

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

CLAUDIO MARGAGLIO

**Sulla torsione in un prodotto tensoriale di  
moduli senza torsione**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 40 (1968), p. 325-346

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1968\\_\\_40\\_\\_325\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__40__325_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SULLA TORSIONE IN UN PRODOTTO TENSORIALE DI MODULI SENZA TORSIONE

di CLAUDIO MARGAGLIO \*)

## INDICE

- i. Introduzione.
- ii. Simboli e definizioni.
- n. 1. Premesse.
- n. 2. Rappresentazioni di  $t(M \otimes N)$  come quoziente di un modulo senza torsione.
- n. 3. Criteri per verificare se  $t(M \otimes N) = 0$  o  $\neq 0$ .
- n. 4. Alcuni casi nei quali  $t(M \otimes N)$  è sommando diretto di  $M \otimes N$ .
- n. 5 Ulteriori esempi ed applicazioni.
- Bibliografia.

## i. Introduzione.

Nel presente lavoro espongo alcuni risultati ottenuti in funzione dei seguenti obiettivi:

a) rappresentare convenientemente il sottomodulo di torsione  $t(M \otimes N)$  di un prodotto tensoriale (su un dominio d'integrità  $R$ )  $M \otimes N$  di due  $R$ -moduli di tipo finito e senza torsione;

b) verificare quando tale sottomodulo sia o non sia nullo;

c) verificare quando tale sottomodulo sia o non sia sommando diretto di  $M \otimes N$ .

---

\*) Indirizzo dell'A: Departamento de Matemáticas, Esc. de Ciencias, Universidad de Oriente, Cumaná, Venezuela.

Mi si sono presentate alcune situazioni non eccessivamente particolari nelle quali è possibile rispondere in modo soddisfacente alle domande poste.

Per esempio, se  $I$  è un ideale proprio di  $R$ , generato da una  $R$ -successione, allora risulta che  $I \otimes I$  è isomorfo con la somma diretta  $t(I \otimes I) \oplus I_2$ , ove  $t(I \otimes I)$  è a sua volta isomorfo con una somma diretta di moduli isomorfi con  $R/I$ .

## ii. Simboli e definizioni.

1.  $R$  dominio d'integrità, cioè anello commutativo con unità senza divisori propri dello zero.
2.  $R/R$  corpo dei quozienti di  $R$ .
3.  $\sim, \longleftrightarrow$  isomorfismo ( $R$ -lineare).
4.  $\rightarrow$  omomorfismo ( $R$ -lineare).
5.  $R^p$   $R$ -modulo libero ottenuto per somma diretta di  $p$  « copie » di  $R$ .
6.  $u_i$   $i$ -esimo elemento della base canonica di  $R^p$ :  $u_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $u_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $u_p = (0, 0, \dots, 0, 1)$ .
7.  $M^p$  modulo ottenuto per somma diretta di  $p$  « copie » di  $M$ .
8.  $t(M)$  sottomodulo di torsione di  $M$ .
9.  $rg(M)$  rango di  $M$  (= massimo numero di elementi linearmente indipendenti su  $R$ ).
10.  $M^*$  duale di  $M$ , ossia  $Hom_R(M, R)$ .
11.  $M \otimes N$  prodotto tensoriale su  $R$  (degli  $R$ -moduli  $M, N$ ).
12.  $MN$  immagine di  $M \otimes N$  in  $R^{pq}$ , essendo  $p = rg(M)$ ,  $q = rg(N)$ , ottenuta con il prodotto tensoriale di due iniezioni di  $M, N$  in  $R^p, R^q$ .
13.  $M_2$   $MN$  nel caso che  $M = N$ .
14.  $T.F.$  « di tipo finito » ossia finitamente generato (secondo il tipo di struttura).
15.  $n(M)$  numero minimo di generatori per  $M$ .
16.  $S^{-1}(M)$  modulo di frazioni di  $M$  con denominatori nella parte moltiplicativa  $S$ .
17.  $M_x$  localizzazione  $S^{-1}(M)$  di  $M$  rispetto all'ideale primo  $x$  di  $R$ , ( $S$  = complemento di  $x$  in  $R$ ).

18.  $h(I)$  altezza dell'ideale  $I$ .
19.  $dh(M)$  dimensione omologica di  $M$  (cfr. [18] pag. 134).
20.  $\text{Ann.}(M)$  annullatore di  $M$ .
21. *anello normale*: anello integralmente chiuso nel suo corpo dei quozienti.
22. *R-successione*: si dice che  $s$  elementi  $r_1, r_2, \dots, r_s$  di  $R$  formano (nell'ordine scritto) una  $R$ -successione, se  $r_1$  non è divisore dello zero e se per ogni  $i = 2, \dots, s$  si ha  $(r_1, \dots, r_{i-1}) : r_i = (r_1, \dots, r_{i-1})$ .
23. *R-successione incondizionata*: rimane  $R$ -successione anche permutando i suoi elementi.
24. *elemento ammissibile su  $R$*  o semplicemente *elemento  $R$ -ammissibile*: è un elemento  $\omega$  di  $R/R$  tale che l'ideale  $I_\omega = R : \omega$  abbia altezza maggiore di uno (con la convenzione che  $R$  stesso abbia altezza maggiore di qualunque fissato numero naturale).
25.  $R \in P.E.$  «  $R$  soddisfa alla proprietà di estensione » se ogni elemento  $R$ -ammissibile appartiene ad  $R$ . In [11] si dimostrò che particolari anelli che soddisfano alla proprietà di estensione sono i domini d'integrità:
  - a) di Macaulay;
  - b) noetheriani e normali;
  - c) localmente  $U.F.D.$  ovvero localmente a unica fattorizzazione).
26. *elemento ammissibile sopra un  $R$ -modulo  $M$*  (senza torsione), o *elemento  $M$ -ammissibile*: ogni elemento  $\omega$  di qualche sopra- $R$ -modulo senza torsione  $N$  di  $M$ , tale che  $h(I_\omega) = h(M : \omega) > 1$ .
27.  $M \in P.E.$  «  $M$  soddisfa alla proprietà di estensione » se ogni elemento  $M$ -ammissibile appartiene ad  $M$ .

