

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

JAAK PEETRE

Sur la transformation de Fourier des fonctions à valeurs vectorielles

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 42 (1969), p. 15-26

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1969__42__15_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SUR LA TRANSFORMATION DE FOURIER DES FONCTIONS À VALEURS VECTORIELLES

di JAAK PEETRE *)

Introduction.

Envisageons la transformation de Fourier

$$\mathfrak{F}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} f(x) dx \quad (-\infty < x, \xi < \infty).$$

D'après le théorème de Hausdorff-Young (voir Zygmund [10], t. II, chap. XII) on sait que si $f \in L_p$ (L_p par rapport à la mesure de Haar), $1 \leq p \leq 2$, on a $\mathfrak{F}f \in L_q$, $2 \leq q \leq \infty$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si on considère, au lieu des fonctions scalaires f , des fonctions f à valeurs dans un espace de Banach A , \mathfrak{F} étant défini par une formule tout à fait analogue, ce résultat n'est plus vrai. En effet on voit facilement que, en général, on n'a même pas que $\vec{f} \in L_p(A)$ entraîne $\mathfrak{F}\vec{f} \in L_1^{\text{loc}}(A)$. Donc il est naturel d'introduire la notion suivante. *On dit que A est de type p , $1 \leq p \leq 2$, si $\vec{f} \in L_p(A)$ entraîne $\mathfrak{F}\vec{f} \in L_q(A)$.* Nous allons étudier, dans cet article, quelques propriétés simples de cette notion, liées à la théorie des *espaces d'interpolation*. En particulier, nous allons démontrer le résultat suivant: *Si A_0 et A_1 sont des espaces de Banach de type p_0 et p_1 respectivement on a*

$$(A_0, A_1)_{\theta, p} \subset [A_0, A_1]_{\theta} \subset (A_0, A_1)_{\theta, q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

*) Indirizzo dell'A: Tekniska Högskolan i Lund, Fack 725, Lund 7. Sverige.

Ceci peut être regardé comme une extension d'un résultat antérieur (Lions-Peetre [5], chap. IV, th. 1.1).

Le plan de l'article est le suivant. Au n. 1 on rappelle quelques notions sur les espaces $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ et $[A_0, A_1]_{\theta}$. Au n. 2 on donne des critères pour qu'un espace soit de type p et on donne aussi des exemples. Au n. 3 on démontre le résultat signalé ci-dessus. Enfin, au n. 4 on indique des applications aux espaces de type Besov.

1. Rappel sur les espaces d'interpolation.

Soient A_0 et A_1 des espaces de Banach tous deux continûment plongés dans un espace vectoriel topologique *séparé* \mathcal{E} . On désigne par $A_0 + A_1$ leur *somme* et par $A_0 \cap A_1$ leur intersection; c'est sont des sous-espaces de \mathcal{E} .

a) *La méthode réelle* (voir Lions-Peetre [4], [5], Peetre [7], [8]). Soient θ, p_0, p_1 tels que $0 < \theta < 1, 1 \leq p_0 \leq \infty, 1 \leq p_1 \leq \infty$. On désigne par $(A_0, A_1)_{\theta, p_0, p_1}$ l'espace des éléments $a \in A_0 + A_1$ qui peuvent être représentés dans la forme

$$(1.1) \quad a = \int_0^{\infty} u(t) \frac{dt}{t}$$

où u est une fonction à valeurs dans $A_0 \cap A_1$ telle que

$$(1.2) \quad t^{-\theta} u(t) \in L_{p_0}^*(A_0), t^{1-\theta} u(t) \in L_{p_1}^*(A_1)$$

$\left\{ L_{p_0}^*, L_{p_1} \text{ par rapport à la mesure } \frac{dt}{t} \right\}$. On le munit de la norme

$$\| a \|_{(A_0, A_1)_{\theta, p_0, p_1}} = \inf_u \max \{ \| t^{-\theta} u(t) \|_{L_{p_0}^*(A_0)}, \| t^{1-\theta} u(t) \|_{L_{p_1}^*(A_1)} \}$$

qu'en fait un espace de Banach.

Le cas le plus important est le cas $p_0 = p_1 = p$. Nous allons écrire

¹) Notation de [7], [8]; celle de [4], [5] était $S(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta - 1, A_1)$.

simplement $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ du lieu de $(A_0, A_1)_{\theta, p, p}$. On sait (Peetre [7], [8]) que

$$(1.3) \quad (A_0, A_1)_{\theta, p} = (A_0, A_1)_{\theta, p_0, p_1}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$

à une équivalence de norme près.

b) *La méthode complexe* (voir Calderón [2], [3]).

