

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO AMBROSETTI

**Proprietà spettrali di certi operatori
lineari non compatti**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 42 (1969), p. 189-200

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1969__42__189_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

PROPRIETÀ SPETTRALI DI CERTI OPERATORI LINEARI NON COMPATTI

ANTONIO AMBROSETTI *)

Scopo principale di questo lavoro è di studiare le proprietà spettrali delle α -contrazioni lineari.

Le α -contrazioni, introdotte da G. Darbo¹⁾, sono trasformazioni continue di uno spazio di Banach in sè, che generalizzano sia gli operatori completamente continui (compatti) sia le contrazioni ordinarie. In particolare ad ogni α -contrazione T si può associare un numero h_T , detto *modulo di T* , il quale è zero se e solo se T è completamente continuo.

Ora, nel caso lineare, è noto che un'applicazione compatta ha lo spettro formato da punti il cui unico (eventuale) punto di accumulazione è lo zero.

Generalizzando tale risultato, sarà dimostrato in questo lavoro, che lo spettro di una α -contrazione lineare T non ha punti di accumulazione nell'insieme $\{\zeta : \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| > h_T\}$. Inoltre i punti dello spettro che sono in tale insieme sono tutti autovalori di « tipo finito ». Come conseguenza verrà poi dimostrato che T si può esprimere come $T=U+V$, dove U è di dimensione finita e V è tale che una sua opportuna potenza è una contrazione (anzi, la norma dello spazio di Banach può essere sostituita con una equivalente, in modo che, rispetto a quest'ultima, V

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.
Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, via Marzolo, 9, 35100 - Padova.

¹⁾ Cfr. G. Darbo, *Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, (1955), XXIV.

stessa sia una contrazione). Si farà inoltre vedere che il carattere α -contrattivo di un operatore in uno spazio di Banach dipende dalla norma e non solo dalla topologia dello spazio.

Usando questi risultati, si trovano infine alcune proprietà dello spettro di un generico operatore lineare e continuo.

Desidero ringraziare Giovanni Prodi per gli utili colloqui con lui avuti sull'argomento.

1. Sia B uno spazio di Banach; con $\mathcal{L}(B)$ indicheremo lo spazio di Banach delle applicazioni lineari e continue di B in sè, con la norma usuale.

Se $T \in \mathcal{L}(B)$ indicheremo con $\sigma(T)$ lo spettro di T e con $\rho(T)$ l'insieme risolvente; con r_T indicheremo il raggio spettrale di T , cioè $r_T = \sup \{ |\zeta| : \zeta \in \sigma(T) \}$; con $R(\lambda; T)$ indicheremo la funzione risolvente (definita in $\rho(T)$), cioè $R(\lambda; T) = (\lambda I - T)^{-1}$.

Per comodità del lettore e per rendere il più autosufficiente possibile questo lavoro, daremo ora alcune definizioni ed enunceremo alcune proposizioni che saranno usate nel seguito: tra di esse certe sono di facile dimostrazione, mentre per le altre si rimanda a ¹⁾ e alla relativa bibliografia.

1. DEFINIZIONE. *Sia X un insieme limitato contenuto in B ; indicheremo con $\alpha(X)$, l'estremo inferiore dei numeri positivi ε per i quali è possibile decomporre l'insieme X nell'unione di un numero finito di parti di diametro inferiore ad ε .*

2. PROPOSIZIONE. *Sono vere le seguenti proprietà:*

a) *se X ed Y sono insiemi limitati di B ed è $X \subseteq Y$, allora $\alpha(X) \leq \alpha(Y)$;*

b) *X è relativamente compatto se e solo se $\alpha(X) = 0$;*

c) *se X ed Y sono insiemi limitati di B , indicato con $X+Y$ l'insieme $\{x+y : x \in X, y \in Y\}$, allora $\alpha(X+Y) \leq \alpha(X) + \alpha(Y)$.*

3. DEFINIZIONE. *Chiameremo α -contrazione una trasformazione continua T di B in sè, tale che:*

a) *ogni insieme limitato di B è trasformato dalla T in un insieme limitato;*

b) esiste un numero non negativo h , minore di 1, tale che per ogni insieme limitato $X \subset B$ si abbia:

$$(1) \quad \alpha(T(X)) \leq h\alpha(X).$$

L'estremo inferiore degli h per cui sussiste la (1) qualunque sia l'insieme limitato X , sarà detto *modulo dell' α -contrazione* T , e sarà indicato con h_T .

