JAURES P. CECCONI

Sulla teoria del prolungamento degli integrali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 42 (1969), p. 167-188

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1969__42__167_0>

SULLA TEORIA DEL PROLUNGAMENTO DEGLI INTEGRALI

JAURES P. CECCONI *)

1. Questa nota è dedicata al prolungamento degli integrali.

Il dato iniziale è una coppia (ε, μ) costituita da una famiglia ε di funzioni reali su di un insieme X e da un funzionale μ su ε; la famiglia ε non essendo necessariamente uno spazio vettoriale reticolato. A partire da (ε, μ) viene costruito un integrale esterno e da questo, nello stesso ordine di idee della teoria delle misure esterne secondo C. Caratheodory viene dedotta una classe di funzioni misurabili ed un integrale.

Vengono quindi date alcune condizioni che sono necessarie e sufficienti, o anche soltanto sufficienti ad assicurare che l'integrale così ottenuto sia il prolungamento del dato « integrale (ε, μ) ».

2. Sia X un insieme, sia $R^* \equiv R \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ il campo ampliato dei numeri reali con le abituali convenzioni rispetto all'ordine ed alle operazioni razionali, sia R^+ la parte di R costituita dai numeri reali positivi e da $+\infty$.

Sia $\mathfrak{F}$ la totalità delle funzioni $f : X \to R^*$, sia $\mathfrak{F}^+$ la totalità delle funzioni $f : X \to R^+$.

Sia ε una parte di $\mathfrak{F}$, costituita da funzioni *reali* su X tale che:

1) la funzione nulla su X, che indichiamo con 0, appartiene a ε,

2) $f \in \varepsilon \Rightarrow f^* \equiv f \vee 0 \in \varepsilon$, $f \;\; = (-f) \vee 0 \in \varepsilon$,

e sia $\varepsilon^+ = \{f : f \in \varepsilon, f \geq 0\}$.

---

*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università di Genova.

Supponiamo sia data un'applicazione

$$\mu : \varepsilon \to R$$

tale che

1) $\mu(0)=0$

2) $f\in\varepsilon^+ \Rightarrow \mu(f)\geq 0$

3) $f\in\varepsilon \Rightarrow \mu(f)=\mu(f^*)-\mu(f_*)$.

Diciamo classe ereditaria di ε la classe $\mathcal{H}^+=\mathcal{H}^+(\varepsilon)$ costituita da tutte le funzioni $\varphi\in\mathfrak{F}^+$ per le quali esistono una successione $\{g_n\}$ di funzioni di ε^+ ed una successione $\{a_n\}$ di numeri reali positivi tali che

$$\varphi\leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\cdot g_n;\ \text{per ogni } x\in X,$$

e per ogni $\varphi\in\mathcal{H}^+$ poniamo

$$\mu^*(\varphi)= \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\cdot\mu(g_n) : g_n\in\varepsilon^+,\ \alpha_n\in R^+,\ \varphi\leq \sum_{1}^{\infty} \alpha_n g_n\}.$$

La coppia $(\mathcal{H}^+, \mu^*)$ sarà detta integrale esterno generato da (ε, μ). Sussistono le seguenti proposizioni

Teorema 1. Se (ε, μ) e $(\mathcal{H}^+, \mu^*)$ sono definiti come sopra allora si ha:

1) $\mu^*(0)=0$

2) $f\in\mathcal{H}^+,\ \alpha\geq 0 \Rightarrow \alpha f\in\mathcal{H}^+,\ \mu^*(\alpha f)=\alpha\mu^*(f)$

3) $f_0\in\mathcal{H}^+,\ f_n\in\mathcal{H}^+,\ \alpha_n\geq 0$; per ogni n; $f_0\leq \sum_{1}^{\infty} \alpha_n\cdot f_n \Rightarrow \mu^*(f_0)\leq$ $\leq \sum_{1}^{\infty} \alpha_n\mu^*(f_n)$

4) $f,\ g\in\mathcal{H}^+,\ f\leq g \Rightarrow \mu^*(f)\leq\mu^*(g)$.

5) per ogni $f\in\varepsilon^+$ si ha $\mu^*(f)\leq\mu(f)$.

3. Consideriamo la classe $\mathfrak{M}^+\subset\mathcal{H}^+$ costituita dalle funzioni $f\in\mathcal{H}^+$ per le quali, qualunque sia $\varphi\in\mathcal{H}^+$, si ha

$$\mu^*(\varphi)=\mu^*(\varphi\wedge f)+\mu^*(\varphi-\varphi\wedge f),$$

per ogni $f \in \mathfrak{M}^+$ consideriamo il valore $\mu^*(f)$. La coppia $(\mathfrak{M}^+, \mu^*)$ sarà detta *integrale assoluto* generato dalla coppia (ε, μ).

Se poniamo infine

$$\mathfrak{M}_0^+ = \{ f : f \in \mathfrak{M}^+, \ \mu^*(f) < {}^+\infty \}$$

$$\mathfrak{M} = \{ f : f \in \mathfrak{F}, \ f^*, \ f \ \ \in \mathfrak{M}^+ \}$$

$$\mathfrak{L} = \{ f : f \in \mathfrak{M}, \text{ uno almeno fra } \mu^*(f^*) \text{ e } \mu^*(f \ \ ) \text{ è finito} \}$$

e se per ogni $f \in \mathfrak{L}$ poniamo

$$\mu^*(f) = \mu^*(f^*) - \mu^*(f \ \ )$$

perveniamo alla coppia $(\mathfrak{L}, \mu)$ che sarà detta *integrale generato da* (ε, μ).

A giustificazione delle definizioni ora introdotte proviamo che:

TEOREMA 2. Con le definizioni adottate e le ipotesi finora ammesse si ha che:

1) $\mathfrak{M}^+$ è una classe inferiormente reticolata; cioè $f, g \in \mathfrak{M}^+ \Rightarrow$ $\Rightarrow f \wedge g \in \mathfrak{M}^+$; $\mathfrak{M}_0^+$ è una classe reticolata; cioè $f, g \in \mathfrak{M}_0^+ \Rightarrow f \wedge g$, $f \wedge \ \in \mathfrak{M}_0^+$.

