RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MAURIZIO CHICCO

Un teorema sulle correnti intere a supporto non compatto

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 42 (1969), p. 299-303

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1969__42__299_0>

UN TEOREMA SULLE CORRENTI INTERE A SUPPORTO NON COMPATTO

di MAURIZIO CHICCO *)

È noto il seguente:

TEOREMA 1. « *Dato un insieme* $E \subset R^n$ *di perimetro finito e un insieme di Borel* L, *nella famiglia degli insiemi* B *che verificano la condizione*

$$B - L = E - L$$

ne esiste uno di perimetro minimo, cioè esiste un insieme $\tilde{B}$ *tale che*

$$\tilde{B} - L = E - L, \qquad P(\tilde{B}) = \inf \{ P(B) : B - L = E - L \} \text{ »}$$

(Vedi [1] e [2]).

Interpretando un insieme di misura e perimetro finiti come una corrente intera n-dimensionale, si pone il problema di estendere il precedente risultato alle correnti intere k-dimensionali. Ciò è fatto nel teorema 4 del presente lavoro.

La terminologia usata è quella di [3] e [4]. Seguendo H. Federer ([4] pag. 62), diremo $D^k(R^n)$ lo spazio delle forme differenziali k-dimensionali a coefficienti infinitamente differenziabili e a supporto compatto in R^n. Gli elementi dello spazio $D_k(R^n)$, duale di $D^k(R^n)$, sono correnti k-dimensionali il cui supporto non è necessariamente limitato. Ovviamente è $E_k(R^n) \subset D_k(R^n)$.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Via L. Battista Alberti 4, 16100 Genova.

DEFINIZIONE. « *Una corrente* $T \in D_k(R^n)$ *si dice localmente rettificabile se, per ogni aperto limitato* $A \subset R^n$, *la corrente* $T \cap A \in E_k(R^n)$ *è rettificabile. Una corrente* $T \in D_k(R^n)$ *si dice localmente intera se* T *e* ∂T *sono localmente rettificabili* ».

Indichiamo con $I'_k(R^n)$ il sottospazio delle correnti localmente intere di $D_k(R^n)$.

LEMMA. « *Sia* $T \in I'_k(R^n)$, $f(x)$ *una funzione lipschitziana tale che, posto*

$$A_s = \{x : x \in R^n,\ f(x) > s\},$$

A_s *sia limitato per ogni s. Allora* $T \cap A_s \in I_k(R^n)$ *per quasi tutti gli s* ».

Segue subito dai teoremi 3.10 e 8.14 di [3].

TEOREMA 2. « *Siano* α, β *due funzioni definite sulla famiglia degli insiemi aperti limitati di* R^n *ed a valori reali positivi.*

Allora l'insieme:

$$Z = I'_k(R^n) \cap \{T : M(T \cap A) \leq \alpha(A),\ M[(\partial T) \cap A] \leq \beta(A)\}$$

è debolmente compatto ».

Basta dimostrare che una qualunque successione $\{T_i\}$ di correnti di Z contiene una sottosuccessione convergente ad una corrente di Z. Sia d un numero compreso tra 0 e 1. Posto

$$S_t = \{x : x \in R^n,\ |x| < t\}$$

dal teorema 3.10 di [3] segue:

$$\frac{1}{d} \int_j^{j+d} M[\partial(T_i \cap S_t)]\,dt \leq \beta(S_{j+d}) + \frac{1}{d}\,\alpha(S_{j+d}) = c(j,\ d).$$

Per il lemma di Fatou si ha:

$$\frac{1}{d} \int_j^{j+d} \liminf_{i \to \infty} M[\partial(T_i \cap S_t)]\,dt \leq \liminf_{i \to \infty} \frac{1}{d} \int_j^{j+d} M[\partial(T_i \cap S_t)]\,dt \leq c(j,\ d)$$

per $j = 1, 2, 3, \ldots$

Ne segue l'esistenza di un numero η e di una sottosuccessione $\{T_{i'}\}$ di $\{T_i\}$ tali che:

$$j \leq \eta \leq j+d,$$

$$\liminf_{i \to \infty} M[\partial(T_i \cap S_\eta)] \leq c(j, d),$$

$$M[\partial(T_{i'} \cap S_\eta)] \leq c(j, d).$$

Le correnti $T_{i'} \cap S_\eta$ stanno nell'insieme

$$I_k(\bar{S}_\eta) \cap \{T : M(T) \leq \alpha(S_\eta), \quad M(\partial T) \leq c(j, d)\}$$

che è compatto per il teorema 8.13 di [3]. Esiste quindi una sottosuccessione $\{T_{i''}\}$ di $\{T_{i'}\}$ tale che $\{T_{i''} \cap S_\eta\}$ sia convergente.

Ponendo ora $j=1$ si trova, col ragionamento precedente, una sottosuccessione $\{T_{i,1}\}$di $\{T_i\}$ che converge in S_1; per $j=2$ si può estrarre da $\{T_{i,1}\}$ una sottosuccessione convergente in S_2; e così via. La successione $\{T_{j,j}\}$ è (debolmente) convergente in tutto R^n; si verifica subito che la corrente limite sta in Z. c.v.d.