Osserviamo esplicitamente che: *un operatore T è completamente continuo se e solo se è una α -contrazione con $h_T=0$.*

4. PROPOSIZIONE. *Sono vere le seguenti proprietà:*

a) *se U e V sono due α -contrazioni in uno spazio di Banach B , allora anche $T=U \circ V$ è tale e $h_T \leq h_U \cdot h_V$;*

b) *se T è una α -contrazione in B di modulo h_T e λ è un numero complesso tale che $|\lambda| < h_T^{-1}$, allora λT è una α -contrazione;*

c) *se U è una α -contrazione lineare in B e V è una trasformazione lineare e continua (sempre in B) con $\|V\| \leq 1$, allora $U \circ V$ è una α -contrazione e $h_{U \circ V} \leq h_U$;*

d) *se U è un'applicazione completamente continua e V è una α -contrazione (ambedue sullo spazio B), allora $U+V$ è una α -contrazione.*

2. Vogliamo dimostrare che lo spettro di una α -contrazione lineare T ha fuori del cerchio $\{\zeta : \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| \geq h_T + \varepsilon\}$ (con ε arbitrario) solo un numero finito di punti. Questo risultato sarà raggiunto in più tappe, attraverso la dimostrazione di alcuni Lemmi.

5. LEMMA. *Sia T una α -contrazione lineare in B in sè; nell'insieme $\{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \geq 1\}$ gli autovalori di T sono al più in numero finito.*

DIMOSTRAZIONE. Se per assurdo ciò non fosse vero, poichè gli autovalori sono contenuti nello spettro di $\sigma(T)$ che è compatto, ci sarebbe una successione $\{\lambda_n\}$ di autovalori di T tutti distinti, e con: $|\lambda_n| \geq 1$. Sia x_n una autosoluzione associata a λ_n . Indichiamo con A_n lo spazio generato da x_1, \dots, x_n , cioè $A_n = \text{sp}\{x_1, \dots, x_n\}$. A_n è un sottospazio chiuso di B ; inoltre, poichè gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono tutti distinti,

A_n è propriamente contenuto in A_{n+1} . Allora per un noto Teorema²⁾, è possibile trovare una successione $\{y_n\}$ che gode delle seguenti proprietà:

- (i) $y_n \in A_n, \|y_n\| = 1$;
 (ii) $\|y_n - x\| \geq \frac{1}{2}, \forall x \in \overline{A_{n-1}}$.

Dunque il vettore y_n è della forma $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$, cosicchè, per ogni intero $\nu \geq 1$, si ha che: $T^\nu(y_n) - \lambda_n^\nu y_n \in A_{n-1}$. Inoltre, se $n > m$ risulta:

$$z_{n,m} = y_n - \lambda_n^{-\nu} T^\nu(y_n) + \lambda_m^{-\nu} T^\nu(y_m) \in A_{n-1},$$

e quindi:

$$(2) \quad \left\| T^\nu \left(\frac{y_n}{\lambda_n^\nu} \right) - T^\nu \left(\frac{y_m}{\lambda_m^\nu} \right) \right\| = \|y_n - z_{n,m}\| > \frac{1}{2}.$$

Ora, fissato $\delta < \frac{1}{2}$, sia ν un vero numero tale che $h_\gamma^\nu \alpha(S) < \delta$, ove si è indicata con S la sfera unitaria dello spazio di Banach B . Detta Y la successione $\{\lambda_n^{-\nu} y_n\}$ si ha che $Y \subseteq S$ e quindi che $\alpha(Y) \leq \alpha(S)$. D'altra parte, poichè T è una α -contrazione, risulta:

$$\alpha(T^\nu(Y)) \leq h_\gamma^\nu \alpha(Y) \leq h_\gamma^\nu \alpha(S) < \delta.$$

Da ciò segue l'assurdo, perchè, per la (2), deve essere $\alpha(T^\nu(Y)) \geq \frac{1}{2}$;

Q.E.D.