2) $\mathfrak{M}_0^+$ è una classe additiva; cioè $f, g \in \mathfrak{M}_0^+ \Rightarrow f + g \in \mathfrak{M}_0^+$,

3) $\mathfrak{M}^+$ è una classe monotona; cioè $f_n \in \mathfrak{M}^+$, $f_n \nearrow f_0 \Rightarrow f_0 \in \mathfrak{M}^+$,

4) $\mathfrak{M}_0^+$ è una classe σ-additiva nel seguente senso: $f_n \in \mathfrak{M}_0^+ \Rightarrow$ $\Rightarrow \sum_{n-1}^{\infty} f_n \in \mathfrak{M}^+$,

5) μ^* è additiva in $\mathfrak{M}^+$ nel senso che: $f, g \in \mathfrak{M}^+ \Rightarrow \mu^*(f+g) =$ $= \mu^*(f) + \mu^*(g)$,

6) μ^* è continua (dal di sotto) in $\mathfrak{M}^+$; cioè $f_n \in \mathfrak{M}^+$; $f_n \nearrow f_0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \mu^*(f_n) \nearrow \mu^*(f_0)$,

7) μ^* è σ-additiva in $\mathfrak{M}^+$ nel senso che: $f_n \in \mathfrak{M}^+ \Rightarrow \mu^*(\sum_1^{\infty} f_n) =$ $= \sum_1^{\infty} \mu^*(f_n)$,

8) $f, \ g \in \mathfrak{M}^+, \ f \geq g, \ \mu^*(g) < +\infty \Rightarrow f - g \in \mathfrak{M}^+, \ \mu^*(f-g) =$ $= \mu^*(f) - \mu^*(g)$,

9) $f \in \mathfrak{M}^+$, $\alpha \in R^+ \Rightarrow \alpha f \in \mathfrak{M}^+$,

10) se $\epsilon^+ \subset \mathfrak{M}^+$ allora nelle proposizioni 1), 2), 4) può porsi $\mathfrak{M}^+$ al posto di $\mathfrak{M}_0^+$.

4. Supponiamo che la coppia (ε, μ) verifichi, oltre alle ipotesi ivi fatte, anche la seguente:

4) f_0, $f_n \in \varepsilon^+$, $\alpha_n \in R^+$, $f_0 \leq \sum_1^\infty \alpha_n f_n \Rightarrow \mu(f_0) \leq \sum_1^\infty \alpha_n \cdot \mu(f_n)$.

Si ha allora che:

TEOREMA 3. In queste ipotesi e con lo stesso significato per $(\mathfrak{M}^+, \mu^*)$, risulta $\mu^*(f) = \mu(f)$ per ogni $f \in \varepsilon^+$.

5. Se supponiamo che (ε, μ), oltre alle ipotesi 1-4 finora indicate verifichi le seguenti:

5) ε^+ è reticolata; cioè $f, g \in \varepsilon^+ \Rightarrow f \wedge g$, $f \vee g \in \epsilon^+$,

6) ε^+ è additiva; cioè $f, g \in \varepsilon^+ \Rightarrow f + g \in \epsilon^+$,

7) ε^+ è positivamente omogenea; cioè $f \in \varepsilon^+$, $\alpha \in R^+ \Rightarrow \alpha f \in \varepsilon^+$,

dimostreremo che:

TEOREMA 4.

$$\varepsilon^+ \subset \mathfrak{M}^+ \Leftrightarrow f, \ \varphi \in \varepsilon^+, \ \mu(\varphi) = \mu(f \wedge \varphi) + \mu^*(\varphi - f \wedge \varphi).$$

TEOREMA 5.

$$\varepsilon^+ \subset \mathfrak{M}^+ \Leftrightarrow f, \ \varphi \in \varepsilon^+, \ \varphi \geq f, \ \mu(\varphi) = \mu(f) + \mu^*(\varphi - f).$$

6. Proveremo inoltre i seguenti teoremi

TEOREMA 6. Se (ε, μ) verifica, oltre alle ipotesi del n. 2, le ipotesi 5, 7 del n. 5 e le ipotesi

4'$_1$) f, $g \in \epsilon^+$, $f \leq g \Rightarrow \mu(f) \leq \mu(g)$,

$4'_2)$ f_0, $f_n \in \varepsilon^+$, $f_n \nearrow f_0 \Rightarrow \mu(f_n) \nearrow \mu(f_0)$

$6')$ f, $g \in \varepsilon^+ \Rightarrow f+g \in \varepsilon^+$, $\mu(f+g) \leq \mu(f)+\mu(g)$,

allora si ha

$$\varepsilon^+ \subset \mathfrak{M}^+ \Leftrightarrow f,\ \varphi \in \varepsilon^+,\ \varphi \geq f,\ \mu(\varphi)=\mu(f)+\mu^*(\varphi-f).$$

TEOREMA 7. Se (ε, μ) verifica le ipotesi del n. 2, le ipotesi $4'_{1,2})$ sopra indicate, le ipotesi 5), 7) del n. 4 e le ipotesi

$6'')$ f, $g \in \varepsilon^+ \Rightarrow f+g \in \varepsilon^+$, $\mu(f+g)=\mu(f)+\mu(g)$,

8) f, $g \in \varepsilon^+$, $f \geq g \Rightarrow \exists\{g_n \in \varepsilon^+\}$, $\{h_n \in \varepsilon^+\}$, $g_n \nearrow g$, $g_n \leq f-h_n \leq g$,

allora si ha

$$\varepsilon^+ \subset \mathfrak{M}^+,\ \mu^*(f)=\mu(f) \text{ per ogni } f \in \varepsilon^+.$$

TEOREMA 8. Se (ε, μ) verifica tutte le ipotesi del teorema precedente salvo la 8) e verifica l'ipotesi

$8')$ f, $g \in \varepsilon^+$, $f \geq g \Rightarrow f-g \in \varepsilon^+$,

allora si ha

$$\varepsilon^+ \subset \mathfrak{M}^+,\ \mu^*(f)=\mu(f) \text{ per ogni } f \in \varepsilon^+.$$

Ciascuno dei teoremi finora enunciati nel n. 5 fornisce condizioni necessarie o necessarie e sufficienti affinché $(\mathfrak{L}, \mu^*)$ sia un prolungamento di (ε, μ). Dal teorema 8 di deduce per esempio ovviamente, il

TEOREMA 9. Nelle ipotesi del teorema $(\mathfrak{L}, \mu^*)$ è un prolungamento di (ε, μ).

Tale prolungamento, in forza del teorema 2, verifica poi le condizioni

1) $f \in \mathfrak{L} \Leftrightarrow f \in \mathfrak{M}$, $\mu^*(|f|) < +\infty$,

2) f, $g \in \mathfrak{L}$, uno almeno degli integrali $\mu^*(f)$, $\mu^*(g)$ è finito $\Rightarrow$ $\Rightarrow f+g \in \mathfrak{L}$, $\mu^*(f+g)=\mu^*(f)+\mu^*(g)$,

3) $f_n \in \mathfrak{L}$, $\mu^*(f_1) \neq -\infty$, $f_n \nearrow f \Rightarrow \mu^*(f_n) \nearrow \mu^*(f)$,

4) f, $g \in \mathfrak{L} \Rightarrow f \wedge g$, $f \vee g \in \mathfrak{L}$.