TEOREMA 3. « *Sia* $X \in I'_k(R^n)$, $k<n$, $\partial X=0$, $M(X)<+\infty$. *Allora esiste una corrente* $Y \in I'_{k+1}(R^n)$ *tale che* $\partial Y = X$ *e* $M(Y) \leq cM(X)^{(k+1)/k}$, *ove c è una costante che dipende solo da k e da n* ».

Dal teorema 3.10 di [3] segue:

$$\int_0^{+\infty} M[\partial(X \cap S_t)]dt = M(X)$$

pertanto esiste una successione di numeri reali $\{t_m\}$ tale che

$$\lim_{m \to \infty} t_m = +\infty, \qquad \lim_{m \to \infty} M[\partial(X \cap S_{t_m})] = 0.$$

Si ha:

$$\lim_{m \to \infty} X \cap S_{t_m} = X, \qquad \lim_{m \to \infty} M(X \cap S_{t_m}) = M(X),$$

$$\partial(X \cap S_{t_m}) \in I_{k-1}(R^n), \qquad \partial[\partial(X \cap S_{t_m})] = 0.$$

Dal teorema 6.2 di [3] segue l'esistenza di correnti Q_m tali che:

$$Q_m \in I_k(R^n), \qquad \partial Q_m = \partial(X \cap S_{t_m}),$$
$$M(Q_m) \leq c \cdot M[\partial(X \cap S_{t_m})]^{k/(k-1)}$$

e quindi $\lim_{m \to \infty} M(Q_m) = 0$. Analogamente si trova:

$$X \cap S_{t_m} - Q_m \in I_k(R^n), \qquad \partial(X \cap S_{t_m} - Q_m) = 0$$

ed esistono pertanto correnti $Y_m \in I_{k+1}(R^n)$ tali che:

$$\partial Y_m = X \cap S_{t_m} - Q_m ,$$
$$M(Y_m) \leq c \cdot M(X \cap S_{t_m} - Q_m)^{(k+1)/k} \leq c \cdot \{M(X \cap S_{t_m})^{(k+1)/k} + M(Q_m)^{(k+1)/k}\}.$$

Si verifica subito che la successione $\{Y_m\}$ sta in un insieme del tipo

$$I'_{k+1}(R^n) \cap \{T : M(T) \leq a, \qquad M(\partial T) \leq b\}$$

che è compatto per il teorema precedente; esiste quindi una sottosuccessione $\{Y_{m'}\}$ di $\{Y_m\}$ convergente ad una corrente $Y \in I'_{k+1}(R^n)$. Risulta:

$$M(Y) \leq \liminf_{m \to \infty} M(Y_m) \leq$$
$$\leq \liminf_{m \to \infty} c \cdot \{M(X \cap S_{t_m})^{(k+1)/k} + M(Q_m)^{(k+1)/k}\} \leq c \cdot M(X)^{(k+1)/k},$$
$$\partial Y = \lim_{m' \to \infty} \partial Y_{m'} = \lim_{m \to \infty} (X \cap S_{t_m} - Q_m) = X.$$

c.v.d.

TEOREMA 4. « *Sia* $T_0 \in I'_k(R^n)$, $M(\partial T_0) < +\infty$, L *un insieme chiuso di* R^n. *Posto*

$$W = I'_k(R^n) \cap \{T : spt\partial(T - T_0) \subset L\}$$

esiste una corrente $\tilde{T} \in W$ *tale che*

$$M(\partial \tilde{T}) \leq M(\partial T) \qquad \textit{per ogni} \qquad T \in W \text{ ».}$$

Posto $\xi = \inf\{M(\partial T) : T \in W\}$, sia $\{T_i\}$ una successione di correnti di W tale che:

$$\lim_{i\to\infty} M(\partial T_i)=\xi, \qquad M(\partial T_i)\leq c<+\infty.$$

Allora le correnti $\{\partial T_i\}$ stanno nell'insieme

$$I'_{k-1}(R^n)\cap\{T : M(T)\leq c, \qquad \partial T=0\}$$

che è compatto per il teorema 2. Esiste quindi una corrente X limite di una sottosuccessione di $\{\partial T_i\}$.

Si ha:

$$M(X)\leq \liminf_{m\to\infty} M(\partial T_i)=\xi, \qquad \partial X=0, \qquad spt(\partial T_0-X)\subset L.$$

Per il teorema 3 esiste una corrente $\tilde{T}\in I'_k(R^n)$ tale che $\partial\tilde{T}=X$; risulta $\tilde{T}\in W$ e $M(\partial T)=\xi$.

c.v.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] De Giorgi E.: *Frontiere orientate di misura minima*, Editrice tecnico-scientifica, Pisa, 1961.

[2] Musmeci R.: *Estensione di un teorema sull'esistenza di un insieme di perimetro minimo*, Lincei, Rend. sc. fis. mat. nat. vol. *32* (1962), pag. 852-856.

[3] Federer H., Fleming W.: *Normal and integral currents*, Annals of math. (2), vol. *72* (1960), pag. 458-560.

[4] Federer H.: *Some theorems on integral currents*, Trans. Am. Math. Soc. vol. *117* (1965), pag. 43-67.

Manoscritto pervenuto in redazione il 18 gennaio 1969.