6. LEMMA. Sia T una α -contrazione lineare di B in sè e λ un numero complesso tale che $|\lambda| \geq 1$. Sia $\{y_n\}$ una successione appartenente a $\text{Im}(\lambda I - T)$ e convergente ad y . Per ogni indice n indichiamo con x_n un qualunque elemento di B soddisfacente a $\lambda x_n - T(x_n) = y_n$, e supponiamo che la successione $\{x_n\}$ sia limitata. Allora da essa è possibile estrarre una sottosuccessione convergente. Detto, pertanto, x il limite di questa, si avrà: $\lambda x - T(x) = y$.

²⁾ Cfr., ad esempio, Dunford-Schwartz, *Linear Operators*, pag. 578.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con X la successione $\{x_n\}$ e con Y la successione $\{y_n\}$. Per ipotesi si ha: $\lambda x_n = T(x_n) + y_n$, qualunque sia l'elemento $x_n \in X$. Quindi si può scrivere:

$$(3) \quad X \subseteq \frac{1}{\lambda} T(X) + \frac{1}{\lambda} Y.$$

Ora, poichè $Y = \{y_n\}$ è una successione convergente, si ha che $\alpha(Y) = 0$;

Quindi, per le Proposizioni 2-b e 2-c e per la (3) si ha:

$$\alpha(X) \leq \frac{1}{|\lambda|} \alpha(T(X)).$$

Infine, dato che T è una α -contrazione e ricordato che $|\lambda| \geq 1$, risulta:

$$\alpha(X) \leq h_T \alpha(X),$$

da cui $\alpha(X) = 0$, perchè h_T è minore di uno. Sarà perciò possibile estrarre da $X = \{x_n\}$ una sottosuccessione convergente: $x_n \rightarrow x$. Poichè inoltre T è continua, si ha: $(\lambda I - T)x = y$; Q.E.D.

È opportuno a questo punto notare esplicitamente alcune conseguenze del precedente Lemma.

7. COROLLARIO. *Sia T una α -contrazione lineare di B in sè. Se λ non è un autovalore di T , con $|\lambda| \geq 1$, allora $Im(\lambda I - T)$ è chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{y_n\}$ una successione di $Im(\lambda I - T)$, con $y_n \rightarrow y$. Indichiamo ancora con x_n un elemento di B tale che $\lambda x_n - T(x_n) = y_n$. Se $\{x_n\}$ è illimitata, si consideri $z_n = \|x_n\|^{-1} x_n$; per ogni indice n si ha che $\|z_n\| = 1$, oltre a $(\lambda I - T)z_n = \|x_n\|^{-1} y_n$. Si ha che $\|x_n\|^{-1} y_n$ tende a zero; allora, per il Lemma 6 esiste uno $z \in B$, tale che $z_n \rightarrow z$, e $(\lambda I - T)z = 0$. Ma $\|z\| = 1$, e quindi λ è un autovalore per T ; e questo è assurdo. Dunque $\{x_n\}$ è limitata, e la conclusione segue dal Lemma 6; Q.E.D.

8. COROLLARIO. *Se T è una α -contrazione lineare di B in sè e λ non è un autovalore di T , con $|\lambda| \geq 1$, allora $(\lambda I - T)^{-1}$ (definito su $Im(\lambda I - T)$) è un'applicazione lineare e continua*

9. LEMMA. Se $\lambda_n \in \rho(T)$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$ e λ non è un autovalore della α -contrazione $T \in \mathcal{L}(B)$, con $|\lambda| \geq 1$, allora la successione $a_n = \|(\lambda_n I - T)^{-1}\|$ è limitata.

DIMOSTRAZIONE. Per la definizione di norma di un operatore, si ha che, fissato $\delta > 0$, per ogni n , esiste un y_n , con $\|y_n\| = 1$, tale che, posto $x_n = R(\lambda_n; T)y_n$, si ha:

$$\|x_n\| \geq a_n - \delta.$$

Se, per assurdo, $\{a_n\}$ non fosse limitata, si potrebbe estrarre dalla $\{x_n\}$ una sottosuccessione, tale che $\|x_n\| \rightarrow \infty$.