## n. 1. Premesse.

1.1 Per ogni  $R$ -modulo  $M$  di  $T.F.$  esiste una sequenza esatta del tipo:

$$0 \rightarrow t(M) \rightarrow M \rightarrow R^p$$

ove  $p = rg(M)$ .

(cfr. [4] pag. 130 prop. 2.1, prop. 2.4).

1.2 Definizione:  $t_2(M)$ 

per ogni  $R$ -modulo  $M$  indicheremo con  $t_2(M)$  il sottomodulo di  $M$  costituito con quegli elementi il cui annullatore abbia altezza  $> 1$ , e lo chiameremo *sottomodulo di torsione ammissibile*.

1.3 Se  $R \in P.E.$  e se anche l' $R$ -modulo  $M$  soddisfa alla proprietà di estensione, allora nella sequenza esatta:

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} F \rightarrow 0$$

risulta:  $N \in P.E.$  se e solo se  $t_2(F) = 0$ .

Infatti ogni elemento  $m \in M$  che sia  $\alpha(N)$ -ammissibile ha immagine  $\alpha(m) \in t_2(F)$ , giacchè l'ideale  $I_{N,m} = N : m$  coincide con l'annullatore di  $\beta(m)$ .

1.4 OSSERVAZIONE. Se  $M$  è  $R$ -modulo di  $T.F.$ , esistono ideali primi  $x \subset R$  tali che le localizzazioni  $M_x$  siano  $R_x$ -isomorfe con  $R_x$ -moduli liberi  $R_x^p$ .

Una dimostrazione di ciò si può ottenere con il metodo che si segue in [5] per la dimostrazione della proposizione 8, a pag. 211, ricordando (cfr. [20]) la classica corrispondenza funtoriale tra  $R$ -moduli e fasci di  $R$ -moduli.

1.5 Ricordiamo che nel caso particolare nel quale  $R$  sia isomorfo con l'anello delle coordinate di una varietà algebrica irriducibile, affine normale sopra un certo corpo  $K$  commutativo e algebricamente chiuso, la proprietà 1.4 si può rafforzare, giacchè allora: ogni  $R$ -modulo di tipo finito e senza torsione ha localizzazioni  $R_x$ -libere per tutti gli ideali primi di  $R$  che non contengano un certo ideale  $I(M)$  di altezza  $> 1$ . (cfr. [1], [2]).

Sostituendo la ipotesi su  $R$  con un'altra equivalente (cfr. [20] pag. 240), si ottiene anche:

ogni  $R$ -modulo di  $T.F.$  e senza torsione, su un dominio d'integrità  $R$  che sia dotato di una naturale struttura di  $K$ -algebra di  $T.F.$  e integralmente chiusa nel suo corpo dei quozienti, ha localizzazioni  $R_x$ -libere per tutti gli ideali primi di  $R$  che non contengano un certo ideale  $I(M)$  di altezza  $> 1$ .

NOTA. Per varietà non normali (ovvero anelli  $R$  non integralmente chiusi nel loro corpo dei quozienti) la proprietà non resta più

necessariamente valida. Per esempio, considerando l'anello quoziente  $K[X, Y]/(Y^2 - X^3)$ , l'ideale  $I$  in esso generato dagli elementi  $[X]$ ,  $[Y]$  ha localizzazione non  $R_x$ -libera sull'ideale primo  $x = I$  la cui altezza è uno; in questo caso non esistono ideali propri di altezza  $> 1$  e pertanto se restasse valida la tesi della proprietà più sopra enunciata, ogni localizzazione dovrebbe risultare libera.

1.6 Nelle stesse ipotesi di 1.5 risulta:

$t_2(M \otimes N) = t(M \otimes N)$  per ogni coppia di  $R$ -moduli  $M, N$  senza torsione e di  $T.F.$  giacchè il prodotto tensoriale  $M_x \otimes N_x$  di due  $R_x$ -moduli liberi non ha torsione.

NOTA. Con riferimento alla nota del n. 1.5, si ha:

$$t(I \otimes I) \neq 0, \quad t_2(I \otimes I) = 0, \quad (\text{cfr. 3.3}).$$

1.7 Una conseguenza di 1.3, 1.5 è la seguente:

*Se  $R$  è un dominio d'integrità dotato di una naturale struttura di  $K$ -algebra di tipo finito e normale, allora, dati tre  $R$ -moduli senza torsione  $H, M, N$  di  $T.F.$  tali che:*

a) *sia esatta la sequenza  $0 \rightarrow N \rightarrow R^p \rightarrow M \rightarrow 0$ ;*

b)  *$t(N \otimes H) = 0$ ;*

*risulta:*

$$N \otimes H \in P.E. \text{ se e solo se } t(M \otimes H) = 0.$$

1.8 OSSERVAZIONE. Se  $F, M$  sono  $R$ -moduli e  $t(M) = 0$  e se l'omomorfismo  $F \xrightarrow{\varphi} M$  possiede per lo meno una localizzazione  $\varphi_x$  iniettiva, allora:

$$Nc(\varphi) = t(F).$$

Infatti:

sempre, se  $t(M) = 0$ , si ha che  $\varphi(t(F)) = 0$ , giacchè  $\varphi(r \cdot f) = r \cdot \varphi(f) = 0$ , con  $r \neq 0$  implica  $\varphi(f) = 0$ ;

viceversa, se  $\varphi(f) = 0$  e se  $\varphi_x$  è iniettivo, si ha:

$\varphi_x(f_x) = 0$  implica  $f_x = f_x/1 = 0$  ossia  $s \cdot f = 0$  per qualche  $s \in S = R \setminus x$  e pertanto  $f \in t(F)$ .

1.9 Data una iniezione di  $R$ -moduli senza torsione  $M \xrightarrow{\varphi} F$  ed un  $R$  modulo  $N$  di  $T.F.$  tale che:

$$t(N) = 0, \quad t(F \otimes N) = 0,$$

*allora è esatta la sequenza :*

$$0 \rightarrow t(M \otimes N) \xrightarrow{j} M \otimes N \xrightarrow{(\varphi \otimes \text{id})^N} F \otimes N$$

*e risulta pertanto :*

$$t(M \otimes N) \approx Nc(\varphi \otimes N).$$

Infatti :

esiste un ideale primo  $x$  di  $R$  (cfr. 1.4) tale che  $N_x \approx R_x^p$  e di conseguenza a partire dal seguente diagramma commutativo :

$$\begin{array}{ccc} (M \otimes N)_x & \xrightarrow{(\varphi \otimes \text{id})^N_x} & (F \otimes N)_x \\ \uparrow & & \uparrow \\ M_x \otimes R_x^p & \xrightarrow{(\varphi_x \otimes \text{id})^{R_x^p}} & F_x \otimes R_x^p \end{array}$$

si deduce che  $(\varphi \otimes N)_x$  è iniettivo, giacchè tale è  $\varphi_x \otimes R_x^p$ .