Il teorema 9 viene così ad includere il noto teorema di prolungamento di Daniell (ved. ad es. [1], [2]).

7. Dimostrazione del teorema 1.

Le condizioni 1), 2), 4) del teorema 1 sono ovvie. Basterà pertanto dimostrare la condizione 3) e soltanto nel caso in cui sia $0 \neq \alpha_n \cdot \mu^*(f_n) < + + \infty$ per ogni n.

Siano, per ogni n e per ogni $\varepsilon > 0$, $\{g_{nk}\}$, $\{\beta_{nk}\}$ due successioni di elementi di ε^+ e di R^+ rispettivamente per le quali risulti,

$$f_n \leq \sum_k \beta_{nk} g_{nk}\,, \quad \sum_k \beta_{nk} \cdot \mu(g_{nk}) \leq \mu^*(f_n) + \frac{\varepsilon}{2^n \alpha_n}.$$

Ne segue che

$$\alpha_n \cdot \sum_k \beta_{nk} \mu(g_{nk}) \leq \alpha_n \cdot \mu^*(f_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\,,$$

$$\sum_n \alpha_n \sum_k \beta_{nk} g_{nk} \geq \sum_n \alpha_n f_n \geq f_0\,,$$

e pertanto che

$$\mu^*(f_0) \leq \sum_n \alpha_n \sum_k \beta_{nk} \mu(g_{nk}) \leq \sum_n \alpha_n \mu^*(f_n) + 2\varepsilon,$$

da cui per l'arbitrarietà di ε segue l'asserto.

Per la dimostrazione della condizione 5) osserviamo che $f \leq \sum_{1=n}^{\infty} \alpha_n f_n$ con $f_n = f$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_n = 0$ *se* $n > 1$. Ne viene che $\mu^*(f) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \mu(f_n) = \mu(f)$.

8. Veniamo ora alla dimostrazione del teorema 2.

a) Cominciamo ad introdurre la nozione di insieme (ε, μ)— trascurabile nel modo seguente.

Diremo che $A \subset X$ è (ε, μ)— trascurabile se detta $\varkappa_A(x) = \varkappa_A$ la funzione caratteristica di A si ha che $\varkappa_A \in \mathcal{H}^+$ e $\mu^*(\varkappa_A) = 0$.

Ciò posto dimostriamo i seguenti Lemmi.

Lemma 1. Se $\varphi \in \mathcal{H}^+$ è tale che $\mu^*(\varphi) < + \infty$ allora l'insieme $A = \{x : x \in X,\ \varphi(x) = + \infty\}$ è (ε, μ)— trascurabile.

LEMMA 2.[1]) Se $\varphi \in \mathcal{H}^+$ è tale che $B = \{x : x \in X,\ \varphi(x) \neq 0\}$ è (ε, μ) — trascurabile allora si ha $\mu^*(\varphi) = 0$.

Per la dimostrazione del Lemma 1 osserviamo per ogni $x \in X$ e per ogni intero positivo n si ha

$$n \cdot \chi_A \leq \varphi,$$

quindi per le 2) e 4) del teorema 1

$$n \cdot \mu^*(\chi_A) = \mu^*(n \cdot \chi_A) \leq \mu(\varphi)$$

e quindi anche

$$\mu^*(\chi_A) \leq \frac{1}{n}\, \mu(\varphi)$$

da cui segue l'asserto.

Per la dimostrazione del Lemma 2 osserviamo che per ogni $x \in X$ si ha

$$\varphi \leq \lim_{n \to \infty} n \cdot \chi_B = \sum_1^\infty \chi_B$$

Da questa, per la 3) del teorema 1, si deduce

$$\mu^*(\varphi) \leq \sum_1^\infty \mu^*(\chi_B) = 0$$

come volevamo dimostrare.

b) Deduciamo da a) che

LEMMA 3. Se $f \in \mathfrak{M}^+$, $\varphi \in \mathcal{H}^+ \Rightarrow \mu^*(\varphi + f) = \mu^*(f) + \mu^*(\varphi)$.

Per la dimostrazione osserviamo che per la 4) del teorema 1 basta soltanto limitarsi a considerare il caso in cui $\mu^*(\varphi)$, $\mu^*(f) < +\infty$.

Ciò posto, per l'ipotesi $f \in \mathfrak{M}^+$ si ha

$$(*) \qquad \mu^*(\varphi + f) = \mu^*(f) + \mu^*((\varphi + f) - f)$$

ed anche

$$\varphi^0 = (\varphi + f) - f = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad f = +\infty \\ \varphi & \text{se} \quad f < +\infty \end{cases}$$

[1]) Si riconosce facilmente che il Lemma 2 è invertibile.

In tal modo si ha $\varphi^0 \leq \varphi$ e posto $G=\{x : x \in X, d=\varphi-\varphi^0 \neq 0\}$ risulta, dall'ipotesi $\mu^*(f)<+\infty$ e dal Lemma 1, che G è (ε, μ)— trascurabile.

Dal teorema 1 e dal Lemma 2 segue allora

$$\mu^*(\varphi^0) \leq \mu^*(\varphi) \leq \mu^*(\varphi^0)+\mu^*(d)=\mu^*(\varphi^0)$$

e ciò, mediante la (*) prova il Lemma e l'item 5) dedl teorema 2.

c) Proviamo che se $f,\ g \in \mathfrak{M}^+ \Rightarrow f \wedge g \in \mathfrak{M}^+$.

Sia $\varphi \in \mathfrak{M}^+$, poiché per la 3) del teorema 1 si ha

$$\mu^*(\varphi) \leq \mu^*(\varphi \wedge f \wedge g)+\mu^*(\varphi-\varphi \wedge f \wedge g)$$

basterà soltanto dimostrare che

$$\mu^*(\varphi) \geq \mu^*(\varphi \wedge f \wedge g)+\mu^*(\varphi-\varphi \wedge f \wedge g)$$

e quindi limitarsi a considerare soltanto il caso in cui $\mu^*(\varphi)<+\infty$.

