

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE DE MARCO

**Una disuguaglianza sulle sezioni di insiemi
 H^k -rettificabili**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 40 (1968), p. 402-407

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__40__402_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNA DISUGUAGLIANZA SULLE SEZIONI DI INSIEMI H^k -RETTIFICABILI

GIUSEPPE DE MARCO *)

Se C è una curva piana continua semplice rettificabile, e $v_1(t, C)$ [$v_2(t, C)$] denota il numero, eventualmente infinito, dei punti $(x_1, x_2) \in C$ tali che $x_1 = t$ [$x_2 = t$], Banach (vedere [B]) dimostra che $v_1(t, C)$ e $v_2(t, C)$ sono integrabili e che risulta

$$\max \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(t, C) dt; \int_{-\infty}^{+\infty} v_2(t, C) dt \right\} \leq l(C).$$

dove $l(C)$ è la lunghezza della curva; e risulta anche subito che

$$l(C) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(t, C) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} v_2(t, C) dt.$$

In questo lavoro estendiamo queste disuguaglianze a classi di insiemi più generali, negli spazi euclidei R^n .

1. Saranno seguite, in linea di massima, le notazioni di Federer, [F 3]. Siano n, k, s interi, $1 \leq s \leq k \leq n$; sia H^k la misura k -dimen-

*) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica Applicata, Università di Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei raggruppamenti di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

sionale di Hausdorff in R^n ; per ogni numero naturale m , indichiamo con I_m l'insieme $\{1, \dots, m\}$ e se $1 \leq s \leq m$, indichiamo con $A(s, m)$ l'insieme delle applicazioni strettamente crescenti di I_s in I_m ; se $\lambda \in A(s, n)$ sia R^λ lo spazio generato dai vettori $\{e_{\lambda(i)} : i \in I_s\}$, dove $(e_1, \dots, e_n)$ è la base canonica di R^n ; p_λ sia la proiezione ortogonale di R^n su R^λ .

Un insieme $E \subset R^n$ si dice H^k -rettificabile se esiste una funzione lipschitziana $f: R^k \rightarrow R^n$ tale che $H^k(E - f(R^k)) = 0$.

Se E è H^k -misurabile, e di misura H^k σ -finita, la funzione $v_\lambda(t, E)$ definita su R^λ dalla formula $v_\lambda(t, E) = H^{k-s}(E \cap p_\lambda^{-1}\{t\})$ è H^s -misurabile (vedere [F 3], Theorem 3.1, part 2).

Dimostreremo che:

Se E è H^k -misurabile e H^k -rettificabile risulta:

$$(1) \quad \int_{R^\lambda} v_\lambda(t, E) dt \leq H^k(E) \quad \text{per ogni } \lambda \in A(s, n)$$

$$(2) \quad \binom{k}{s} H^k(E) \leq \sum_{\lambda \in A(s, n)} \int_{R^\lambda} v_\lambda(t, E) dt.$$

Per la (1), cfr. [F 2], 3. Questo autore considera il caso di E insieme arbitrario, ma a secondo membro compare allora un coefficiente maggiore di 1.

Ci serviremo del seguente risultato di Federer, [F3], Theorem 3.1:

Siano X, Y varietà di classe C^1 ; sia $\dim X = k \geq s = \dim Y$ se $f: X \rightarrow Y$ è lipschitziana, per ogni insieme H^k misurabile $A \subset X$ si ha:

$$\int_A Jf(x) dH^k x = \int_Y H^{k-s}(A \cap f^{-1}\{y\}) dH^s y$$

dove $Jf(x)$ è la norma della trasformazione lineare indotta da $Df(x)$ tra $\bigwedge_s E$ e $\bigwedge_s F$, essendo E ed F gli spazi direttori delle varietà lineari tangenti a X e Y nei punti x e $f(x)$, rispettivamente.

La funzione $Jf(x)$ è definita in tutti i punti in cui $Df(x)$ esiste, e cioè H^k -quasi ovunque in X , per teoremi noti sulle funzioni lipschitziane.