Poniamo $v_n = \|x_n\|^{-1}x_n$ e $w_n = \|x_n\|^{-1}y_n$. Risulta:

$$\lambda_n v_n - T(v_n) = w_n, \quad \|v_n\| = 1, \quad w_n \rightarrow 0.$$

Si ha inoltre $v_n = \lambda^{-1}T(v_n) + (\lambda_n^{-1} - \lambda^{-1})T(v_n) + \lambda_n^{-1}w_n$. Poniamo $z_n = [(\lambda_n^{-1} - \lambda^{-1})T(v_n) + \lambda_n^{-1}w_n]\lambda^{-1}$; risulta: $z_n \rightarrow 0$ e $\lambda v_n - T(v_n) = z_n$. Per il Lemma 6 è allora possibile trovare in B un elemento v tale che $v_n \rightarrow v$, e che $\lambda v - T(v) = 0$. Ma $\|v\| = 1$; da ciò segue l'assurdo, perchè per ipotesi λ non è un autovalore di T ; Q.E.D.

10. LEMMA. Sia T una α -contrazione lineare di B in sè. Nel dominio $\{\zeta : \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| \geq 1\}$ l'insieme degli autovalori coincide con lo spettro di T .

DIMOSTRAZIONE³⁾. Nel dominio $\{\zeta : \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| \geq 1\}$ indichiamo con Σ l'insieme complementare degli autovalori; poniamo $\Sigma' = \Sigma \cap \rho(T)$ e Σ'' la parte restante. Si ha: $\Sigma = \Sigma' \cup \Sigma''$. Il Lemma sarà dimostrato non appena si farà vedere che $\Sigma'' = \emptyset$. Allo scopo cominciamo coll'osservare che Σ è un insieme aperto (nella topologia relativa) e connesso, perchè gli autovalori sono, nel dominio considerato, in numero finito (Lemma 5). Allora anche Σ' è aperto. Ne segue che, se Σ'' fosse non vuoto, esisterebbe almeno un punto $\lambda \in \Sigma''$ che sarebbe punto di accumulazione di punti di Σ' . Sia $\{\lambda_n\}$ la successione tale che $\lambda_n \rightarrow \lambda$, con

³⁾ Questo Lemma, oltre al Teorema 12, era contenuto nella tesi di Laurea di E. Pillinini - Univ. di Trieste, 1963.

$\lambda_n \in \Sigma'$. Per il Lemma 9, la successione $\|(\lambda_n I - T)^{-1}\|$ è limitata:

$$\|(\lambda_n I - T)^{-1}\| \leq M, \quad \forall n.$$

Allora, fissato $\delta = M^{-1}$, nell'intorno di centro λ e raggio δ cade almeno un λ_n , con $\lambda_n \in \rho(T)$, e si ha:

$$|\lambda - \lambda_n| < \delta = M^{-1} \leq \|R(\lambda_n; T)\|^{-1}.$$

Ciò implica, com'è noto, che λ è un punto regolare, e questo è assurdo; Q.E.D.

Siamo ora in grado di dimostrare il Teorema voluto.

11. **TEOREMA.** *Sia T una α -contrazione lineare di B in sè. Allora $\sigma(T) \cap \{\zeta : \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| \geq 1\}$ è un insieme finito.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione discende dal Lemma 5 e dal Lemma 10; Q.E.D.

Il Teorema 11 può essere migliorato:

12. **TEOREMA.** *Sia T una α -contrazione lineare di B in sè. Se ε è un numero arbitrario positivo, allora $\sigma(T) \cap \{\zeta : \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| \geq h_T + \varepsilon\}$ è un insieme finito.*

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che, qualunque sia $\varepsilon > 0$, la trasformazione $(h_T + \varepsilon)^{-1}T$ è ancora una α -contrazione lineare (vedi Proposizione 4-b); Q.E.D.