Pertanto risulta (cfr. 1.8),  $Nc(\varphi \otimes N) = t(M \otimes N)$ .

1.10 Ricordiamo un'altra importante proprietà (cfr. [10]):

*Se  $P, P'$  sono  $R$ -moduli proiettivi e se si hanno due sequenze esatte :*

$$0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow N' \rightarrow P' \rightarrow M' \rightarrow 0$$

*ove  $t(M) = t(M') = 0$ , allora :*

$$t(M \otimes N') \approx t(M' \otimes N).$$

NB. La ipotesi che  $M, M'$  siano privi di torsione è essenziale (cfr. per esempio 5.6).

Una verifica elementare della proprietà in questione si può ottenere facilmente applicando il cosiddetto « teorema del diagramma

del serpente » al diagramma commutativo ed esatto

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow & \frac{N \otimes N'}{t(N \otimes N')} & \rightarrow & P \otimes N' & \rightarrow & M \otimes N' & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow g_1 & & \downarrow g_2 & & \downarrow g_3 & \\
 0 \rightarrow & N \otimes P' & \rightarrow & P \otimes P' & \rightarrow & M \otimes P' & \rightarrow 0
 \end{array}$$

ottenendone la sequenza esatta :

$$0 \rightarrow Nc(g_1) \rightarrow Nc(g_2) \rightarrow Nc(g_3) \rightarrow Cnc(g_1) \rightarrow Cnc(g_2) \rightarrow Cnc(g_3) \rightarrow 0$$

che nel nostro caso si particolarizza in :

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow t(M \otimes N') \rightarrow (N \otimes M') \xrightarrow{\psi} (P \otimes M') \rightarrow (M \otimes M') \rightarrow 0$$

e mostra che  $t(M \otimes N') \approx Nc(\psi) \approx t(N \otimes M')$ , giacchè  $t(P \otimes M') = 0$ .

1.11 Siano  $F, G$  due  $R$ -moduli di  $T$ .  $F$ ., senza torsione, con rango  $p, q$ , rispettivamente ; siano  $\varphi_F: F \rightarrow R^p$ ,  $\varphi_G: G \rightarrow R^q$  due iniezioni (cfr. 1.1) :

indicheremo allora con  $FG$  la immagine di  $\varphi_F \otimes \varphi_G$  in  $R^{pq} \approx R^p \otimes R^q$ .

Per quanto visto in 1.8, 1.9 si ha allora la sequenza esatta :

$$0 \rightarrow t(F \otimes G) \rightarrow F \otimes G \rightarrow FG \rightarrow 0.$$

NOTA. Se  $F$  è un ideale di  $R$  allora  $FG$  risulta isomorfo con la immagine in  $R^q$  dell'omomorfismo :

$$F \otimes G \xrightarrow{\varphi} G \rightarrow R^q,$$

essendo  $\varphi$  definito con  $\varphi(f \otimes g) = f \cdot g$ .

Se  $F = G$  scriveremo  $F_2$  invece che  $FG$  ;

Analogamente, se  $F = G$  e  $n > 1$ , indicheremo con  $F_n$  il modulo  $F_{n-1} G$ .

1.12 Dato un omomorfismo suriettivo  $R^s \xrightarrow{\varphi} M$  e considerato un ideale primo  $x$  in  $R$ , si ha che :

$(Nc(\varphi))_x \subseteq xR_x^s$  se e solo se le immagini degli elementi  $u_i$  della base canonica di  $R^s$  formano un sistema minimale di generatori per  $M_x$ .

Infatti :

sia  $m_i = \varphi(u_i)$  e sia  $m_i/1$  l'elemento che corrisponde ad  $m_i$  in  $M_x$  ;  
 Se  $\{m_1/1, \dots, m_s/1\}$  non è un sistema minimale di generatori per  $M_x$  ;  
 allora per esempio sarà  $m_1/1 = -({}_2^s \sum_i \xi_i (m_i/1)$ , con  $\xi_i \in R_x$  ed ovviamente  $(1, \xi_2, \dots, \xi_s)$  è un elemento di  $(Nc(\varphi))_x$  che non appartiene ad  $xR_x^s$ , giacchè la sua prima coordinata è 1 ;

Viceversa :

se  $(\xi_1, \dots, \xi_s) \in (Nc(\varphi))_x$  e per esempio  $\xi_1 \notin xR_x$ , allora  $\xi_1 = r_1/s_1$ , con  $r_1, s_1 \notin x$  ed allora  $m_1/1 = -(s_1/r_1)({}_2^s \sum_i \xi_i (m_i/1)$ .

1.13 OSSERVAZIONE. Se per gli omomorfismi suriettivi  $\varphi: R^s \rightarrow M$ ,  $\psi: R^t \rightarrow N$  risulta

$$(Nc(\varphi))_x \subseteq xR_x^s, (Nc(\psi))_x \subseteq xR_x^t,$$

allora di conseguenza :

$$(Nc(\varphi \otimes \psi))_x \subseteq xR_x^{st}.$$

Dunque (cfr. ii def. 15) sussiste la relazione :

$$n((M \otimes N)_x) = n(M_x) \cdot n(N_x).$$

Infatti :

$Nc(\varphi \otimes \psi)$  si può generare per mezzo delle immagini degli omomorfismi :

$$Nc(\psi) \otimes R^s \rightarrow R^t \otimes R^s, R^t \otimes Nc(\varphi) \rightarrow R^t \otimes R^s,$$