Ora poiché $g \in \mathfrak{M}^+$ si ha

$$\mu^*(\varphi \wedge f)=\mu^*(\varphi \wedge f \wedge g)+\mu^*(\varphi \wedge f-\varphi \wedge f \wedge g)$$

e poiché $f \in \mathfrak{M}^+$

$$\mu^*(\varphi)=\mu^*(\varphi \wedge f)+\mu^*(\varphi-\varphi \wedge f)$$

in modo che

$$\mu^*(\varphi)=\mu^*(\varphi \wedge f \wedge g)+\mu^*(\varphi-\varphi \wedge f)+\mu^*(\varphi \wedge f-\varphi \wedge f \wedge g).$$

Per la 3) del teorema 1 risulta dunque

$$\mu^*(\varphi) \geq \mu^*(\varphi \wedge f \wedge g)+\mu^*(\varphi-\varphi \wedge f \wedge g)$$

e ciò prova che $f \wedge g \in \mathfrak{M}^+$.

d) Dimostriamo che se: $f,\ g \in \mathfrak{M}_0^+$, $\varphi \in \mathcal{H}^+$, $\mu^*(\varphi)<+\infty \Rightarrow$ $\Rightarrow \mu^*(\varphi)+\mu^*(f \vee g)=\mu^*(\varphi \wedge (f \vee g))+\mu^*(\varphi \vee (f \vee g))$.

Poiché $f \in \mathfrak{M}_0^+$ si ha

$$\begin{aligned}\mu^*(\varphi \vee f) &= \mu^*((\varphi \vee f) \wedge f) + \mu^*(\varphi \vee f - (\varphi \vee f) \wedge f)\\ &= \mu^*(f) + \mu^*(\varphi \vee f - f)\\ &= \mu^*(f) + \mu^*(\varphi - \varphi \wedge f) = \mu^*(f) + \mu^*(\varphi) - \mu^*(\varphi \wedge f).\end{aligned}$$

È quindi

$$\mu^*(f) + \mu^*(\varphi) = \mu^*(\varphi \wedge f) + \mu^*(\varphi \vee f) \tag{*}$$

e analogamente

$$\mu^*(g) + \mu^*(\varphi) = \mu^*(\varphi \wedge g) + \mu^*(\varphi \vee g) \tag{**}$$

dalle quali si deduce, fra l'altro, che nelle nostre ipotesi

$$\mu^*(\varphi \vee f),\ \ \mu^*(f \vee g) < +\infty.$$

Se nella (**) poniamo successivamente $\varphi \wedge f$ e $\varphi \vee f$ al posto di φ avremo

$$\mu^*(\varphi \wedge f) + \mu^*(g) = \mu^*((\varphi \wedge f) \vee g) + \mu^*((\varphi \wedge f) \wedge g)$$

$$\mu^*(\varphi \vee f) + \mu^*(g) = \mu^*((\varphi \vee f) \vee g) + \mu^*((\varphi \vee f) \wedge g).$$

Sostituendo in (*) avremo

$$\begin{aligned}\mu^*(\varphi) + \mu^*(f) &= \mu^*((\varphi \wedge f) \wedge g) + \mu^*((\varphi \wedge f) \vee g)\\ &\quad + \mu^*((\varphi \vee f) \wedge g) + \mu^*((\varphi \vee f) \vee g) - 2\mu^*(g)\end{aligned} \tag{***}$$

e ponendo in (***) $\varphi \wedge (f \vee g)$ al posto di φ otterremo

$$\begin{aligned}\mu^*(\varphi \wedge (f \vee g)) + \mu^*(f) &= \mu^*([\{\varphi \wedge (f \vee g)\} \wedge f] \wedge g) +\\ &\quad + \mu^*([\{\varphi \wedge (f \vee g)\} \wedge f] \vee g)\\ &\quad + \mu^*([\{\varphi \wedge (f \vee g)\} \vee f] \wedge g) + \mu^*([\{\varphi \wedge (f \vee g)\} \vee f] \vee g)\\ &\quad - 2\mu^*(g).\end{aligned}$$

Ma risulta

$$[\{\varphi \wedge (f \vee g)\} \wedge f] \wedge g = \varphi \wedge f \wedge g$$

$$[\{\varphi \wedge (f \vee g)\} \wedge f] \vee g = (f \wedge \varphi) \vee g$$

$$[\{\varphi \wedge (f \vee g)\} \vee f] \wedge g = (\varphi \vee f) \wedge g$$

$$[\{\varphi \wedge (f \vee g)\} \vee f] \vee g = f \vee g$$

Si ha dunque

$$\mu^*(\varphi \wedge (f \vee g)) + \mu^*(f) = \mu^*(\varphi \wedge f \wedge g) + \mu^*((\varphi \wedge f) \vee g) +$$
$$+ \mu^*((\varphi \vee f) \wedge g) + \mu^*(f \vee g) - 2\mu^*(g)$$

e sottraendo questa da (***)

$$\mu^*(\varphi) - \mu^*(\varphi \wedge (f \vee g)) = \mu^*(\varphi \vee f \vee g) - \mu^*(f \vee g)$$

e ciò prova quanto affermato.

e) Dimostriamo ora che: $f,\, g \in \mathfrak{M}^+$, $\varphi \in \mathcal{H}^+$, $\varphi \geq f+g \Rightarrow \mu^*(\varphi) = \mu^*(f \vee g) + \mu^*(\varphi - f \vee g)$.

Come sopra potremo supporre che sia $\mu^*(\varphi) < \infty$ e limitarci a provare che

$$\mu^*(\varphi) \geq \mu^*(f \vee g) + \mu^*(\varphi - f \vee g).$$

Allo scopo osserviamo che

$$\begin{aligned} \mu^*(\varphi - f \vee g) &= \mu^*[\{\varphi - (f+g)\} + \{f+g-f \vee g\}] \\ &\leq \mu^*[\varphi - (f+g)] + \mu^*(f+g-f \vee g) \text{ [1]} \\ &\leq \mu^*(\varphi - (f+g)) + \mu^*(f \wedge g) \end{aligned}$$

e per questo visto in b)

$$\begin{aligned} \mu^*(\varphi - f \vee g) &\leq \mu^*(\varphi) - \mu^*(f+g) + \mu^*(f \wedge g) \\ &\leq \mu^*(\varphi) - \mu^*(f) - \mu^*(g) + \mu^*(f \wedge g). \end{aligned}$$

Da queste per le ipotesi $\mu^*(\varphi) < +\infty$, $\varphi \geq f+g$ e per quanto visto

---

[1] Come in b) si vede che $\{x : x \in X,\ f+g-f \vee g \neq f \wedge g\}$ è $(\varepsilon,\ \mu)$ — trascurabile.

nell'inizio di d) si deduce

$$\mu^*(\varphi - f \vee g) \leq \mu^*(\varphi) - \mu^*(f \vee g)$$

e ciò prova quanto si era asserito.

f) Proviamo ora che: $f,\ g \in \mathfrak{M}_0^+,\ \varphi \in \mathcal{H}^+,\ \varphi \geq f \vee g \Rightarrow \mu^*(\varphi) = \varphi^*(f \vee g) + \mu^*(\varphi - f \vee g)$.

