

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ROMANO ISLER

Una generalizzazione degli spazi di Fréchet

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 41 (1968), p. 164-176

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__164_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UNA GENERALIZZAZIONE DEGLI SPAZI DI FRÉCHET

ROMANO ISLER *)

Lo studio degli spazi topologici che sono completamente individuati dalle loro successioni convergenti è stato oggetto di numerosi lavori. S. P. Franklin [1] caratterizza tali spazi mediante quozienti di spazi metrici. Qui invece si parte dalla considerazione degli spazi di Fréchet, ossia di quegli spazi topologici in cui la chiusura è quella successionale. La nozione di spazio di Fréchet viene poi estesa definendo gli *spazi di Fréchet generalizzati di ordine α* (con α ordinale; vedi definizione al n° 4) che, sfruttando risultati di M. Dolcher [2] e J. Novák [3], si riconoscono essere tutti e soli quegli spazi topologici che sono individuati dalle loro successioni convergenti (spazi « deducibili da convergenza » in [2], « sequential spaces » in [1]).

Al n° 5 si dà una condizione necessaria e sufficiente affinché uno spazio topologico sia di Fréchet generalizzato di ordine α .

1. Categorie \mathcal{C} degli spazi topologici ed \mathcal{L} delle strutture di convergenza.

Per quanto riguarda le nozioni di categoria \mathcal{C} degli spazi topologici e di categoria \mathcal{L} delle strutture di convergenza si rimanda

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Trieste.

al lavoro di Dolcher ([2] pgg. 66-67). Parimenti per quanto riguarda i due funtori covarianti L di \mathcal{C} in \mathcal{L} e T di \mathcal{L} in \mathcal{C} .

Basti qui ricordare che, assegnato che sia uno spazio topologico (E, τ) , da questo si deduce una struttura di convergenza (E, λ) attraverso il funtore L nel modo usuale; e viceversa, data una struttura di convergenza (E, λ) , si deduce da questa una topologia (E, τ) attraverso il funtore T che dichiara aperti tutti e soli gli insiemi A tali che ogni successione convergente ad un punto di A ha tutta una sua coda in A .

2. Categoria \mathcal{M} degli spazi pseudotopologici.

Rifacendoci a Čech ([4] pg. 237) diamo la seguente

DEFINIZIONE: un insieme E si dice *spazio pseudotopologico* (per Čech *closure space*; per Novák *closure topology*) se in E è definita una applicazione w dell'insieme dei sottoinsiemi di E in sè soddisfacente ai tre seguenti assiomi:

$$(K 0) \quad w \emptyset = \emptyset$$

$$(K 1) \quad A \subset wA \text{ per ogni } A \subset E$$

$$(K 2) \quad w(A \cup B) = wA \cup wB \text{ per ogni } A \subset E, B \subset E.$$

Lo spazio pseudotopologico lo indicheremo con (E, μ) dove μ indica la struttura che chiameremo *pseudotopologia* ed E l'insieme ambiente. L'applicazione wA (che taluni autori indicano talvolta con \widehat{A}) la chiameremo *pseudochiusura* dell'insieme A . Una classe di spazi pseudotopologici che non sono spazi topologici è quella che si ottiene a partire da una struttura di convergenza λ , assumendo come pseudochiusura la chiusura successionale.

OSSERVAZIONE. Se vale inoltre l'assioma

$$(K 3) \quad wA = wwA$$

lo spazio è uno spazio topologico e w è la chiusura.

DEFINIZIONE. Data una pseudotopologia (E, μ) diremo *pseudointorno di un punto x* di E ogni insieme $U (\subset E)$ tale che sia $x \notin w \in \mathcal{C}U$ (dove $\mathcal{C}U$ indica il complementare di U in E).

Si verifica allora facilmente che la famiglia di pseudointorni di un punto x costituisce un filtro.

DEFINIZIONE. Diremo *pseudointorno di un insieme A* ogni insieme che sia pseudointorno di ogni punto di A .