(cfr. [18] pag. 41, teor. 4) ;

perciò, giacchè la ipotesi su  $(Nc(\varphi))_x, (Nc(\psi))_x$  implica :

$$(Nc(\psi) \otimes R^s)_x \subseteq (xR_x^t) \otimes R_x^s = x(R_x^t \otimes R_x^s),$$

$$(R^t \otimes Nc(\varphi))_x \subseteq (R_x^t) \otimes (xR_x^s) = x(R_x^t \otimes R_x^s)$$

segue anche :

$$(Nc(\psi \otimes R^s)_x + (R^t \otimes Nc(\varphi))_x \subseteq x(R^{st})_x.$$

**n. 2. Rappresentazioni di  $t(M \otimes N)$  come quoziente di un modulo senza torsione.**

2.1 Sia  $N$  un  $R$ -modulo di  $T. F.$ , senza torsione, sia  $J$  un ideale di  $R$  e si consideri una sequenza esatta:

$$0 \rightarrow S \xrightarrow{j} R^p \xrightarrow{k} N \rightarrow 0.$$

Moltiplicando tensorialmente per  $J$  e considerando la restrizione  $\bar{k}$  di  $k$  a  $JR^p$  si può costruire il seguente diagramma commutativo ed esatto:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & J \otimes S & \xrightarrow{J(\otimes)j} & J \otimes R^p & \xrightarrow{J(\otimes)k} & J \otimes N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
 & & 0 & \longrightarrow & Nc(\bar{k}) & \longrightarrow & JR^p \xrightarrow{\bar{k}} JN \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & T' & & & & 0 \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & & 
 \end{array}$$

dove

$$Nc(\bar{k}) = Nc(k) \cap JR^p = (S \cap JR^p) \subset R^p, \quad T \approx T' \approx t(J \otimes N).$$

Si può così ottenere finalmente per  $t(J \otimes N)$  una sequenza esatta

$$(*), \quad 0 \rightarrow JS \rightarrow S \cap JR^p \rightarrow t(J \otimes N) \rightarrow 0,$$

nella quale  $S \cap JR^p$  è l'intersezione del sottomodulo  $S$  di  $R^p$  con il sottomodulo di  $R^p$  immagine dell'omomorfismo canonico  $J \otimes R^p \rightarrow R^p$ , e l'omomorfismo  $JS \rightarrow S \cap JR^p$  è quello naturale.

2.2 Caso particolare:  $S \subseteq JR^p$ .

In questo caso la sequenza esatta si semplifica in:

$$(**), \quad 0 \rightarrow JS \rightarrow S \rightarrow t(J \otimes N) \rightarrow 0.$$

Ciò accade per esempio nel caso seguente :

2.3 Se  $J$  è un ideale proprio generato da una  $R$ -successione  $r_1, \dots, r_s$  e se  $S = S_1, S_2, \dots, S_{t-1}, S_t = R^q$  sono i vari moduli di sizigie (cfr. [6]) dell'ideale  $J$  costruiti con riferimento a sistemi minimali di generatori, e se infine indichiamo, per uniformità di notazione,  $J = S_0$ , allora si ottengono le sequenze esatte :

$$0 \rightarrow JS_{i+1} \rightarrow S_{i+1} \rightarrow t(J \otimes S_i) \rightarrow 0, \quad i = 0, 1, \dots, t-1;$$

In particolare per  $i = 0$  si ottiene :

$$0 \rightarrow JS \rightarrow S \rightarrow t(J \otimes J) \rightarrow 0.$$

Si constata inoltre immediatamente, osservando che la controimmagine di  $JS_{i+1}$  nell'omomorfismo suriettivo  $R^{p(i)} \rightarrow S_{i+1}$ ,  $\left(p(i) = \binom{s}{i+2}\right)$ , risulta essere  $JR^{p(i)}$ , che *tutti i moduli  $t(J \otimes S_i)$  sono isomorfi con somme dirette di moduli « copie » di  $R/J$  ed esattamente risulta :*

$$t(J \otimes S_i) \approx \bigoplus_{p(i)} R/J; \quad p(i) = \binom{s}{i+2}; \quad i = 0, 1, \dots, t-1; \quad S_0 = J.$$

2.4 Se  $J$  è un ideale che abbia per lo meno una localizzazione  $J_x$  non  $R_x$ -libera, e se  $S_1, \dots, S_t$  sono i vari moduli di sizigie costruiti con sistemi minimali di generatori e se  $S_t$  è il primo d'essi che risulti libero, allora si hanno le sequenze esatte :

$$0 \rightarrow xS_{i+1} \rightarrow S_{i+1} \rightarrow t(x \otimes S_i) \rightarrow 0; \quad i = 1, \dots, t-1.$$

Anche in questo caso si constata, considerando gli omomorfismi suriettivi  $R^{p(i)} \rightarrow S_{i+1}$ , che i moduli  $t(x \otimes S_i)$  sono isomorfi con somme dirette di moduli « copie » di  $R/x$ . Ovviamente nel presente caso non è detto che per i numeri  $p(i)$  valga la formula del n. 2.3.

## 2.5 ALTRO CASO PARTICOLARE.

Sia  $J$  un « ideale sizigietico » (cfr. [13]), ossia un ideale che possieda un sistema di generatori tale che per il corrispondente primo

modulo di sizigie risulti:  $S_T = S \cap JR^p$ , ove con  $S_T$  si indica quel sottomodulo di  $S$  costituite con le cosiddette « sizigie triviali » del tipo  $(0, 0, \dots, r_j, 0, \dots, -r_i, 0, \dots, 0)$ , essendo  $r_i, r_j$  rispettivamente  $i$ -esimo e  $j$ -esimo generatore di  $J$  ed i posti occupati nella  $p$ -pla  $i$ -esimo per  $r_j$  e il  $j$ -esimo per  $-r_i$ . Si ottiene allora la sequenza esatta:

$$0 \rightarrow JS \rightarrow S_T \rightarrow t(J \otimes J) \rightarrow 0.$$

**OSSERVAZIONE.** Caso particolare di ideale sizigietico è ogni ideale generato con una  $R$ -successione.

## 2.6 CONSIDERAZIONI SULLA RAPPRESENTAZIONE DI $t(M \otimes N)$ NEL CASO GENERALE.

Ci siamo limitati, nei precedenti commi, al caso che per lo meno uno dei due moduli  $M, N$  abbia rango uno.

Se  $rg(M) > 1, rg(N) > 1$  il metodo descritto al n. 2.1 non porta a risultati soddisfacenti, visto che in tal caso  $Nc(\bar{k})$  non ha una rappresentazione molto semplice in  $MR^p$  e in  $R^{pq}$ .