Val la pena di osservare che se T è un operatore compatto, si ha $h_T = 0$, e quindi che il Teorema 12 comprende come caso particolare i noti risultati sullo spettro di un operatore compatto.

Infine, poichè risulta $\sigma(T^n) = (\sigma(T))^n$, per ogni intero positivo n , si può ulteriormente generalizzare il Teorema 12 con il seguente:

13. **TEOREMA.** *Tutte le conclusioni del Teorema 12 sono ancora valide non appena si ha che T^n è una α -contrazione lineare per qualche intero n positivo.*

Diamo ora un Teorema che, oltre ad esprimere una proprietà delle α -contrazioni lineari, ci indica che i punti di $\sigma(T)$ che sono esterni al

cerchio $\{\zeta : \zeta \in \mathbb{C}; |\zeta| < 1\}$ sono di « tipo finito »: la questione sarà analizzata nei dettagli nel paragrafo seguente.

14. TEOREMA. *Sia T una α -contrazione lineare di B in sè. Detto M il nucleo dell'applicazione $I - T : M = \text{Ker}(I - T)$, si ha che M è di dimensione finita.*

DIMOSTRAZIONE. Sia X un insieme limitato di M . Si ha che $X = T(X)$. Poichè T è una α -contrazione, risulta:

$$\alpha(X) \leq h_T \alpha(X),$$

con h_T minore di uno. Quindi $\alpha(X) = 0$; da ciò segue la conclusione, perchè X è arbitrario; Q.E.D.

3. Nel paragrafo precedente abbiamo dimostrato che i punti λ di $\sigma(T)$ soddisfacenti a $|\lambda| \geq 1$ sono al più in numero finito, nell'ipotesi che T sia una α -contrazione lineare. Siano essi in numero di n e indichiamoli con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Con γ_k indichiamo una circonferenza di centro λ_k e raggio tale da non contenere nel suo interno altri punti di $\sigma(T)$; indichiamo infine con $P_k = P(\lambda_k)$ la proiezione $(-2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_k} R(\zeta; T) d\zeta$. Vogliamo ora analizzare quali conseguenze hanno sulla T le proprietà spettrali viste in precedenza. Cominceremo col dimostrare un Lemma:

15. LEMMA. *Per ogni indice k ($1 \leq k \leq n$) la proiezione P_k è una α -contrazione lineare.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo dapprima che $|\lambda_k| > 1$. L'operatore P_k con opportune trasformazioni ⁴⁾ si può scrivere nel seguente modo:

$$P(\lambda_k) = T \left\{ (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_k} \frac{R(\zeta; T)}{\zeta} d\zeta \right\}.$$

Indichiamo con E_k l'operatore $(-2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_k} \frac{R(\zeta; T)}{\zeta} d\zeta$; si ha dun-

⁴⁾ Cfr., ad esempio, Riesz-Nagy, *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, pag. 409.

que: $P_k = T \circ E_k$. T ed E_k commutano e quindi, per ogni intero m positivo, si ha: $P_k = P_k^m = T^m \circ E_k^m$. Una verifica materiale porge che $E_k^m = (-2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_k} \frac{R(\zeta; T)}{\zeta^m} d\zeta$. Si ha allora: $\|E_k^m\| \leq s_k (|\lambda_k| - s_k)^{-m}$ $\max \|R(\zeta; T)\|$ ove si è indicato con s_k il raggio di γ_k . Da ciò si deduce che esiste un \bar{m} tale che $\|E_k^{\bar{m}}\| \leq 1$.

Ricordando le proposizioni 4-a e 4-c si può allora concludere che P_k è una α -contrazione lineare.