Così come per gli spazi topologici, si può definire la pseudotopologia mediante i filtri di pseudointorni, e precisamente: dato un insieme E , ad ogni punto x di E associamo un filtro \mathcal{U}_x , che diremo *filtro dei pseudointorni di x* , tale che x appartenga ad ogni insieme del filtro. Un tale insieme lo diremo *spazio pseudotopologico*. Anche qui, se si aggiunge l'assioma (U) per ogni $U \in \mathcal{U}_x$ esiste un $V \in \mathcal{U}_x$ tale che $V \subset U$ e tale che dall'essere $p \in V$ segue $V \in \mathcal{U}_p$, lo spazio è uno spazio topologico.

La verifica che si tratta di due definizioni equivalenti è abbastanza semplice e noi qui non la riportiamo. Notiamo che, assegnata la pseudotopologia mediante pseudointorni, la pseudochiusura di un insieme A è l'insieme dei punti x di E tali che in ogni pseudointorno di x cadano punti di A . (v. [3]).

OSSERVAZIONE. Anche per la pseudotopologia si può dare la definizione di *base* di pseudointorni di un punto x ; la perfetta analogia con il caso delle topologie ci esonera dal dare ulteriori chiarimenti.

Consideriamo ora la totalità delle pseudotopologie e vogliamo riguardarla come una categoria.

DEFINIZIONE. Dati due insiemi E_1, E_2 e date due pseudotopologie μ_1 e μ_2 rispettivamente in E_1 ed E_2 , con le pseudochiusure w_1 e w_2 , diremo che una *applicazione f* di E_1 in E_2 è *continua in un punto x* di E_1 se, dall'essere x appartenente a $w_1 A$ segue che $f(x)$ appartiene a $w_2 f(A)$. Diremo che f è *continua in E_1* se lo è in ogni punto di E_1 .

Tale definizione è equivalente alla seguente :

DEFINIZIONE. Una *applicazione* f è *continua in un punto* x di E_1 se, preso un pseudointorno U_2 di $f(x)$ in E_2 , si ha che $f^{-1}(U_2)$ è pseudointorno di x in E_1 .

DIMOSTRAZIONE. Valga la prima definizione. Sia U_2 pseudointorno di $f(x)$ in E_2 e supponiamo per assurdo che $f^{-1}(U_2)$ non sia pseudointorno di x in E_1 . Ciò significa che $x \in w_1 \mathcal{C}f^{-1}(U_2)$; ma allora si ha che, per la prima definizione, $f(x) \in w_2 f(\mathcal{C}f^{-1}(U_2)) \subset \subset w_2 \mathcal{C}U_2$ contro l'ipotesi che U_2 sia pseudointorno di $f(x)$ in E_2 .

Viceversa valga la seconda definizione. Sia $x \in w_1 A$ e supponiamo che $f(x) \notin w_2 f(A)$. Allora $\mathcal{C}f(A)$ sarebbe pseudointorno di $f(x)$ e quindi $f^{-1}(\mathcal{C}f(A))$ sarebbe pseudointorno di x . Allora $x \notin w_1 \mathcal{C}f^{-1}(\mathcal{C}f(A))$ e siccome $f^{-1}(\mathcal{C}f(A)) \subset \subset \mathcal{C}A$ si avrebbe $w_1 \mathcal{C}f^{-1}(\mathcal{C}f(A)) \supset \supset wA$ ossia x non apparterebbe a wA , contro l'ipotesi. Da ciò segue la tesi.

Allora si può riguardare come oggetto (E, μ) ogni insieme E dotato di una pseudotopologia μ e come mappa $f: (E_1, \mu_1) \rightarrow (E_2, \mu_2)$ ogni applicazione di E_1 in E_2 la quale sia continua nel senso detto sopra. Si verifica facilmente che questa è una categoria: la indicheremo con \mathcal{M} .

Evidentemente \mathcal{M} è una sottocategoria completa di \mathcal{C} : le topologie rientrano infatti fra le pseudotopologie, e la definizione precedentemente data di applicazione continua risulta, per le topologie, quella usuale.