Anche questa volta limitiamoci a considerare il caso in cui $\mu^*(\varphi) < +\infty$.

Applicando e) a $\varphi + (f+g)$ avremo

$$\mu^*(\varphi + (f+g)) = \mu^*(f \vee g) + \mu^*(\varphi + (f+g) - f \vee g).$$

Per quanto visto in b) avremo

$$\mu^*(\varphi) + \mu^*(f) + \mu^*(g) = \mu^*(f \vee g) + \mu^*(\varphi - f \vee g) + \mu^*(f) + \mu^*(g)$$

da cui, poiché $f,\ g \in \mathfrak{M}_0^+$, segue quanto si era affermato.

g) Proviamo che $f,\ g \in \mathfrak{M}_0^+,\ \varphi \in \mathcal{H}^+ \Rightarrow \mu^*(\varphi) = \mu^*(\varphi \wedge (f \vee g)) + \mu^*(\varphi - \varphi \wedge (f \vee g))$.

Per quanto dimostrato in f) si ha

$$\begin{aligned}\mu^*(\varphi \vee (f \vee g)) &= \mu^*(f \vee g) + \mu^*(\varphi \vee f \vee g - f \vee g) \\ &= \mu^*(f \vee g) + \mu^*(\varphi - \varphi \wedge (f \vee g))\end{aligned}$$

e per quanto dimostrato in d)

$$\mu^*(\varphi) + \mu^*(f \vee g) - \mu^*(\varphi \wedge (f \vee g)) = \mu^*(f \vee g) + \mu^*(\varphi - \varphi \wedge (f \vee g)).$$

Da questa, poiché $\mu^*(f \vee g) < +\infty$ si deduce l'asserto e quindi che: $f,\ g \in \mathfrak{M}_0^+ \Rightarrow f \vee g \in \mathfrak{M}_0^+$.

h) $\mathfrak{M}^+$ è una classe monotona; cioè $f_n \in \mathfrak{M}^+,\ f_n \nearrow f_0 \Rightarrow f_0 = \lim_{n \to \infty} f_n \in \mathfrak{M}^+$.

Dim. Sia $\varphi \in \mathfrak{M}^+$; come si è già detto più volte basterà dimostrae che

$$\mu^*(\varphi) \geq \mu^*(\varphi \wedge f_0) + \mu^*(\varphi - \varphi \wedge f_0)$$

e limitarci al caso in cui $\mu^*(\varphi) < +\infty$.

Ora poiché $f_n \in \mathfrak{M}^+$ si ha, per ogni n,

$$\mu^*(\varphi) = \mu^*(\varphi \wedge f_n) + \mu^*(\varphi - \varphi \wedge f_n)$$

$$(*) \qquad \mu^*(\varphi) \geq \mu^*(\varphi \wedge f_n) + \mu^*(\varphi - \varphi \wedge f_0),$$

inoltre, poiché $f_1 \in \mathfrak{M}^+$,

$$\mu^*(\varphi \wedge f_2) = \mu^*(\varphi \wedge f_2 \wedge f_1) + \mu^*(\varphi \wedge f_2 - \varphi \wedge f_2 \wedge f_1)$$
$$= \mu^*(\varphi \wedge f_1) + \mu^*(\varphi \wedge f_2 - \varphi \wedge f_1),$$

ed analogalmente, per ogni n,

$$\mu^*(\varphi \wedge f_n) = \mu^*(\varphi \wedge f_{n-1}) + \mu^*(\varphi \wedge f_n - \varphi \wedge f_{n-1}).$$

Sommando da 1 ad n, per l'ipotesi $\mu^*(\varphi) < +\infty$, si ha

$$\mu^*(\varphi \wedge f_n) = \mu^*(\varphi \wedge f_1) + \sum_2^n \mu^*(\varphi \wedge f_k - \varphi \wedge f_{k-1})$$

e tenendo conto della (*)

$$\mu^*(\varphi) \geq \mu(\varphi \wedge f_1) + \sum_2^n \mu^*(\varphi \wedge f_k - \varphi \wedge f_{k-1}) + \mu^*(\varphi - \varphi \wedge f_0).$$

Per l'arbitrarietà di n e per la 3) del teorema 1 si ha quindi

$$\mu^*(\varphi) \geq \mu^*[(\varphi \wedge f_1) + \sum_2^\infty (\varphi \wedge f_k - \varphi \wedge f_{k-1})] + \mu^*(\varphi - \varphi \wedge f_0)$$

e quindi anche

$$\mu^*(\varphi) \geq \mu^*(\varphi \wedge f_0) + \mu^*(\varphi - \varphi \wedge f_0),$$

come volevamo dimostrare.

i) Proviamo ora che $\mathfrak{M}_0^+$ è una classe additiva: cioè che f, $g \in \mathfrak{M}_0^+ \Rightarrow f + g \in \mathfrak{M}_0^+$.

Sia $\varphi \in \mathcal{H}^+$, basterà provare che

$$\mu^*(\varphi) \geq \mu^*(\varphi \wedge (f+g)) + \mu^*(\varphi - \varphi \wedge (f+g))$$

e limitarci a supporre $\mu^*(\varphi) < +\infty$.

Poiché $f \wedge g \in \mathfrak{M}_0^+$ si ha

$$\mu^*(\varphi)=\mu^*(\varphi \wedge f \wedge g)+\mu^*(\varphi-\varphi \wedge f \wedge g)=\mu^*(\varphi_1)+\mu^*(\varphi_2)$$

essendo

$$\varphi_1=\varphi \wedge f \wedge g \qquad \varphi_2=\varphi-\varphi \wedge f \wedge g.$$

D'altra parte è

$$\varphi \wedge (f+g)=\varphi_1 \wedge f \wedge g+\varphi_2 \wedge (f \vee g)$$

e poiché $f \vee g \in \mathfrak{M}_0^+$ si ha

$$\mu^*(\varphi_2)=\mu^*(\varphi_2 \wedge (f \vee g))+\mu^*(\varphi_2-\varphi_2 \wedge (f \vee g)).$$

Se ne deduce

$$\mu^*(\varphi)=\mu^*(\varphi_1)+\mu^*(\varphi_2)=\mu^*(\varphi_2 \wedge (f \vee g))+$$
$$+\mu^*(\varphi_2-\varphi_2 \wedge (f \vee g))+\mu^*(\varphi_1 \wedge f \wedge g)$$

e quindi

$$\mu^*(\varphi)\geq\mu^*(\varphi_1 \wedge f \wedge g+\varphi_2 \wedge (f \vee g))+\mu^*(\varphi_2-\varphi_2 \wedge (f \vee g))$$
$$\geq\mu^*(\varphi \wedge (f+g))+\mu^*(\varphi-\varphi \wedge (f+g));$$

infatti si ha:

$$\varphi_2-\varphi_2 \wedge (f \vee g)=\varphi-\varphi \wedge (f+g).$$

Ciò prova la nostra affermazione.