Prendendo in E e in F basi ortonormali, $Jf(x)$ è la radice quadrata della somma dei quadrati dei determinanti dei minori di ordine s della matrice di $Df(x)$ rispetto a queste basi.

Sia $\lambda \in A(s, n)$; applichiamo questo teorema al caso di $X \subset R^n$, $Y = R^\lambda$, $f = p_\lambda | X = \varphi_\lambda$; si ha, in base alla definizione di $v_\lambda(t, A)$

$$\int_{R^\lambda} v_\lambda(t, A) dt = \int_{R^\lambda} v_\lambda(t, A) dH^s t = \int_A J\varphi_\lambda(x) dH^k x.$$

Dimostriamo che per ogni $x \in X$ valgono le relazioni:

$$(3) \quad J\varphi_\lambda(x) \leq 1$$

$$(4) \quad \sum_{\lambda \in A(s, n)} J\varphi_\lambda(x) \geq \binom{k}{s}.$$

Sia T lo spazio direttore della varietà lineare $x + T$ tangente ad X nel punto x , sia $(u_1, \dots, u_k)$ una base ortonormale per T , completata da $(u_{k+1}, \dots, u_n)$ a base ortonormale di R^n .

Sia

$$u_j = \sum_{1 \leq i \leq n} e_i \alpha_i^j \quad 1 \leq j \leq n$$

la matrice $A = (\alpha_i^j)_{1 \leq i, j \leq n}$ è ortogonale e la matrice di $D\varphi_\lambda(x) = p_\lambda | T$ rispetto alle basi $(u_1, \dots, u_k)$ per T e $(e_{\lambda(1)}, \dots, e_{\lambda(s)})$ per R^λ è

$$(\alpha_{\lambda(i)}^j)_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq k}.$$

Se $\mu \in A(s, n)$, si ponga $A_\lambda^\mu = (\alpha_{\lambda(i)}^{\mu(j)})_{1 \leq i, j \leq s}$; allora

$$(5) \quad [J\varphi_\lambda(x)]^2 = \sum_{\mu \in A(s, k)} (\det A_\lambda^\mu)^2 \leq \sum_{\mu \in A(s, n)} (\det A_\lambda^\mu)^2.$$

Ora, per il teorema di Binet:

$$\sum_{\mu \in A(s, n)} (\det A_\lambda^\mu)^2 = \det(A_\lambda {}^t A_\lambda)$$

essendo $A_\lambda = (\alpha_{\lambda i}^j)_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq n}$, ${}^t A_\lambda$ la trasposta di A_λ ; per l'ortogonalità di A , $A_\lambda {}^t A_\lambda$ è la matrice unità di ordine s , quindi l'ultimo termine in (5) è uguale a 1.

La (3) è dimostrata; si ha allora $[J\varphi_\lambda(x)]^2 \leq J\varphi_\lambda(x)$ e da ciò

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in A(s, n)} J\varphi_\lambda(x) &\geq \sum_{\lambda \in A(s, n)} [J\varphi_\lambda(x)]^2 = \sum_{\lambda \in A(s, n)} \sum_{\mu \in A(s, k)} (\det A_\lambda^\mu)^2 = \\ &= \sum_{\mu \in A(s, k)} \sum_{\lambda \in A(s, n)} (\det A_\lambda^\mu)^2 = \sum_{\mu \in A(s, k)} \det({}^t A^\mu A^\mu) = \binom{k}{s} \end{aligned}$$

sfruttando nuovamente il teorema di Binet, l'ortogonalità della matrice A , avendo posto $A^\mu = (\alpha_i^{\mu(j)})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq s}$ e osservando che $A(s, k)$ ha $\binom{k}{s}$ elementi.

Quindi (1) e (2) seguono subito da (3) e (4), nel caso che l'insieme H^k -misurabile E sia contenuto in una varietà di classe C^1 .