Per ogni fissato insieme sostegno E la totalità delle pseudotopologie su E può pensarsi ordinata intendendo che

$$\mu_1 < \mu_2 \quad (\text{meno fine})$$

se $w_1 A \supset \supset w_2 A$ qualunque sia A sottoinsieme di E . Si ha poi che, assegnate in E due pseudotopologie μ_1 e μ_2 , l'applicazione identica è continua fra (E_1, μ_1) ed (E_2, μ_2) se e solo se $\mu_1 > \mu_2$.

In tale ordine vi sono due elementi estremi: la pseudotopologia meno fine di tutte che è quella per cui $wA = E$ qualunque sia A , sottoinsieme di E , non vuoto e la pseudotopologia più fine di tutte che è quella per cui $wA = A$ per ogni A . Si osservi che entrambe godono della (K 3) e quindi sono topologie.

3. I funtori M ed N .

Data, su un insieme E , una struttura di convergenza λ , vogliamo da essa dedurre mediante una legge M una pseudotopologia μ . Definiamo la pseudochiusura in E al seguente modo :

(M) dato $A (\subset E)$ sia wA l'insieme dei punti limite di successioni di punti di A .

E' immediato verificare che questa è una pseudochiusura e che, pur di intendere che $M(f)$ sia, nella categoria \mathcal{M} , la stessa applicazione f tra E_1 ed E_2 , M è un funtore covariante della categoria \mathcal{L} nella categoria \mathcal{M} .

DEFINIZIONE. Date due strutture di convergenza sul medesimo insieme E , λ_1 e λ_2 , diremo che λ_1 è *meno fine* di λ_2 e scriveremo $\lambda_1 < \lambda_2$ se dall'essere una successione λ_2 -convergente verso un punto p essa lo è anche nella λ_1 . Si ha allora che

$$\lambda_1 < \lambda_2 \implies M(\lambda_1) < M(\lambda_2)$$

ossia il funtore M è monotono.

DEFINIZIONE. Date due topologie su un medesimo insieme E , τ_1 e τ_2 , diremo che τ_1 è *meno fine* di τ_2 (e scriveremo $\tau_1 < \tau_2$) se dall'essere U un intorno di un punto x nella τ_1 segue che è intorno di x anche nella τ_2 .

Sia ora (E, μ) uno spazio pseudotopologico e si voglia dedurre da questo una topologia τ in E che sia la più fine fra quelle che sono meno fini della μ , ossia fra quelle per cui ogni intorno sia un pseudointorno nella μ . Il Novák ([3]) ha dimostrato che ciò è sempre possibile ed ha anche dato il procedimento per ottenere la chiusura in τ . Sia $A (\subset E)$ e consideriamo la pseudochiusura wA ; considerando ora la pseudochiusura di wA si ottiene $wwA = w^2A$ e, iterando l'operazione, si ottiene la successione

$$wA \subset w^2A \subset \dots \subset w^nA \subset \dots$$

dove con $w^n A$ si intende ovviamente la n -sima pseudochiusura di A . Si definisce poi, per ogni ordinale $\eta (> 0)$

$$w^\eta A = w \bigcup_{\alpha < \eta} w^\alpha A$$

e in questo modo la successione si estende agli ordinali transfiniti

$$A \subset wA \subset w^2A \subset \dots \subset w^n A \subset \dots \subset w^\omega A \subset \dots \subset w^\eta A \subset \dots \subset w^\Omega A \subset \dots$$

dove con ω ed Ω si è indicato rispettivamente il minimo ordinale della potenza del numerabile ed il minimo del non numerabile. Novák dimostra allora il seguente teorema: ([3], cor. 1)

Dato uno spazio pseudotopologico (E, μ) , sia \mathfrak{m} la potenza di E ed \aleph_α un numero cardinale regolare ⁴⁾ maggiore di \mathfrak{m} ; allora w^{ω_α} è la chiusura della topologia $\bar{\tau}$ più fine fra le meno fini di μ .

La legge che, dato (E, μ) ci fa ottenere nel modo precedente la topologia $(E, \bar{\tau})$ la indichiamo con N . Pur di intendere che $N(f)$ sia, nella categoria \mathcal{C} , la stessa applicazione f fra E_1 ed E_2 , N è un funtore covariante della categoria \mathcal{M} nella categoria \mathcal{C} .