Se l'anello  $R$  soddisfa alla  $P.E.$  e se almeno uno dei due moduli  $M, N$  è isomorfo con il nucleo di un omomorfismo  $R^s \rightarrow R^t$ , una possibilità di ridurre la questione ad un'altra più semplice può in certi casi essere offerta da quanto ricordato in 1.10 (cfr. n. 5.1).

Se l'anello  $R$  è isomorfo con l'anello delle coordinate di una varietà algebrica affine irriducibile ed a fattorizzazione unica (su un corpo  $K$  commutativo ed algebricamente chiuso) e se almeno uno dei due  $M, N$ , per esempio  $M$  soddisfa alla  $P.E.$ , allora è possibile ridurre la questione al caso considerato in 2.1, giacchè (cfr. [12]) esiste in tal caso una sequenza esatta:  $0 \rightarrow M \rightarrow R^{p+1} \xrightarrow{\varphi} R$  e dunque, se  $N$  soddisfa ad una sequenza esatta:  $0 \rightarrow N_1 \rightarrow R^s \rightarrow N \rightarrow 0$  si ha:  $t(M \otimes N) \approx t(N_1 \otimes J)$ , ove  $J = Im(\varphi)$ , (cfr. per esempio n. 5.4).

Nel caso che nè  $M$  nè  $N$  soddisfino alla  $P.E.$  non mi si è presentata nessuna soluzione soddisfacente per una buona rappresentazione di  $t(M \otimes N)$ ; alcune considerazioni che possono risultare utili per verificare per lo meno se  $t(M \otimes N)$  è o non è nullo, sono esposte nel paragrafo 3.

### 3. Alcuni criteri per verificare se $t(M \otimes N) = 0$ oppure $t(M \otimes N) \neq 0$ .

3.1 Nel caso che  $rg(N) = 1$ , si possono direttamente utilizzare le sequenze esatte  $(*)$ ,  $(**)$  (cfr. 2.1, 2.2).

Mentre che nel caso della  $(*)$  occorre verificare direttamente se i sottomoduli  $JS_1$ ,  $S_1 \cap JR^v$  sono eguali e differenti, nel caso della sequenza  $(**)$  risulta necessariamente  $t(J \otimes M) \neq 0$ .

Infatti ciò si può vedere applicando una nota proprietà che, per comodità del lettore riportiamo:

([16] pag. 10 n. 3.11) « sia  $M$  un  $R$ -modulo di tipo finito tale che  $JM = M$  per un certo ideale  $J$  di  $R$ . Se nessun elemento  $a$  di  $R$  tale che  $(a - 1) \in J$ , appartiene ad  $\text{Ann}(M)$ , allora  $M = 0$  ».

Pertanto nel nostro caso, se  $S_1 \neq 0$  ed  $R$  è dominio d'integrità, sempre risulta  $JS_1 \neq S_1$ .

3.2 Se  $rg(M), rg(N) \geq 1$ , si possono fare le seguenti considerazioni di carattere generale:

indicando con  $n(M)$  il numero minimo di generatori per  $M$ , si ha, per ogni ideale primo  $x$  di  $R$ :

$$n((M \otimes N)_x) = n(M_x) \cdot n(N_x), \quad (\text{cfr. 1.13});$$

ed indicando con  $n_{tx}$  il numero  $n(t(M \otimes N)_x)$ , si ottiene pure:

$$(i) \quad n_{tx} + n((NM)_x) \geq n(M_x) \cdot n(N_x);$$

$$(ii) \quad n((NM)_x) \leq n(M_x) \cdot n(N_x).$$

La prima disuguaglianza si verifica completando un sistema di generatori di  $t(M \otimes N)_x$  ad un sistema di generatori di  $(M \otimes N)_x$ ; la seconda si verifica osservando che  $(NM)_x$  è un quoziente di  $(M \otimes N)_x$ . Otteniamo allora la seguente condizione:

$$n((NM)_x) < n(M_x) \cdot n(N_x) \text{ implica } t(M \otimes N)_x \neq 0$$

giacchè la disuguaglianza implica  $n_{tx} > 0$ .

La condizione enunciata risulta una condizione sufficiente, ma non necessaria per il non annullarsi di  $t(M \otimes N)$ , (cfr. 5.8).

## 3.3 UN CASO PARTICOLARE.

Se  $I$  è un ideale non proiettivo allora  $t(I \otimes I) \neq 0$ .

Infatti, se  $I$  non è proiettivo, ha per lo meno una localizzazione  $I_x$  non  $R_x$ -libera e se si considera allora un sistema minimale di generatori  $r_1, \dots, r_s$  per  $I_x$ , allora, (cfr. 1.13) risulta  $n((I \otimes I)_x) = s^2 > 1$  mentre  $n(I_2) \leq s(s+1)/2$ , giacchè gli elementi  $a_i \otimes a_j, a_j \otimes a_i$  hanno la stessa immagine in  $I_2$ .

3.4 Se  $R \in P.E.$  ed  $F$  è un  $R$ -modulo senza torsione, di rango  $> 1$ , non soddisfacente alla  $P.E.$ , allora esistono elementi  $\omega$ , (di qualche sopra- $R$ -modulo di  $F$ ), non appartenenti ad  $F$  e tali che lo ideale  $(F : \omega)$  abbia altezza  $> 1$ ; per ogni coppia di elementi  $r, s$  di tale ideale risulta allora che l'elemento  $(r \cdot \omega \otimes s \cdot \omega) - (s \cdot \omega \otimes r \cdot \omega)$  ha immagine nulla nell'omomorfismo canonico  $F \otimes F \rightarrow F_2$ .

Questo si può verificare osservando che l'elemento  $r \cdot \omega \cdot s \cdot \omega$  di  $F_2$  si può rappresentare per mezzo di una matrice quadrata:

$$\begin{vmatrix} r \cdot f_1 \cdot s \cdot f_1 & r \cdot f_1 \cdot s \cdot f_2 \dots r \cdot f_1 \cdot s \cdot f_p \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ r \cdot f_p \cdot s \cdot f_1 & r \cdot f_p \cdot s \cdot f_2 \dots r \cdot f_p \cdot s \cdot f_p \end{vmatrix}$$

essendo  $\omega = (f_1, \dots, f_p) \in R^p$  e pensando pure  $F_2$  immerso in  $R^{p^2}$ ; questa matrice è simmetrica e coincide pertanto con la sua trasposta, che rappresenta l'elemento  $s \cdot \omega \cdot r \cdot \omega$ .