Soit θ , tel que $0 < \theta < 1$. On désigne par $[A_0, A_1]_{\theta}$ l'espace des éléments $a \in A_0 + A_1$ qui peuvent être représentés dans la forme

$$(1.4) \quad a = U(\theta)$$

où U est une fonction à valeurs dans $A_0 + A_1$, bornée et analytique dans la bande $0 < \text{Re } \lambda < 1$ du plan complexe des $\lambda = \alpha + i\beta$, telle que $U(i\beta) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} U(\alpha + i\beta)$ et $U(\alpha + i\beta) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} U(\alpha + i\beta)$ {ces limites existent de moins au sens des distributions à valeurs dans $A_0 + A_1$ } sont des fonctions bornées et continues à valeurs dans A_0 et A_1 respectivement:

$$(1.5) \quad U(i\beta) \in C(A_0), \quad U(1+i\beta) \in C(A_1).$$

On le munit de la norme

$$\| a \|_{[A_0, A_1]_{\theta}} = \inf_U \max \{ \| U(i\beta) \|_{C(A_0)}, \| U(1+i\beta) \|_{C(A_1)} \}$$

qui en fait un espace de Banach.

Nous aurons besoin du résultat suivant qui se trouve implicitement de moins dans Calderón [3].

LEMME 1.1. *Pour que $a \in [A_0, A_1]_{\theta}$ il suffit que a admette la représentation (1.4), avec (1.5) remplacé par*

$$(1.6) \quad U(i\beta) \in L_{r_0}(A_0), \quad U(1+i\beta) \in L_{r_1}(A_1), \quad 0 < r_0, r_1 < \infty.$$

DÉMONSTRATION: D'après [3], n. 9.4, on a:

$$(1.7) \quad \| a \|_{[A_0, A_1]_{\theta}} \leq C \max \{ \| U(i\beta) \|_{L_{r_0}(A_0)}, \| U(1+i\beta) \|_{L_{r_1}(A_1)} \}$$

si $a \in [A_0, A_1]_\theta$ admet la représentation (1.4), avec

$$U(i\beta) \in L_{r_0}(A_0) \cap C(A_0), \quad U(1+i\beta) \in L_{r_1}(A_1) \cap C(A_1).$$

Soit maintenant Φ_n une suite de fonctions continues telles que

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(h) dh = 1, \\ \Phi_n(h) \geq 0, \\ \Phi_n(h) = 0 \text{ pour } |h| \geq \frac{1}{n}, \end{cases}$$

et posons

$$U_n(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\lambda + ih) \Phi_n(h) dh,$$

$$a_n = U_n(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\theta + ih) \Phi_n(h) dh.$$

Si (1.6) a lieu effectivement on peut appliquer (1.7) à $U_n - U_m$, $a_n - a_m$. On voit que a_n est une suite de Cauchy dans $[A_0, A_1]_\theta$. Or a_n tend vers a dans $A_0 + A_1$. D'où $a \in [A_0, A_1]_\theta$.

2. Généralités sur les espaces de type p .

DÉFINITION 2.1. Soit A un espace de Banach quelconque. Soit p avec $1 \leq p \leq 2$. On dit que A est de type p si on a:

$$\vec{f} \in L_p(A) \Rightarrow \mathfrak{F}\vec{f} \in L_q(A), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

où \mathfrak{F} désigne la transformation de Fourier

$$\mathfrak{F}\vec{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \vec{f}(x) dx, \quad -\infty < x, \xi < \infty.$$

Nous avons le résultat général suivant.

THÉORÈME 2.1. *Soient A_0 et A_1 comme au n. 1; on suppose que A_0 est de type p_0 et A_1 de type p_1 . On pose:*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

i) Alors $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ est de type p . ii) Lorsque l'un des espaces $L_{p_0}(A_0)$ et $L_{p_1}(A_1)$ résulte réflexif, $[A_0, A_1]_{\theta}$ est également de type p .