Nel nostro lavoro rivestirà particolare interesse il risultato ottenuto da Novák nel corollario 2 del suo lavoro, risultato ottenuto anche da Dolcher, per via diretta ([2] pg. 86), che qui rinunciamo:

Sia (E, μ) una pseudotopologia. Per ogni $A (\subset E)$ e per ogni punto $x \in wA$, ci sia un sottoinsieme B di A numerabile tale che x appartenga a wB . Allora si ha $\bar{A} = wA$ dove con \bar{A} indichiamo la chiusura in $N(\mu)$.

Sia allora (E, λ) una struttura di convergenza e sia $(E, M(\lambda))$ la pseudotopologia dedotta. Essa, come è facile verificare, soddisfa alle ipotesi di quest'ultimo corollario. Allora si ha $w^\Omega A = \bar{A}$ per ogni $A \subset E$, dove con \bar{A} è indicata la chiusura in $(E, NM(\lambda))$.

Abbiamo così visto che, data (E, λ) , si deduce attraverso i funtori M ed N una topologia $NM(\lambda)$ in E ; d'altra parte attraverso il funtore T si deduce un'altra topologia $T(\lambda)$. Si ha allora che:

$$T = NM.$$

⁴⁾ Per la definizione di potenza regolare vedi ad esempio [4] a pagina 405.

DIMOSTRAZIONE. Sia B un insieme chiuso in $(E, T(\lambda))$. Allora si ha $B = wB$ e quindi $B = w^2B$. Viceversa sia B chiuso in $(E, NM(\lambda))$; questo significa che $B = w^2B$; ma allora $B = wB$ che è la tesi.

Possiamo allora schematizzare questi risultati con il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ \mathcal{L} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C} \\ & L & \\ M & \searrow & \mathcal{M} \nearrow N \end{array}$$

4. Spazi di Fréchet e di Fréchet generalizzati.

Appare ora evidente che il problema di determinare quegli spazi topologici che sono perfettamente individuati dalle loro successioni convergenti e che si era visto essere tutti e soli quelli che soddisfacevano l'equazione $TL(\tau) = \tau$, si può ora porre mediante la nuova equazione

$$NML(\tau) = \tau.$$

Tali spazi vengono detti «sequential topological spaces» dal Franklin, «full spaces» dal Davison ([5]), «topologie deducibili da convergenze» dal Dolcher.

DEFINIZIONE. Sia (E, μ) uno spazio pseudotopologico. Diremo α -pseudointorno (o pseudointorno di ordine α) di un punto x un insieme U tale che $x \notin w^\alpha \mathcal{C}U$.

Diremo α -pseudointorno di un insieme A ($\subset E$) un α -pseudointorno di ogni suo punto.

La totalità degli α -pseudointorni di un punto costituisce, come subito si vede, un filtro. Per $\alpha < \beta$, il filtro \mathcal{F}_x^α evidentemente è più fine di \mathcal{F}_x^β .

DEFINIZIONE. Sia (E, μ) uno spazio pseudotopologico. Diremo *ordine dello spazio* il minimo ordinale η tale che $w^\eta A = \overline{A}$ o, che è lo stesso, $w^\eta A = w^{\eta+1}A$ qualunque sia A ($\subset E$).

Si ha allora il seguente

TEOREMA. *Uno spazio pseudotopologico (E, μ) è di ordine η se e solo se ogni η -pseudointorno è intorno nella topologia $N(\mu)$ e, per ogni $\eta' < \eta$, esiste un η' -pseudointorno che non è intorno in $N(\mu)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia (E, μ) di ordine η ossia, per ogni $A (\subset E)$, sia $w^\eta A = \bar{A}$. Sia $U_x^{(\eta)}$ un η -pseudointorno di x . Allora $x \notin w^\eta \mathcal{C}U_x^{(\eta)} = \overline{\mathcal{C}U_x^{(\eta)}}$. Ma quest'ultimo insieme è chiuso ed allora $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{C}U_x^{(\eta)}})$ è intorno di x ed è contenuto in $U_x^{(\eta)}$ che risulta quindi intorno di x . Sia $\eta' < \eta$; ci sarà allora un insieme $A (\subset E)$ tale che $w^{\eta'} A \not\subset w^\eta A$; allora esiste un punto x tale che $x \in w^\eta A$, $x \notin w^{\eta'} A$; sia $U_x^{(\eta')} = \mathcal{C}A$. Esso è evidentemente un η' -pseudointorno di x , ma non ne è intorno. Viceversa dimostriamo che $\bar{A} = w^\eta A$, ossia che $\bar{A} \subset w^\eta A$. Sia $x \notin w^\eta A$, allora $\mathcal{C}A$ è un η -pseudointorno di x e come tale un intorno. Ma allora x non appartiene ad \bar{A} che è la tesi. Che poi η sia il minimo ordinale è immediato.