1) Proviamo ora che: $f,\ g \in \mathfrak{M}^+,\ f\geq g,\ \mu^*(g)<+\infty \Rightarrow f-g \in \mathfrak{M}^+,\ \mu^*(f)=\mu^*(g)+\mu^*(f-g)$.

Si deve soltanto provare che $f-g \in \mathfrak{M}^+$ e cioè che se $\varphi \in \mathcal{H}^+$ allora

$$\mu^*(\varphi)=\mu^*(\varphi \wedge (f-g))+\mu^*(\varphi-\varphi \wedge (f-g)).$$

Ora si ha

$$\varphi \wedge (f-g)=(\varphi+g) \wedge f-g$$

e poiché $f \in \mathfrak{M}^+$

$$\mu^*(\varphi+g)=\mu^*((\varphi+g)\wedge f)+\mu^*((\varphi+g)-(\varphi+g)\wedge f).$$

Da quanto si è visto si è visto in b) segue perciò

$$\mu^*(\varphi)+\mu^*(g)=\mu^*(\varphi\wedge(f-g))+\mu^*(g)+\mu^*((\varphi+g)-(\varphi+g)\wedge f).$$

D'altra parte, tenendo presente che $\mu^*(g)<+\infty$ e ragionando come in b) otteniamo

$$\mu^*((\varphi+g)-(\varphi+g)\wedge f)=\mu^*(\varphi-\varphi\wedge(f-g)).$$

Ciò prova quanto si era affermato.

m) Proviamo che μ^* è continua dal di sotto in $\mathfrak{M}^+$: cioè che $f_n \in \mathfrak{M}^+$, $f_n \nearrow f_0 \Rightarrow \mu^*(f_n) \nearrow \mu^*(f_0)$.

Dim. Poiché $f_n \leq f_{n+1} \leq f_0$ si ha dalla 4) del teorema 1

$$\mu^*(f_n) \leq \mu^*(f_{n+1}) \leq \mu^*(f_0)$$

da cui segue l'esistenza del $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^*(f_n)$ e la disuguaglianza

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(f_n) \leq \mu^*(f_0).$$

A questo punto se esiste un n per il quale $\mu^*(f_n)=+\infty$ non c'è più niente da dimostrare; in caso contrario si ha

$$\mu^*(f_0)=\mu^*(f_1+\sum_2^\infty (f_k-f_{k-1})) \leq \mu^*(f_1)+$$
$$+\sum_2^\infty \mu^*(f_k-f_{k-1})=\mu^*(f_1)+\sum_2^\infty (\mu^*(f_k)-\mu^*(f_{k-1}))$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \mu^*(f_n).$$

n) Proviamo che μ^* è σ-additiva su $\mathfrak{M}^+$: cioè che

$$f_n \in \mathfrak{M}^+ \Rightarrow \mu^*(\sum_1^\infty f_n)=\sum_1^\infty \mu^*(f_n).$$

Proviamo anche che: $f_n \in \mathfrak{M}_0^+ \Rightarrow \sum\limits_1^\infty f_n \in \mathfrak{M}^+$

Per quanto si riferisce alla prima affermazione si ha, per il teorema 1 e per quanto visto in b),

$$\mu^*(\sum_1^{\infty} f_n) \geq \mu^*(\sum_1^{n} f_k) = \sum_1^{n} \mu^*(f_k)$$

e quindi per l'arbitrarietà di n

$$\mu^*(\sum_1 f_n) \geq \sum_1^{\infty} \mu^*(f_n).$$

Poiché dal teorema 1 segue la disuguaglianza contraria, la prima affermazione è provata.

Per ciò che si riferisce alla seconda affermazione, osserviamo che, da quanto visto in g) segue

$$\sum_1^{n} f_k \in \mathfrak{M}_0^+, \text{ per ogni } n.$$

L'asserto segue allora da quanto si è visto in h).

o) Proviamo che $f \in \mathfrak{M}^+$, $a \in R^+ \Rightarrow af \in \mathfrak{M}^+$.

DIM. Basterà supporre $a \neq 0$. Sia $\varphi \in \mathcal{H}^+$; avremo per il teorema 1,

$$\begin{aligned}\mu^*(\varphi) - \mu^*(\varphi \wedge af) &= a \cdot \mu^*\left(\frac{\varphi}{a}\right) - \mu^*\left(a\left(\frac{\varphi}{a} \wedge \mathrm{f}\right)\right) \\ &= a\left\{\mu^*\left(\frac{\varphi}{a}\right) - \mu^*\left(\frac{\varphi}{a} \wedge f\right)\right\} = a \cdot \mu^*\left(\frac{\varphi}{a} - \frac{\varphi}{a} \wedge f\right) \\ &= \mu^*\left(\varphi - a\left(\frac{\varphi}{a} \wedge f\right)\right) = \mu^*(\varphi - \varphi \wedge af).\end{aligned}$$

Ciò prova quanto affermato.

p) Osserviamo infine che se $\varepsilon^+ \subset M^+$ allora nelle proposizioni 1, 2, 4 può porsi $\mathfrak{M}^+$ al posto di $\mathfrak{M}_0^+$.

Da un riesame delle dimostrazioni sopra effettuate risulta che basterà soltanto provare che con questa nuova ipotesi si ha: $f, g \in \mathfrak{M}^+ \Rightarrow$ $\Rightarrow f \vee g \in \mathfrak{M}^+$.

Ora esistono successioni, $\{g_{1n}\}$, $\{g_{2n}\}$, $\{\alpha_{1n}\}$, $\{\alpha_{2n}\}$, formate da ele-elementi di ε^+ e R^+ rispettivamente, tali che

$$f \leq \sum_1^\infty \alpha_{1n} g_{1n} \quad , \quad g \leq \sum_1^\infty \alpha_{2n} g_{2n} \quad ,$$

mentre

$$g_{1n},\ g_{2n} \in \mathfrak{M}_0^+ .$$

Posto allora

$$h_n = \sum_1^n (\alpha_{1k} g_{1k} + \alpha_{2k} g_{2k})$$

si ha da o) e i) che $h_n \in \mathfrak{M}_0^+$.

Ma si ha

$$(*) \qquad (f \vee g) \wedge h_n \nearrow f \vee g$$

ed anche, per ogni n,

$$(f \vee g) \wedge h_n = (f \wedge h_n) \vee (g \wedge h_n) \in \mathfrak{M}_0^+ ,$$

poiché $f \wedge h_n$, $g \wedge \in \mathfrak{M}_0^+$ e per quanto visto in g). Cio basta per concludere, mediante la (*) e quanto si è visto in h), che $f \wedge g \in \mathfrak{M}^+$.