Passiamo ora a considerare il caso in cui $|\lambda_k| = 1$. Sia ξ un numero complesso soddisfacente a: $1 < \xi < h_T^{-1}$. Per la Proposizione 4-b, ξT è ancora una α -contrazione lineare; inoltre si ha:

$$P_k = \xi T \left\{ \frac{-1}{2\pi i \xi} \int_{\gamma_k} \frac{R(\zeta; T)}{\zeta} d\zeta \right\}$$

ove il raggio s_k di γ_k è stato preso minore di $1 - |\xi|^{-1}$. Ripetendo ora i ragionamenti fatti nel caso precedente, si ha che, indicata con E_k la trasformazione $(-2\pi i \xi)^{-1} \int_{\gamma_k} \frac{R(\zeta; T)}{\zeta} d\zeta$, risulta:

$$\|E_k^m\| \leq \frac{s_k}{(|\xi| (1 - s_k))^m} \max \|R(\zeta; T)\| \quad (\forall m \text{ positivo})$$

È perciò possibile trovare un \bar{m} tale che risulti $\|E_k^{\bar{m}}\| \leq 1$; poichè (vedi Proposizione 4-a) $\{\xi T\}^{\bar{m}}$ è una α -contrazione, si può anche in questo caso concludere nel modo voluto; Q.E.D.

Ferme restando tutte le altre notazioni, sia σ' la parte di $\sigma(T)$ formata dai punti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e σ'' la parte restante. Indichiamo con Γ una circonferenza del piano complesso di centro l'origine e raggio minore di uno e tale da contenere nel suo interno σ'' . Indichiamo con Q la proiezione $(-2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} R(\zeta; T) d\zeta$, e con P la proiezione $P_1 + P_2 + \dots + P_n$. Risulta, com'è noto, che $P + Q = I$ (identità di $\mathcal{L}(B)$); quindi T si può

esprimere come $U+V$, ove $U=T \circ P$ e $V=T \circ Q$; inoltre si vede facilmente che: $\sigma(U)=\sigma'$ e $\sigma(V)=\sigma''$. Ora, per il Lemma 15, ogni P_i ($i=1, 2, \dots, n$) è una α -contrazione e quindi, per il Teorema 14, M_i (la varietà invariante per P_i) è di dimensione finita. Detta M la varietà invariante per P , una verifica materiale porge che $M=M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$; perciò anche M è di dimensione finita. Se infine indichiamo con N la varietà invariante per Q , si ha che $B=M \oplus N$, e $U(B)=U(M)=T(M)$. Si può dunque concludere con il seguente

16. TEOREMA. *Se T è una α -contrazione lineare di B in sè, si ha che $T=U+V$, con U avente rango di dimensione finita e V con lo spettro contenuto all'interno del cerchio unitario.*

OSSERVAZIONE. Se r_V è il raggio spettrale di V , si ha che $\lim \|V^n\|^{1/n}=r_V < 1$; da questo segue subito che esiste un \bar{n} , tale che $\|V^{\bar{n}}\| < 1$; cioè V è tale che una sua opportuna potenza è una contrazione ordinaria.

Il Teorema 16 e l'osservazione precedente ci permettono di avere altre informazioni sull'operatore V . Sussiste infatti la seguente proposizione:

17. PROPOSIZIONE. *Sia V un operatore lineare e continuo di B in sè, avente lo spettro interno al cerchio $\{\zeta: \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| < 1\}$. Allora B può essere dotato di una norma equivalente alla norma originaria, tale che, rispetto ad essa, V sia una contrazione.*

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi, esiste un \bar{n} tale che $\|V^{\bar{n}}\| = \theta < 1$. Poniamo, per ogni $x \in B$:

$$(4) \quad |||x||| = \|x\| + \|V(x)\| + \dots + \|V^{\bar{n}-1}(x)\|.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} |||V(x)||| &= \|V(x)\| + \|V^2(x)\| + \dots + \|V^{\bar{n}}(x)\| = \\ &= |||x||| - \|x\| + \|V^{\bar{n}}(x)\| \leq |||x||| - (1-\theta)\|x\|. \end{aligned}$$

Ma, poichè le due norme sono equivalenti (facile verifica), si ha anche che esiste una costante $\beta > 0$, tale che $\|x\| \geq \beta |||x|||$, per ogni $x \in B$.

In definitiva risulta:

$$\| \| V(x) \| \| \leq \| \| x \| \| - (1 - \theta)\beta \| \| x \| \| = (1 - (1 - \theta)\beta) \| \| x \| \|,$$

e questo ci dice che V , rispetto alla $\| \cdot \|$, è una contrazione; Q.E.D.