DEFINIZIONE. Diremo *ordine di uno spazio topologico (E, τ)* l'ordine α dello spazio pseudotopologico $(E, ML(\tau))$. In particolare sono di ordine 1 gli spazi topologici per i quali la chiusura successionale è idempotente. Nel caso poi in cui la chiusura w^α coincida con la chiusura in τ diremo che (E, τ) è *spazio di Fréchet generalizzato di ordine α* . Se l'ordine dello spazio di Fréchet generalizzato è 1, lo spazio lo chiameremo semplicemente di Fréchet in accordo con Franklin ed altri.

Ovviamente sono deducibili da strutture di convergenza tutti e soli gli spazi di Fréchet generalizzati.

Si constata subito che uno spazio topologico (E, τ) è di Fréchet generalizzato di ordine α se e solo se, per ogni $x \in E$, ogni α -pseudointorno è anche intorno nella topologia τ ed esiste, per ogni $\alpha' < \alpha$, un α' -pseudointorno che non è intorno in τ .

Sarà spesso utile considerare gli spazi di Fréchet generalizzati basandosi su quest'ultima definizione.

5. Una condizione necessaria e sufficiente.

Vogliamo ora dare una condizione necessaria e sufficiente affinché uno spazio topologico sia di Fréchet di ordine α . Pur essendo possibile dare un'unica dimostrazione di questo teorema, noi lo dimostreremo in due parti e precisamente prima nel caso di $\alpha = 1$ e poi nel caso di α qualunque.

TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché uno spazio topologico (E, τ) sia di Fréchet è che il filtro degli intorni di un punto generico x sia l'intersezione²⁾ di una famiglia di filtri a base numerabile.*

DIMOSTRAZIONE. Dire che uno spazio è di Fréchet è equivalente a dire che ogni pseudointorno nella pseudotopologia $ML(\tau)$ è un intorno nella topologia τ . Supponiamo allora che lo spazio sia di Fréchet, ossia che ogni pseudointorno sia un intorno; preso un punto qualunque x di E , consideriamo la totalità delle successioni convergenti ad x ed i filtri aventi per base le code delle successioni con aggiunto il punto x ; consideriamo poi l'intersezione di questi filtri.

Ogni insieme del filtro intersezione è un pseudointorno di x e quindi, per l'ipotesi, un intorno; inoltre ogni altro intorno di x contiene un insieme del filtro intersezione che risulta così essere il filtro degli intorni di x .

Viceversa sia V_x un pseudointorno di x , ma non un intorno.

Essendo il filtro \mathcal{U}_x degli intorni di x l'intersezione di filtri a base numerabile, V_x non può appartenere a tutti i filtri; ossia c'è almeno un filtro \mathcal{F} , fra quanti danno luogo all'intersezione, a cui V_x non appartiene. Allora in ogni insieme F di \mathcal{F} ci sono dei punti che non appartengono a V_x . Ma allora, essendo \mathcal{F} a base numerabile, esso ammette una base numerabile ordinata per inclusione (bastando all'uopo prendere il primo insieme, poi l'intersezione dei primi due e così via): $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ e per ogni F_n c'è un

²⁾ Diremo filtro intersezione di una famiglia di filtri quello che ha come insiemi quelli che appartengono contemporaneamente a tutti i filtri.

punto x_n di F_n che non appartiene a V_x . Allora la successione $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ converge ad x senza terminare in V_x , il che è assurdo; col che il teorema resta dimostrato.