9. In questo numero dimostriamo il teorema 3.

Dopo il teorema 1 basterà soltanto dimostrare che nelle nostre ipotesi si ha

$$\mu(f) \leq \mu^*(f).$$

Pertanto niente è da dimostrare se $\mu^*(f) = +\infty$.

In caso contrario fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$ esisteranno due successioni $\{f_n\}$, $\{\alpha_n\}$ formate da elementi di ε^+ e di R^+ rispettivamente tali che

$$f \leq \sum_1 \alpha_n f_n, \quad \mu^*(f) + \varepsilon \geq \sum_1^\infty \alpha_n \mu(f_n).$$

Per l'ipotesi ora fatta su (ε, μ) risulta dunque

$$\mu(f) \leq \sum_1^\infty \alpha_n \cdot \mu(f_n);$$

dal confronto della precedente e dell'arbitrarietà di ε segue allora

$$\mu(f) \leq \mu^*(f).$$

10. Sia $\varepsilon^+ \subset \mathfrak{M}^+$. Allora se f, $\varphi \in \varepsilon^+$ anche $\varphi \wedge f \in \varepsilon^+$. Poiché vale la 4) si ha inoltre $\mu(\varphi) = \mu^*(\varphi)$, $\mu(\varphi \wedge f) = \mu^*(\varphi \wedge f)$ ed anche

$$\mu^*(\varphi) = \mu^*(\varphi \wedge f) + \mu^*(\varphi - \varphi \wedge f)$$

dalla quale si deduce

$$(*) \qquad \mu(\varphi) = \mu(\varphi \wedge f) + \mu^*(\varphi - \varphi \wedge f).$$

Viceversa, supponiamo che nelle ipotesi indicate la (*) sia verificata per ogni coppia di φ, $f \in \varepsilon^+$.

Faremo vedere allora che per qualunque $\Psi \in \mathfrak{M}^+$ per cui $\mu(\Psi) < < +\infty$ si ha

$$\mu^*(\Psi) \geq \mu^*(\Psi \wedge f) + \mu^*(\Psi - \Psi \wedge f),$$

ciò, in conseguenza del teorema 1 basterà per provare che

$$\mu^*(\Psi) = \mu^*(\Psi \wedge f) + \mu^*(\Psi - \Psi \wedge f).$$

e ciò proverà il teorema 4.

Allo scopo, fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, siano $\{g_n\}$, $\{\alpha_n\}$ due successioni di elementi di ε^+ e R^+ rispettivamente per le quali risulti

$$\Psi \leq \sum_1 \alpha_n g_n \,, \quad \mu^*(\Psi) + \varepsilon \geq \sum_1^\infty \alpha_n \mu(g_n) = \sum_1^\infty \alpha_n \cdot \mu^*(g_n).$$

Avremo perciò per il teorema 1

$$\mu^*(\Psi) + \varepsilon \geq \mu^*\Big(\sum_1^\infty \alpha_n \cdot g_n\Big) = \mu^*\Big(\lim_{n\to\infty} S_n\Big)$$

dopo che si è posto per ogni n,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k \in \varepsilon^+.$$

Per la monotonia di $\{S_n\}$ avremo quindi

$$\mu^*(\Psi)+\varepsilon \geq \lim_{n\to n} \mu^*(S_n).$$

Ma per le ipotesi e per il fatto che $S_n \in \varepsilon^+$ si ha

$$\mu(S_n)=\mu^*(S_n)=\mu^*(S_n \wedge f)+\mu^*(S_n - S_n \wedge f).$$

Si ha dunque per il teorema 2 e per il fatto che le disuguaglianze

$$S_n \wedge f \leq S_{n+1} \wedge f$$

$$S_n - S_n \wedge f \leq S_{n+1} - S_{n+1} \wedge f$$

sono verificate per ogni n,

$$(**) \qquad \begin{aligned} \mu^*(\Psi)+\varepsilon &\geq \lim_{n\to\infty} \{\mu^*(S_n \wedge f)+\mu^*(S_n - S_n \wedge f)\} \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \mu^*(S_n \wedge f) + \lim_{n\to\infty} \mu^*(S_n - S_n \wedge f). \end{aligned}$$

Poiché $S_n \wedge f$, $S_{n-1} \wedge f \in \varepsilon^+$ e per l'ipotesi si ha,

$$\mu(S_n \wedge f)=\mu(S_{n-1} \wedge f)+\mu^*(S_n \wedge f - S_{n-1} \wedge f),$$

da cui sommando per $k=2, 3, \dots n$ si deduce

$$\mu(S_n \wedge f)=\mu(S_1 \wedge f)+\sum_{k=2}^{n} \mu^*(S_k \wedge f - S_{k-1} \wedge f).$$

Poiché $S_n \vee f$, $S_{n-1} \vee f \in \varepsilon^+$, per le ipotesi e per le considerazioni svolte in a) e b) nel n. 8 si ha,

$$\begin{aligned} \mu^*(S_n - S_n \wedge f)-\mu^*(S_{n-1} - S_{n-1} \wedge f) &= \mu^*(S_n \vee f - f)-\mu^*(S_{n-1} \vee f - f)= \\ =\mu(S_n \vee f)-\mu(f)-\mu(S_{n-1} \vee f)+\mu(f) &= \mu^*(S_n \vee f - S_{n-1} \vee f)= \\ =\mu^*[(S_n \vee f - f)-(S_{n-1} \vee f - f)] &= \mu^*\{(S_n - S_n \wedge f)-(S_{n-1} - S_{n-1} \wedge f)\}. \end{aligned}$$

Sommando per $k=2, 3, \dots n$ otteniamo

$$\mu^*(S_n - S_n \wedge f)=\mu^*(S_1 - S_1 \wedge f)+\sum_{k=2}^{n} \mu^*\{(S_k - S_k \wedge f)-(S_{k-1} - S_{k-1} \wedge f)\}.$$

Si ha pertanto da (**)

$$\mu^*(\Psi)+\varepsilon \geq \lim_{n\to\infty} \{\mu(S_1 \wedge f)+\sum_{k=2}^{n}\mu^*(S_k \wedge f-S_{k-1})\}+\lim_{n\to\infty}[\mu^*(S_1-S_1\wedge f)+$$
$$+\sum_{k=2}^{n}\mu^*\{(S_k-S_k\wedge f)-(S_{k-1}-S_{k-1}\wedge f)\}].$$

e per la 3) del teorema 1,

$$\mu^*(\Psi)+\varepsilon \geq \mu^*(S_1\wedge f+\sum_{k=2}^{\infty}(S_k\wedge f-S_{k-1}\wedge f))+\mu^*((S_1-S_1\wedge f)+$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}[(S_k-S_k\wedge f)-(S_{k-1}-S_{k-1}\wedge f)])$$
$$\geq \mu^*(\lim_{n\to\infty} S_n\wedge f)+\mu^*(\lim_{n\to\infty}(S_n\vee f-f))$$
$$\geq \mu^*((\lim_{n\to\infty} S_n)\wedge f)+\mu^*((\lim_{n\to\infty} S_n)\vee f-f).$$

Da questa per il teorema 1 e per essere $\Psi \leq \sum_{1}^{\infty} \alpha_n g_n$ si deduce

$$\mu^*(\Psi)+\varepsilon \geq \mu^*(\Psi\wedge f)+\mu^*(\Psi\vee f-f)$$
$$\geq \mu^*(\Psi\wedge f)+\mu^*(\Psi-\Psi\wedge f)$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε, segue l'asserto.