Orbene, se è possibile completare  $r \cdot \omega, s \cdot \omega$  ad un sistema minimale di generatore per  $F_x$ , allora risulta che il corrispondente sistema minimale di generatori per  $(F \otimes F)_x$  possiede un numero di elementi distinti, maggiore che la sua immagine in  $F_2$  e pertanto ne segue  $t(F \otimes F) \neq 0$ .

3.5. Se invece  $r \cdot \omega, s \cdot \omega$  non si possono completare ad un sistema minimale di generatori per  $F_x$ , può ciononostante accadere che l'elemento  $(r \cdot \omega \otimes s \cdot \omega) - (s \cdot \omega \otimes r \cdot \omega)$  lo stesso non si annulli in  $(F \otimes F)$ ; un esempio di questa situazione è esposto in 5.3.

3.6 Si osservi pure, infine, che un elemento di torsione, non nullo di  $R \otimes F$  non è necessariamente del tipo  $\sigma \otimes \omega - \omega \otimes \sigma$ .

Per esempio, considerando il nucleo  $G$  dell'omomorfismo  $R^4 \xrightarrow{\varphi} R$ , ove  $R$  è l'anello dei polinomi in quattro indeterminate  $X, Y, Z, T$  su

un corpo  $K$  e l'omomorfismo  $\varphi$  è definito con:  $\varphi(a, b, c, d) = a \cdot X + b \cdot Y + c \cdot Z + d \cdot T$ , risulta che  $t(G \otimes G)$  è  $\neq 0$  e si genera con l'elemento  $\sum (\sigma_i \otimes \sigma_k)$  con  $\sigma_i = \varphi(u_i)$ , essendo:  $0 \rightarrow R \rightarrow R^4 \xrightarrow{\varphi} R^6 \rightarrow R^4 \xrightarrow{i+k=7} (\{X, Y, Z, T\}) \rightarrow 0$  la sequenza esatta canonica di sizigie per l'ideale  $Im(\varphi)$ .

NOTA. Che sia  $t(G \otimes G) \neq 0$  risulta immediatamente, per esempio con il metodo che si applica in 5.1; l'elemento generatore si può determinare considerando le relazioni fra le immagini degli elementi  $\sigma_i \otimes \sigma_k$  in  $G_2$ .

3.7. Si ricordi in ultimo la possibilità, che sempre resta, nel caso che uno dei due moduli  $M, N$  per lo meno, soddisfi alla  $P.E.$  (supposta che  $R$  vi soddisfi), di utilizzare la proprietà 1.10. (cfr. gli esempi in 5.1, 5.2, 5.4).

#### 4. Alcuni casi nei quali $t(M \otimes N)$ è sommando diretto di $M \otimes N$ (ed una condizione affinché non lo sia).

4.1 TEOREMA. Per ogni ideale di altezza  $> 1$ , generabile per mezzo di una  $R$ -successione incondizionata (cfr. (ii) def. 23)  $r_1, \dots, r_s$  risulta:

$$I \otimes I \simeq I_2 \oplus t(I \otimes I), t(I \otimes I) \simeq \bigoplus_{n(s)} (R/I), n(s) = s(s-1)/2.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la sequenza esatta canonica:

$$0 \rightarrow S \rightarrow R^s \xrightarrow{\varphi} I \rightarrow 0, \varphi(u_i) = r_i.$$

È noto (cfr. per esempio [6]) che il sottomodulo  $S$  di  $R^s$  è generato dagli  $s(s-1)/2$  elementi  $\omega_{ik}, (i < k)$ , le cui coordinate sono:  $-r_k$  la  $i$ -esima,  $r_i$  la  $k$ -esima, 0 le rimanenti.

Per quanto visto in 2.3 il modulo  $t(I \otimes I)$  è isomorfo con  $\bigoplus_{n(s)} (R/I)$  e soddisfa alla sequenza esatta:

$$0 \rightarrow IS \rightarrow S \rightarrow t(I \otimes I) \rightarrow 0.$$

Si consideri ora il sottomodulo  $G$  di  $R^s$  generato dagli elementi della famiglia  $\{\sigma_{ik}\}$ , con  $1 \leq k \leq i \leq s$ , ove  $\sigma_{ik}$  ha nulle tutte le sue coordinate meno la  $i$ -esima che vale  $r_k$ .

Risulta allora evidentemente  $S + G = IR^s$ ; inoltre verificheremo ora che  $S \cap G \subseteq IS$ .

Infatti, sia  $\omega \in S \cap G$  ovvero  $\omega = \sum_{ik} \lambda_{ik} \omega_{ik} = \sum_{ik} \mu_{ik} \sigma_{ik}$ ; eguagliando le  $s$  coordinate, si ottengono  $s$  condizioni del tipo:

$$\sum_{ik} \lambda_{ik} \omega_{ik}^j = \sum_{ik} \mu_{ik} \sigma_{ik}^j,$$

ove  $\omega_{ik}^j, \sigma_{ik}^j$  indicano la  $j$ -esima coordinata di  $\omega_{ik}, \sigma_{ik}$  rispettivamente.

Nella prima equazione, ( $j = 1$ ), a secondo membro compare solo il termine  $\mu_{11} r_1$ , e ciò permette di dedurre che gli  $s - 1$  coefficienti  $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \dots, \lambda_{1s}$  che compaiono a primo membro (moltiplicato ciascuno per un certo differente  $r_i, i > 1$ ) appartengono all'ideale  $I$  (ricordando che gli el.  $r_i$  formano  $R$ -successione incondizionata).

La seconda equazione, ( $j = 2$ ), a secondo membro ha:  $\mu_{21} r_1 + \mu_{22} r_2$  e ciò permette di dedurre l'appartenenza ad  $I$  degli  $s - 2$  coefficienti  $\lambda_{23}, \lambda_{24}, \dots, \lambda_{2s}$  (nessuno dei quali compare moltiplicato per  $r_1$  e  $r_2$ ); così si giunge successivamente alla ( $s - 1$ )-esima equazione, che permette di dedurre che  $\lambda_{s-1,s}$  appartiene ad  $I$ .