DEFINIZIONE. In uno spazio pseudotopologico (E, μ) diremo α -pseudointorno di un filtro \mathcal{F} il filtro i cui insiemi sono gli α -pseudointorni degli insiemi del filtro \mathcal{F} .

Enunciamo a questo punto il seguente

TEOREMA. *Uno spazio topologico (E, τ) è di Fréchet generalizzato di ordine α se e solo se, comunque si prenda un punto x di E , il filtro \mathcal{U}_x degli intorni di x è l'intersezione degli η -pseudointorni per ogni $\eta < \alpha$ del filtro \mathcal{F}_x intersezione di una famiglia di filtri $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ a base numerabile con nucleo contenente x e non esiste alcun ordinale $\bar{\alpha} < \alpha$ per cui valga la suddetta proprietà.*

PREMESSE ALLA DIMOSTRAZIONE. L'enunciato del teorema si può anche, tenuto conto del teorema di cui al n° 4, porre al seguente modo:

In uno spazio topologico le due seguenti proposizioni sono equivalenti:

- (I_a) Ogni α -pseudointorno di un punto x qualunque è intorno nella topologia τ .
- I) (I_b) Non esiste alcun $\bar{\alpha} < \alpha$ per cui valga la (I_a).
- (II_a) Il filtro \mathcal{U}_x degli intorni di un punto x qualunque è l'intersezione degli η -pseudointorni, per ogni $\eta < \alpha$, del filtro \mathcal{F}_x intersezione di una famiglia di filtri $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ a base numerabile con nucleo contenente x .
- II) (II_b) Non esiste alcun $\bar{\alpha} < \alpha$ per cui valga la (II_a).

La dimostrazione procederà per induzione e precisamente: per $\alpha = 1$ il teorema è vero; ammesso vero per ogni ordinale minore di α dimostreremo che dalla proposizione (I) segue la (II_a); chè se poi non seguisse la (II_b), ci sarebbero degli ordinali $\eta < \alpha$ per cui varrebbe la (II_a) ed allora, preso il minimo, $\bar{\alpha}$, di questi η , si avrebbe

che lo spazio, per aver ammesso vero il teorema per $\bar{\alpha} < \alpha$, sarebbe di Fréchet di ordine $\bar{\alpha}$, ossia sarebbe vera la (I) relativamente ad $\bar{\alpha}$, il che è assurdo.

Analogamente viceversa basta dimostrare che dalla proposizione (II) segue la (I_a); chè se non seguisse la (I_b), lo spazio sarebbe di Fréchet di ordine $\bar{\alpha} < \alpha$ e quindi la seconda proposizione, per aver ammesso vero il teorema per $\bar{\alpha} < \alpha$, non sarebbe vera.

Passiamo ora alla

DIMOSTRAZIONE. Distingueremo il caso di α ordinale limite dal caso di α ordinale isolato e daremo la dimostrazione in due parti.

Sia α ordinale limite: dimostriamo che dalla (I) segue la (II_a):

Preso un punto $x \in E$, consideriamo la totalità delle successioni convergenti ad x e quindi i filtri aventi come sistema generatore le code (a cui si aggiunga il punto x) di una successione convergente ad x e infine l'intersezione \mathcal{F}_x di questi filtri. Sia ora $\mathcal{U}_x^{(\eta)}$ il filtro η -pseudointorno di \mathcal{F}_x e sia \mathcal{U}_x uguale all'intersezione dei filtri $\mathcal{U}_x^{(\eta)}$ al variare di $\eta < \alpha$. Sia $U \in \mathcal{U}_x$; verifichiamo che dall'essere U η -pseudointorno di un certo insieme $F \in \mathcal{F}_x$ per ogni $\eta < \alpha$, segue che è anche α -pseudointorno di x : infatti si ha $\bigcup_{\eta < \alpha} w^\eta (\mathcal{C} U \cap F) = \emptyset$ da cui segue, poichè in $\mathcal{C} F$ non ci sono successioni convergenti ad x , $x \notin w \bigcup_{\eta < \alpha} w^\eta \mathcal{C} U = w^\alpha \mathcal{C} U$, ossia U è α -pseudointorno di x ; e allora per la (I) U è intorno di x . Abbiamo così trovato un filtro \mathcal{U}_x costruito nel modo voluto e fatto tutto di intorni di x . Inoltre ogni intorno U' di x è di questo tipo. Infatti contenendo una coda di ogni successione convergente ad x ed essendo un intorno di ciascuna, U' è anche un loro ϑ -pseudointorno con ϑ ordinale qualunque e quindi anche un loro η -pseudointorno per ogni $\eta < \alpha$.