Se E è H^k -rettificabile, esiste una successione $(X_i)_{i \in N}$ (N insieme dei naturali) di varietà di classe C^1 e un insieme M di misura H^k -nulla tali che:

$$E \subset \bigcup_{i \in N} X_i \cup M.$$

Posto:

$$A_i = E \cap (X_i - \bigcup_{0 \leq j < i} X_j); \quad B = E \cap M$$

si ha:

$$E = \bigcup_{i \in N} A_i \cup B$$

dove gli A_i sono a due a due disgiunti, sono contenuti in una varietà C^1 sono H^k -misurabili se tale è E , e $H^k(B) = 0$.

Ciascuno degli A_i verifica quindi (1) e (2), e sommando rispetto a $i \in N$ le disuguaglianze così ottenute, e ricordando che, in base a [F 2], n. 3 si ha:

$$\int_{R^\lambda} v_\lambda(t, B) dt = 0 \quad \text{per ogni} \quad \lambda \in A(s, n)$$

si giunge al risultato voluto.

2. Si osservi che se E è contenuto in una varietà lineare k -dimensionale parallela a un sottospazio coordinato k -dimensionale R^κ , $\kappa \in A(k, n)$ allora nella (1) vale il segno di uguaglianza per tutti e soli i $\lambda \in A(s, n)$ tali che $\lambda(I_s) \subset \kappa(I_k)$; infatti in tal caso $J(p_\lambda | R^\kappa)(x) = 1$ per ogni $x \in R^\kappa$ e il teorema precedentemente enunciato si riduce al teorema di Fubini; per tutti i $\lambda \in A(s, n)$ per cui $\lambda(I_s) \not\subset \kappa(I_k)$ il primo membro di (1) vale zero; quindi anche nella (2) vale il segno di uguaglianza.

Se si esce dalla classe degli insiemi H^k -rettificabili la (2) in generale non è più valida.

Si ponga per ogni $A \subset R^n$, $x \in R^n$:

$$\bar{\theta}^k(H^k, A, x) = \max \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{H^k(A \cap \{y \in R^n : |y - x| < r\})}{\alpha(k) r^k}$$

dove $\alpha(k)$ è la misura di Lebesgue in R^k dell'insieme $\{z : z \in R^k, |z| < 1\}$.

Sia poi G_n il gruppo delle isometrie lineari di R^n , Φ_n la misura di Haar su G_n tale che $\Phi_n(G_n) = 1$.

Si dimostra in [F 1], 9.6, che ogni $A \subset R^n$ che sia H^k -misurabile e tale che $H^k(A) < \infty$, si decompone nella riunione di tre insiemi misurabili e disgiunti, A_1, A_2, A_3 , dei quali A_1 è H^k -rettificabile, A_3 è tale che per ogni $x \in A_3$ si ha $\bar{\theta}^k(H^k, A, x) = 0$ oppure $\bar{\theta}^k(H^k, A, x) = \infty$, mentre A_2 non contiene sottoinsiemi H^k -rettificabili di misura positiva, ed è tale che

$$H^k(p_k \circ u(A_2)) = 0 \text{ per } \Phi_n\text{-quasi ogni } u \in G_n$$

p_k indicando la proiezione ortogonale di R^n sul sottospazio generato da $\{e_1, \dots, e_k\}$.

Esisterà quindi una isometria $w \in G_n$ tale che

$$H^k(p_\lambda \circ w(A_2)) = 0 \text{ per ogni } \lambda \in A(k, n)$$

perciò, nei casi in cui $H^k(A_2) > 0$, $k = s$, la (2) non è valida per l'insieme A_2 .

BIBLIOGRAFIA

S. BANACH

- [B] *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie*. Fund. Math. vol. VII (1925), pp. 225-236.

H. A. FEDERER

- [F 1] *The (Φ, k) -rectifiable subsets of n -space*. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 62 (1947), pp. 114-192.
- [F 2] *Some Integralgeometric Theorems*. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 77 (1954), pp. 238-261.
- [F 3] *Curvature measures*. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 93 (1959), pp. 418-491.

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 dicembre 1967