Orbene, con riferimento al diagramma esatto:

$$\begin{array}{ccccc} I \otimes S & \xrightarrow{I(\bar{\otimes})^j} & I \otimes R^s & \xrightarrow{I(\bar{\otimes})^j \varphi} & I \otimes I \rightarrow 0 \\ & & \uparrow \psi & & \\ & & IR^s & & \end{array}$$

le relazioni:  $S + G = IR^s, S \cap G \subseteq IS$  implicano che le immagini  $\bar{S}, \bar{G}$  di  $S, G$  per mezzo dell'omomorfismo  $(I \otimes \varphi) \psi$  sono due sottomoduli di  $I \otimes I$  dei quali  $I \otimes I$  risulta somma diretta; infine  $\bar{S}$  coincide palesemente con  $t(I \otimes I)$  mentre  $\bar{G}$  è isomorfo con il conucleo della inclusione di  $t(I \otimes I)$  in  $(I \otimes I)$ , conucleo che d'altra parte è isomorfo pure con  $I_2$  (cfr. 1.11).

**4.2. COROLLARIO.** *Se  $R$  è un dominio d'integrità di Macaulay, allora per ogni ideale proprio  $I$  della classe principale (cioè generabile con un numero di elementi pari alla sua altezza) di altezza  $> 1$*

si ha :

$$I \otimes I \simeq \left( \bigoplus_{n(s)} R/I \right) \oplus I_2.$$

Infatti: in un anello di Macaulay ogni ideale della classe principale si può generare per mezzo di una  $R$ -successione incondizionata (cfr. [14] teor. 2 oppure [7] e [15]).

**4.3 OSSERVAZIONE.** Le condizioni del teorema 4.1 *non sono necessarie*, come si può constatare per esempio considerando gli ideali :

$I = (\{XY, YZ, ZX\})$  nell'anello dei polinomi a tre indeterminate su un corpo  $K$  oppure :

$J = (\{X, Y\})$  nell'anello quoziente  $K[X, Y]/(Y^2 - X^3)$ .

**4.4 OSSERVAZIONE.** D'altro canto, si osservi che *non sempre*  $t(I \otimes I)$  risulta sommando diretto in  $I \otimes I$ .

Per esempio: si consideri  $I = (\{X, Y\})$  nell'anello quoziente  $K[X, Y]/(X^3 - Y^4)$ . Risulta in questo caso  $t(I \otimes I) \neq 0$  senza che  $t(I \otimes I)$  sia sommando diretto in  $I \otimes I$ , giacchè  $n(I_2) = 3$ ,  $n(I \otimes I) = 4$ ,  $n_t = 2$  (cfr. 4.7).

Considerata la sequenza esatta:  $0 \rightarrow H \rightarrow R^2 \rightarrow I \rightarrow 0$  nella quale l' $R$ -modulo  $H$  è isomorfo con l'ideale generato con  $X, Y^3$  si verifica facilmente che ogni relazione fra i tre generatori  $X^2, XY, Y^2$  di  $I$  ha i suoi coefficienti nell'ideale  $x = (\{X, Y\})$  e pertanto effettivamente  $n(I_2) = 3$ . Se poi fosse  $n_t = 1$ , cioè implicherebbe, giacchè  $t(I \otimes I) \simeq H/IH$ , che si potrebbe generare l'ideale  $(\{X, Y^3\})$ , (isomorfo con  $H$ ), con gli elementi  $X^2, XY, XY^3, Y^4$  ed un altro,  $P$ , in più. Invece si verifica, (considerando i gradi dei polinomi in questione e del polinomio  $X^3 - Y^4$ ), che, localizzando in  $x$  dovrebbe risultare  $P_x = \lambda X_x$  e ciò implicherebbe, sempre localizzando in  $x$  ed inoltre annullando  $X$ , che l'ideale  $(Y^3)_x$  sarebbe generabile per mezzo dell'elemento  $Y_x^4$ , cosa che risulta impossibile (considerando i gradi).

**4.5 TEOREMA.** Se  $F$  è un  $R$ -modulo senza torsione soddisfacente ad una sequenza esatta :

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\varphi} R^s \rightarrow F \rightarrow 0$$

e se inoltre le coordinate  $r_1, \dots, r_s$  di  $\varphi(1)$  in  $R^s$  sono tali che per lo meno per un indice  $j$  risultati:

$$(\{r_1, \dots, r_{j-1}, r_{j+1}, \dots, r_s\}) : r_j = (\{r_1, \dots, r_{j-1}, r_{j+1}, \dots, r_s\}),$$

allora, chiamato  $J$  l'ideale generato dagli elementi  $r_i$  risulta:

$$t(J \otimes F) \approx R/J; \quad J \otimes F \approx (R/J) \oplus JF.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che sia  $(\{r_1, \dots, r_{s-1}\}) : r_s = (\{r_1, \dots, r_{s-1}\})$ .

Con riferimento al diagramma del n. 21, si osservi che  $J \otimes F$  è generato dalle immagini (per mezzo di  $J \otimes k$ ) degli elementi  $r_i \otimes u_j$  ai quali corrispondono in  $JR^s$  gli elementi  $u'_{ij}$  che hanno la  $i$ -esima coordinata uguale ad  $r_j$  e le rimanenti nulle.

Se  $G$  è il sottomodulo di  $JR^s$  generato da tutti gli elementi  $u'_{ij}$  meno l'ultimo  $u'_{ss} = (0, 0, \dots, 0, r_s)$  e se  $S'$  è il sottomodulo di  $JR^s$  generato dall'elemento  $(r_1, r_2, \dots, r_s)$ , risulta:

$$S' + G = JR^s, \quad S' \cap G \subseteq JS'$$

giacchè se  $\omega = r(r_1, \dots, r_s) = \sum_{i+k \leq 2s} \lambda_{ik} u'_{ik}$ , allora, eguagliando la  $s$ -esima coordinata risulta:  $r \cdot r_s = \sum_{i=1}^{s-1} \lambda_{is} u'_{is} \in (\{r_1, \dots, r_{s-1}\})$  ossia:  $r \in (\{r_1, \dots, r_{s-1}\}) \subseteq J$  e pertanto  $\omega \in JS'$ .