Dal teorema 4 segue poi ovviamente il teorema 5.

11. Dimostriamo il teorema 6.

Dimostriamo dapprima che se, nelle ipotesi del teorema, $\varepsilon^+ \subset \mathfrak{M}^+$ allora per ogni coppia f, $\varphi \in \varepsilon^+$, tale che $\varphi \geq f$, si ha

$$(*) \qquad \mu(\varphi)=\mu(f)+\mu^*(\varphi-f).$$

Poiché $\varepsilon^+ \subset \mathfrak{M}^+$ si ha intanto per tali f,

$$\mu^*(\varphi)=\mu^*(f)+\mu^*(\varphi-f),$$

basterà allora soltanto provare che, nelle nostre ipotesi, per ogni $f_0 \in \varepsilon^+$ si ha $\mu(f_0)=\mu^*(f_0)$.

Allo scopo siano f_0, $f_n \in \varepsilon^+$ tali che $f_0 \leq \sum_{1}^{\infty} f_n$; allora la successione $\{(\sum_{1}^{n} f_k)\wedge f_0\}$ tende non decrescendo a f_0 e si ha, per ogni n, $(\sum_{1}^{n} f_k)\wedge f_0 \in \varepsilon^+$.

Per ogni $\varepsilon>0$ è perciò possibile determinare ν intero positivo in modo che se $n>\nu$ risulti

$$\mu(f_0)-\varepsilon<\mu((\sum_1^n f_k)\wedge f_0)\leq\mu(\sum_1^n f_k)\leq\sum_1^n\mu(f_k)\leq\sum_1^\infty\mu(f_k);$$

risulta perciò, per l'arbitrarietà di ε,

$$\mu(f_0)\leq\sum_1^\infty\mu(f_k)$$

e quindi che (ε, μ) verifica la condizione 4 del n. 4.

Da ciò per il teorema 3 che $\mu(f_0)=\mu^*(f_0)$ quindi la (*).

Viceversa, supponiamo che (ε, μ) verifichi le ipotesi del teorema e che per ogni coppia φ, $f\in\varepsilon^+$, $\varphi\geq f$ si abbia

$$\mu(\varphi)=\mu(f)+\mu^*(\varphi-f).$$

Facendo in questa $f=0$ ne otteniamo, per ogni $\varphi\in\varepsilon^+$

$$\mu(\varphi)=\mu^*(\varphi).$$

Siano ora dati f_0, $f_n\in\varepsilon^+$, $\alpha_n\in R^+$ in modo che $f_0\leq\sum_1^\infty\alpha_n f_n$.

Poiché μ^* (definita a partire da (ε, μ) come nel n. 2), verifica la condizione 3 del teorema 1 si ha

$$\mu(f_0)=\mu^*(f_0)\leq\sum_1^\infty\alpha_n\cdot\mu^*(f_n)=\sum_1^\infty\alpha_n\cdot\mu(f_n).$$

La coppia (ε, μ) verifica così anche la condizione 4) del n. 4 oltre che la 6) del n. 5. Dal teorema 4 segue allora che

$$\varepsilon^+\subset\mathfrak{M}^+.$$

12. Veniamo ora alla dimostrazione del teorema 7.

Ragionando come nella prima parte del numero precedente si conclude intanto che per ogni $f\in\varepsilon^+$ si ha $\mu(f)=\mu^*(f)$.

Se allora f, $g\in\varepsilon^+$ sono tali che $f\geq g$ dalla disuguaglianza

$$\mu^*(f)\leq\mu^*(f-g)+\mu^*(g)$$

valida per il teorema 1 si deduce che

$$\mu(f) \leq \mu^*(f-g) + \mu(g).$$

Proviamo che vale anche la disuguaglianza contraria; basterà evidentemente limitarsi a considerare il caso in cui $\mu(f) < +\infty$.

Siano allora $\{g_n\}$, $\{h_n\}$; g_n, $h_n \in \varepsilon^+$ tali che $g_n \nearrow g$, $g_n \leq f - h_n \leq g$.

Per ogni n e per tutti gli x eccettuati al più quelli di un insieme $(\varepsilon, \mu)-$ trascurabile si avrà allora

$$f - g \leq h_n \leq f - g_n$$

in modo che risulterà per le ipotesi $4'_1$), $6''$)

$$\mu(h_n) + \mu(g_n) = \mu(h_n + g_n) \leq \mu(f)$$

e ragionando come in b) del n. 8

$$\mu^*(f-g) \leq \mu^*(h_n) = \mu(h_n) \leq \mu(f) - \mu(g_n).$$

Poiché per le ipotesi si ha $\mu(g_n) \nearrow \mu(g)$, deduciamo da questa

$$\mu^*(f-g) + \mu(g) \leq \mu(f).$$

Abbiamo così provato che $\varepsilon^+ \subset \mathfrak{M}^+$ e che $\mu(f) = \mu^*(f)$ per ogni $f \in \varepsilon^+$.

13. Dimostriamo infine il teorema 8.

Ragionando come nel n. 11 abbiamo che, per qualsiasi coppia f, $g \in \varepsilon^+$, $f \geq g$, risulta

$$\mu^*(f-g) = \mu(f-g),$$

e quindi

$$\mu(f) = \mu(g) + \mu(f-g) = \mu(g) + \mu^*(f-g).$$

Da questa, in virtù del teorema 6, segue l'asserto.

BIBLIOGRAFIA

[1] Loomis L. H.: *An introduction to Abstract Harmonic Analysis,* Van Nostrand Co., New York, 1953.

[2] Zaanen A. C.: *An introduction to the theory of integration,* North Holland Pub. Co., Amsterdam, 1958.

Manoscritto pervenuto in redazione il 13-9-68.