo quasi-