DÉMONSTRATION: Par hypothèse avons.

$$\mathfrak{F}: L_{p_0}(A_0) \rightarrow L_{q_0}(A_0), \quad \frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = 1,$$

$$\mathfrak{F}: L_{p_1}(A_1) \rightarrow L_{q_1}(A_1), \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1.$$

D'où

$$(2.1) \quad \mathfrak{F}: (L_{p_0}(A_0), L_{p_1}(A_1))_{\theta, p} \rightarrow (L_{q_0}(A_0), L_{q_1}(A_1))_{\theta, p}$$

ainsi que

$$(2.2) \quad \mathfrak{F}: [L_{p_0}(A_0), L_{p_1}(A_1)]_{\theta} \rightarrow [L_{q_0}(A_0), L_{q_1}(A_1)]_{\theta}.$$

Or d'après Lions-Peetre [5], chap. VII, § 1.1, nous avons

$$(L_{p_0}(A_0), L_{p_1}(A_1))_{\theta, p} = L_p((A_0, A_1)_{\theta, p})$$

et, par la même méthode (utiliser l'inégalité de Jessen)

$$(L_{q_0}(A_0), L_{q_1}(A_1))_{\theta, p} \subset L_q((A_0, A_1)_{\theta, p}), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Donc i) résulte de (2.1). De même, d'après Calderón [3], n. 13.6, nous avons, avec l'hypothèse de réflexivité ci-dessus,

$$[L_{p_0}(A_0), L_{p_1}(A_1)]_{\theta} = L_p([A_0, A_1]_{\theta})$$

et

$$[L_{q_0}(A_0), L_{q_1}(A_1)]_0 \subset L_q([A_0, A_1]_0).$$

Donc ii) résulte de (2.2).

Nous avons aussi le résultat suivant.

THÉORÈME 2.2. *Soit A réflexif. Alors A et son dual A' sont au même temps de type p .*

DÉMONSTRATION: Nous pouvons exclure le cas $p=1$. (Voir exemple 2.1 ci-dessous.) Par hypothèse on a :

$$\mathfrak{F}: L_p(A) \rightarrow L_q(A), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

D'où par transposition

$$\mathfrak{F}': (L_q(A))' \rightarrow (L_p(A))'.$$

Or, grâce à l'hypothèse de réflexivité, nous avons

$$(L_q(A))' = L_q(A'), \quad (L_p(A))' = L_p(A').$$

De plus \mathfrak{F}' peut s'identifier à \mathfrak{F} . Donc il vient

$$\mathfrak{F}: L_p(A') \rightarrow L_q(A')$$

Envisageons maintenant quelques exemples simples d'espaces de type p .

Exemple 2.1. Tout espace de Banach est type 1.

Exemple 2.2. Tout espace de Hilbert est de type 2²⁾.

Exemple 2.3. L'espace L_p { par rapport à une mesure quelconque }, $1 \leq p \leq 2$, est de type p . En effet, on a :

$$(L_1, L_2)_{0,p} = [L_1, L_2]_0 = L_p, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2},$$

²⁾ Nous ne connaissons aucun espace de type 2 qui ne soit pas un espace de Hilbert.

de sorte qu'on peut utiliser le th. 2.1.

Exemple 2.4. L'espace L_q , $2 \leq q \leq \infty$ est de type p où $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. En effet, on a: $(L_q)' = L_p$, de sorte qu'on peut utiliser le th. 2.2.

Exemple 2.5. On ne peut pas améliorer les résultats des exemples 2.4 et 2.5. Donc ni L_p ni L_q n'est, en général, de type p_1 , $p_1 > p$. Démontrons le dans le cas d'une mesure discrète, c'est-à-dire le cas des espaces de suites l_p et l_q . Admettons qu'on a l'inégalité:

$$(2.3) \quad \int_{|\xi| \leq 1} \| \mathfrak{F} \vec{f}(\xi) \|_{l_p} d\xi \leq C \left(\int_{-\infty}^{\infty} \| f(x) \|_{l_p}^{p_1} dx \right)^{\frac{1}{p_1}}$$

c'est-à-dire que $\mathfrak{F}L_{p_1}(l_p) \subset L_{loc}^1(l_p)$. Soit f une fonction scalaire à support compact et posons

$$\vec{f}(x) = \vec{f}_n(x) = (f(x + \omega_1), f(x + \omega_2), \dots, f(x + \omega_n), 0, \dots)$$

où $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ sont choisis tels que les supports des fonctions $f(x + \omega_j)$ ne se rencontrent pas. On a:

$$\mathfrak{F} \vec{f}(\xi) = \mathfrak{F} \vec{f}_n(\xi) = (e^{i\xi\omega_1} \mathfrak{F} f(\xi), \dots, e^{i\xi\omega_n} \mathfrak{F} f(\xi), 0, \dots)$$

Appliquons (2.3) avec $\vec{f} = \vec{f}_n$. Il vient:

$$n^{\frac{1}{p}} \int_{|\xi| \leq 1} | \mathfrak{F} f(\xi) | d\xi \leq C n^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} | f(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Mais ceci nous donne une contradiction si $p_1 > p$. Donc on a:

$$\mathfrak{F}L_{p_1}(l_1) \not\subset L_1^{loc}(l_p)$$

et à fortiori

$$\mathfrak{F}L_{p_1}(l_p) \not\subset L_{p_1}(l_p)$$

si $p_1 > p$. Le cas de l_q se traite par une méthode analogue ou par intermédiaire du th. 2.2.