Viceversa dimostriamo che dalla (II) segue la (I_a):

Supponiamo ci sia un α -pseudointorno U di x che non sia intorno di x in τ , ossia non sia η -pseudointorno per ogni $\eta < \alpha$ di alcun insieme $F \in \mathcal{F}_x$. Esiste allora almeno un filtro \mathcal{F}_i fra quanti formano l'intersezione \mathcal{F}_x tale che U non è η -pseudointorno per ogni $\eta < \alpha$ di alcun insieme $F \in \mathcal{F}_i$. Siccome \mathcal{F}_i ha base numerabile, se ne può estrarre una base di insiemi ordinati per inclusione:

$F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$. Per ciascun F_n esisterà un ordinale $\eta_n < \alpha$ tale che U non è η_n -pseudointorno di F_n . Allora esiste un punto $x_n \in F_n$ tale che $x_n \in w^{\eta_n} \mathcal{C}U$ e quindi, per ogni n , $x_n \in \bigcup_{\eta < \alpha} w^\eta \mathcal{C}U$. Si ha inoltre che la successione $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ converge ad x nella topologia τ per come sono fatti gli intorni e quindi si ha che

$$x \in w \bigcup_{\eta < \alpha} w^\eta \mathcal{C}U = w^\alpha \mathcal{C}U$$

da cui segue che U non è α -pseudointorno di x che è la tesi.

Sia α ordinale isolato; in questo caso la proposizione (II_a) si può enunciare al seguente modo:

(II_a) Il filtro \mathcal{U}_x degli intorni di un generico punto x è l' $(\alpha - 1)$ -pseudointorno del filtro \mathcal{F}_x intersezione di una famiglia di filtri $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ a base numerabile con nucleo contenente x .

La dimostrazione seguirà pari pari il ragionamento precedente. Nella prima parte si prenderà \mathcal{U}_x come il filtro $(\alpha - 1)$ -pseudointorno di \mathcal{F}_x . Ed allora \mathcal{U}_x sarà α -pseudointorno di x com'è immediato verificare.

Nella seconda parte si supporrà esistere un α -pseudointorno U di x che non è intorno, ossia non è $(\alpha - 1)$ -pseudointorno di alcun $F \in \mathcal{F}_x$. Esisterà allora un filtro \mathcal{F}_i tale che U non è $(\alpha - 1)$ -pseudointorno di alcun $F \in \mathcal{F}_i$.

Preso una base di \mathcal{F}_i ordinata per inclusione $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$, sia $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ la successione dei punti relativi appartenenti rispettivamente ad $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ tali che $x_n \in w^{(\alpha-1)} \mathcal{C}U$. Ma allora, poichè la successione $\{x_n\}$ converge ad x , si ha che $x \in ww^{(\alpha-1)} \mathcal{C}U = w^\alpha \mathcal{C}U$ e quindi U non è α -pseudointorno di x . Col che il teorema rimane completamente dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. P. FRANKLIN, *Spaces in which sequences suffice*; Fund. Math. Vol. 57 (1965) p. 107-115.
- [2] M. DOLCHER, *Topologie e strutture di convergenza*; Ann. della Scuola Norm. Sup. di Pisa, serie III, vol. XIV (1960), p. 63-92.
- [3] J. NOVÁK, *On some problems concerning multivalued convergences*; Czech. Math. Journ. Vol. 14 (89), (1964), p. 548-561.
- [4] E. ČECH, *Topological spaces*; Publishing House, Praha; Interscience Publishers, London, 1966.
- [5] W. F. DAVISON, *Mosaic of compact metric spaces*; Trans. Amer. Math. Soc. 91 (1959), p. 525-546.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1-3-68.