Torniamo ora alla α -contrazione $T = U + V$; indicato con \bar{B} lo spazio B munito della norma data dalla (4), si ha che \bar{B} è uno spazio di Banach; consideriamo T come appartenente a $\mathcal{L}(B)$: T è ancora una α -contrazione, in quanto somma di una contrazione ordinaria e di un operatore di rango finito (Proposizione 4-d). Consideriamo ora l'aggiunta di T , $T^* \in \mathcal{L}(B^*)$. Si ha che $T^* = U^* + V^*$, e quindi anche $T^* \in \mathcal{L}(\bar{B}^*)$ è una α -contrazione. Si può dunque enunciare la seguente proposizione:

18. PROPOSIZIONE. *Se T è una α -contrazione lineare di B in \bar{B} , allora si può trovare in B una norma equivalente alla data, tale che l'aggiunto di T , T^* , considerato come appartenente a $\mathcal{L}(B^*)$, è anch'esso una α -contrazione.*

OSSERVAZIONE. La Proposizione 18 generalizza, in un certo senso, il fatto noto che l'aggiunto di un operatore completamente continuo è completamente continuo, come anche che l'aggiunto di una contrazione è una contrazione.

Sarà opportuno osservare esplicitamente che non è detto che un'applicazione il cui spettro sia contenuto nel cerchio $\{\zeta : \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| < 1\}$ sia necessariamente una α -contrazione. Ad esempio, se prendiamo $B = l_2 \oplus l_2$ con la norma

$$\| [x, y] \| = \| x \|_{l_2} + \| y \|_{l_2}$$

allora l'applicazione T definita ponendo:

$$T([x, y]) = \left[2y, \frac{1}{4}x \right]$$

non è una α -contrazione, mentre $\sigma(T)$ è contenuto in $\{\zeta : \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| < 1\}$.

Si noti che il precedente è anche un esempio di operatore che non è una α -contrazione, ma tale che una sua potenza è una α -contrazione.

Inoltre, con lievi modifiche, esso può essere adattato per mostrare che una α -contrazione di uno spazio di Banach B in sè, può non essere più tale se in B si pone un'altra norma equivalente alla data. Infatti in $B=l_2 \oplus l_2$ l'applicazione $\varepsilon T : [x, y] \rightarrow \left[4\varepsilon y, \frac{1}{4} \varepsilon x \right]$ non è una α -contrazione se $\varepsilon \geq \frac{1}{4}$; ma se in B si pone la norma (equivalente alla data): $\| [x, y] \| = \frac{1}{4} \| x \|_{l_2} + \| y \|_{l_2}$, rispetto ad essa εT (per ogni $\varepsilon < 1$) è una α -contrazione (anzi è una contrazione).

4. La nozione di α -contrazione può essere estesa in modo abbastanza naturale, considerando le applicazioni T continue che godono delle proprietà a) e b) della Definizione 3, senza però richiedere che h_T sia minore di uno. Queste applicazioni saranno dette *applicazioni α -lipschitziane*. Nel caso lineare, è ovvio che ogni applicazione continua è α -lipschitziana e che risulta: $h_T \leq \| T \|$.

Per ogni applicazione lineare e continua T di B in sè, consideriamo la trasformazione $kT = T'$ con $k < h_T^{-1}$; T' è una α -contrazione, e quindi ad essa possono essere applicati i ragionamenti fatti nei paragrafi precedenti. In particolare, ad esempio, dal Teorema 12 si ha che:

19. PROPOSIZIONE. *Se T è una applicazione lineare e continua di B in sè lo spettro di T non ha punti di accumulazione fuori del cerchio $\{\zeta : \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| \leq h_T\}$.*

Un analogo del Teorema 16 può essere anche ottenuto:

20. PROPOSIZIONE. *Se T è un'applicazione lineare e continua di B in sè, per ogni $h > h_T$, T può essere decomposto in $U + V$, con U avente il rango di dimensione finita e V con lo spettro contenuto all'interno del cerchio del piano complesso di centro l'origine e raggio h .*