3. Un rapport entre la méthode réelle et la méthode complexe.

D'après Lions-Peetre [5], chap. IV, th. 1.1, on sait qu'on a toujours

$$(3.1) \quad (A_0, A_1)_{\theta, 1} \subset [A_0, A_1]_{\theta} \subset (A_0, A_1)_{\theta, \infty},$$

On va maintenant donner une généralisation de ce résultat.

THÉORÈME 3.1. *Soient A_0 et A_1 comme au n. 1, on suppose que A_0 est de type p_0 et A_1 de type p_1 . Alors on a:*

$$(3.2) \quad (A_0, A_1)_{\theta, p} \subset [A_0, A_1]_{\theta} \subset (A_0, A_1)_{\theta, q},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

DÉMONSTRATION: La preuve se fait par une extension de la méthode [5]. Soit $a \in (A_0, A_1)_{\theta, p}$. D'après (1.3) on a la représentation

$$a = \int_0^{\infty} u(t) \frac{dt}{t}$$

avec

$$t^{-\theta} u \in L_{p_0}^*(A_0), \quad t^{1-\theta} u \in L_{p_1}^*(A_1).$$

Posons:

$$U(\lambda) = \mathfrak{N} \mathcal{Z} u(\lambda) = \int_0^{\infty} t^{\lambda-\theta} u(t) \frac{dt}{t} \quad (\text{transformation de type Mellin}).$$

On voit aussitôt que $U(\lambda)$ est une fonction analytique à valeurs dans $A_0 + A_1$ avec

$$a = U(\theta).$$

Mais par un changement de variable ($t=e^{-x}$) la transformation de Mellin \mathfrak{M} se ramène à la transformation de Fourier \mathfrak{F} . Donc on peut appliquer l'analogie du théorème de Hausdorff-Young pour \mathfrak{M} et on trouve

$$U(i\beta) \in L_{q_0}(A_0), U(1+i\beta) \in L_{q_1}(A_1), \quad \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1.$$

D'où $a \in [A_0, A_1]_\theta$ par le lemme 1.1. Inversement, soit $a \in [A_0, A_1]_\theta$. On a alors la représentation

$$a = U(0), U(i\beta) \in C(A_0), U(1+i\beta) \in C(A_1).$$

Mais ici on peut remplacer $U(\lambda)$ par $\Phi(\lambda)U(\lambda)$ où $\Phi(\lambda)$ est une fonction analytique scalaire, avec $\Phi(\theta) = 1$, à décroissance assez rapide à l'infini. Donc on peut supposer que

$$U(i\beta) \in L_{p_0}(A_0), U(1+i\beta) \in L_{p_1}(A_1).$$

Si l'on définit à l'aide de

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{i\alpha - \infty}^{i\alpha + \infty} t^{\lambda - \theta} U(\lambda) d\lambda$$

il vient maintenant:

$$a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}, \quad t^{-\theta} u(t) \in L_{q_0}^*(A_0), \quad t^{1-\theta} u(t) \in L_{q_1}^*(A).$$

D'où $a \in (A_0, A_1)_{\theta, q}$, d'après (1.3).

REMARQUE 3.1. Les exemples 2.3 et 2.4 montrent qu'on ne peut pas améliorer ce résultat en général.

4. Quelques application.

On se place sur l'espace numérique R^n ; L_p désignent les L_p par rapport à la mesure de Haar, W_p^m les espaces de Sobolev (m

entier ≥ 0 , $1 \leq p \leq \infty$). On pose

$$B_p^{s,r} = (L_p, W_p^m)_{\theta,r} \quad (\text{« espace de Besov »})$$

et

$$H_p^s = [L_p, W_p^m]_{\theta}$$

avec $\theta = \frac{s}{m}$, $0 < s < m$. Ci dessous nous prenons $1 < p < \infty$. On sait alors que ces espaces, à une équivalence de norme près, ne dépendent pas de m (d'après Lions-Peetre [5], chap. IV, th. 2.1 respectivement Calderón [3], n. 12.3). (On sait aussi que $H_p^m = W_p^m$, m entier > 0). Comme W_p^m est isomorphe à L_p (suite du théorème du Michlin [6] sur les multiplicateurs de Fourier), il est de type p pour $1 < p \leq 2$. Donc en appliquant le th. 3.1 on retrouve le résultat suivant (voir Besov [1], Taibleson [1])

$$(4.1) \quad B_p^{s,p} \subset H_p^s, \quad 1 < p \leq 2, \quad s > 0.$$

D'une façon analogue on montre

$$(4.2) \quad H_q^s \subset B_q^{s,q}, \quad 2 \leq q < \infty.$$

(Ces résultats valent encore pour $p=1$ et $q=\infty$ ce que résulte aussitôt par application de (3.1).) Le th. 3.1 donne aussi, par exemple dans le cas de (4.1),

$$H_p^s \subset B_p^{s,q} \quad 1 < p \leq 2, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Mais c'est sans intérêt parce que par d'autres méthodes (par intermédiaire d'un théorème de type Paley-Littlewood) on peut montrer (voir Taibleson 9) que

$$H_p^s \subset B_p^{s,2}, \quad 1 < p \leq 2$$

résultat nettement plus fort parce que, d'une façon générale $B_p^{s,r_1} \subset B_p^{s,r_2}$ pour $r_1 \leq r_2$. Signalons toute fois une généralisation de (4.1), qui est

nouvelle, semble-t-il, qui résulte par application de nos méthodes:

$$(4.3) \quad (H_{p_0}^{s_0}, H_{p_1}^{s_1})_{\theta, p} \subset H_p^s,$$

$$s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1, \quad \frac{1}{p} = \frac{1 - \theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad 1 < p_0, p_1 \leq 2.$$

En effet, d'après le th. 3.1 il vient

$$(H_{p_0}^{s_0}, H_{p_1}^{s_1})_{\theta, p} \subset [H_{p_0}^{s_0}, H_{p_1}^{s_1}]_{\theta}$$

et d'après un résultat qui est implicite dans Calderón [2]

$$[H_{p_0}^{s_0}, H_{p_1}^{s_1}]_{\theta} = H_p^s.$$

De même on trouve une généralisation analogue de (4.2)

$$(4.4) \quad H_q^s \subset (H_{q_0}^{s_0}, H_{q_1}^{s_1})_{\theta, p},$$

$$s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1, \quad \frac{1}{q} = \frac{1 - \theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad 2 \leq q_0, q_1 < \infty.$$

On notera que pour $p_0 = p_1 = p$ respectivement $q_0 = q_1 = q$ on retrouve (4.1) respectivement (4.2), ceci grâce à Lions-Peetre [5], chap. IV, th. 2.1.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] O. V. BESOV: *Etude d'une classe d'espaces de fonctions liée aux théorèmes de plongement et de prolongement*, Trudy Mat. Inst. Steklov, 60 (1961), 42-81. (En russe).
- [2] A. P. CALDERÓN: *Intermediate spaces and interpolation*, Studia Math. (Série spéciale) 1 (1963), 31-34.
- [3] A. P. CALDERÓN: *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia Math. 24 (1964), 113-190.
- [4] J. L. LIONS - J. PEETRE: *Propriétés d'espaces d'interpolation*, C.R. Acad. Sci. Paris 253 (1961), 1747-1749.
- [5] J. L. LIONS - J. PEETRE: *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 19 (1964), 5-68.

- [6] S. G. MICHLIN: *Sur les multiplicateurs des integrales de Fourier*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 109 (1956), 701-703. (En russe).
- [7] J. PEETRE: *Nouvelles propriétés d'espaces d'interpolation*, C.R. Acad. Sci. Paris 256 (1963), 1424-1426.
- [8] J. PEETRE: *Sur le nombre de paramètres dans la définition de certains espaces d'interpolation*, Ricerche Mat. 12 (1963) 248-261.
- [9] M. H. TAIBLENSEN: *On the theory of Lipschitz spaces of distributions in Euclidean n -space, I. Principal properties*, J. Math. Mech. 13 (1964), 407-419.
- [10] A. ZYGMUND: *Trigonometrical series*, Cambridge. 1958.

Manoscritto pervenuto in redazione il 6 maggio 1968.