Il risultante che si deve dimostrare segue allora con lo stesso procedimento del n. 4.1, osservando nel presente caso che  $S' \approx R$ .

**4.6 OSSERVAZIONE.** Se non si compie la ipotesi fatta per gli elementi  $r_i$  in 5.5, non è detto che  $t(J \otimes F)$  risulti sommando diretto in  $J \otimes F$ .

Per esempio: il conucleo  $F$  dell'omomorfismo  $R \xrightarrow{\varphi} R^3$  definite con  $\varphi(1) = (X_2 X_3, X_3 X_1, X_1 X_2)$  ( $R$  essendo l'anello dei polinomi in tre indeterminate su un corpo  $K$ ), moltiplicato tensorialmente per l'ideale  $J$  generato dalle tre coordinate di  $\varphi(1)$  in  $R^3$ , dà:  $t(J \otimes F) \approx R/J$  non sommando diretto in  $J \otimes F$ .

Infatti, con un poco di calcoli del solito tipo si trova:

$$n(JF) = n(J \otimes F), \quad n(t(J \otimes F)) = 1, \quad (\text{cfr. 4.7}).$$

**4.7 CONDIZIONI AFFINCHÈ  $t(M \otimes N)$  NON SIA SOMMANDO DIRETTO IN  $M \otimes N$ .** Con riferimento al n. 3.2 e ricordando che (cfr. [16] pag. 14, 5.3) in un modulo di tipo finito su un anello locale, due sistemi minimali di generatori sempre hanno lo stesso numero cardinale, segue che :

(\*) Se  $n_t + n(MN)_x > n((M \otimes N)_x)$  per qualche ideale primo  $x$ , allora  $t(M \otimes N)$  non è sommando diretto in  $M \otimes N$ .

(\*\*) Se  $t(M \otimes N) \neq 0$  e se  $n((MN)_x) = n(M_x) \cdot n(N_x)$ , allora  $t(M \otimes N)$  non è sommando diretto in  $M \otimes N$ .

**OSSERVAZIONE.** Queste condizioni sono in essenza coincidenti con la condizione studiata in [8], se si tiene presente la proprietà considerata in 1.12.

## 5. Ulteriori esempi ed applicazioni.

- 5.1, 5.4 : calcolo di  $t(M \otimes N)$ ;
- 5.3, 5.5, 5.7 : verifica che  $t(M \otimes N) \neq 0$ ;
- 5.8 : applicazione del teorema 4.5;
- 5.9 : applicazione del criterio 4.7;
- 5.6 : un esempio a proposito dei limiti di validità per la proprietà 1.10;
- 5.2 : calcolo della dimensione omologica di un modulo.

5.1 Siano  $S_0 = I, S_1, \dots, S_4 = R$  i successivi moduli di sizigie canonici per l'ideale  $I(\{X, Y, Z, T, U\})$  in un anello di polinomi con per lo meno 5 indeterminate. Applicando allora il teorema 2.3 e quanto esposto nei nn. 1.10, 4.1, 4.5 si ottiene che tutti i vari sottomoduli di torsione  $t(S_i \otimes S_k)$  sono somme dirette di copie di  $R/J$ ,  $n(i, k)$  volte, con

$$n(i, k) = \binom{5}{i + k + 2};$$

Inoltre  $t(I \otimes I)$ ,  $t(I \otimes S_3)$  sono sommandi diretti.

## 5.2 CALCOLO DELLA DIMENSIONE OMOLOGICA DI UN MODULO.

Si considerino le sequenze esatte:

$$(*) \quad 0 \rightarrow M \rightarrow R^3 \xrightarrow{\varphi} I \rightarrow 0$$

$$(**) \quad 0 \rightarrow R \rightarrow R^3 \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0$$

ove

$$\varphi(a, b, c) = a(Y - X^3) + b(X^2 + Y^2 - 2X) + c(Y + Z):$$

e  $\varphi$  è un qualunque omomorfismo suriettivo (che in questo caso certamente esiste, formando gli elementi  $\varphi(u_i)$ ,  $R$ -successione). Si consideri pure la sequenza esatta che si ottiene per mezzo dell'omomorfismo  $\varphi \otimes \varphi$  (cfr. [18] pag. 41, teor. 4):

$$(R \otimes R^3) \oplus (R^3 \otimes R) \rightarrow R^3 \otimes R^3 \rightarrow M \otimes M \rightarrow 0$$

e, osservando che  $rg(Nc(\varphi \otimes \varphi)) = 5$ , la sequenza esatta:

$$(***) \quad 0 \rightarrow R \rightarrow R^6 \rightarrow R^9 \rightarrow M \otimes M \rightarrow 0$$

o equivalentemente le due:

$$(i) \quad 0 \rightarrow R \rightarrow R^6 \rightarrow F \rightarrow 0,$$

$$(ii) \quad 0 \rightarrow F \rightarrow R^9 \rightarrow M \otimes M \rightarrow 0, \text{ con } F = Nc(\varphi \otimes \varphi).$$

È noto (cfr. 1.10) che  $t(M \otimes M) = 0$ ;

Dimostreremo ora che:

$$1) \quad t(M \otimes M \otimes M) \neq 0;$$

$$2) \quad dh(M \oplus M) = 2 \text{ (cfr. ii def. 19);}$$

$$3) \quad dh(M \otimes M \otimes M) = 3.$$

Infatti:

$$1) \quad t(M \otimes M \otimes M) \simeq t(I \otimes F), \text{ (cfr. 1.10, (*), (ii));}$$

$$t(I \otimes F) \simeq R/I \neq 0 \text{ (cfr. 2.2).}$$

2) della (\*\*\*) risulta  $dh(M \otimes M) \leq 2$ ; se fosse  $dh(M \otimes M) \leq 1$  si avrebbe, per lo meno localmente, una sequenza esatta del tipo:

$$0 \rightarrow R^5 \rightarrow R^9 \rightarrow M \otimes M \rightarrow 0$$

ed allora risulterebbe: (cfr. 1.10),

$$t(M \otimes M \otimes M) \approx t(I \otimes R^5) = 0$$

che invece non è.

3) Considerata la sequenza esatta:

$$0 \rightarrow R/I \rightarrow M \otimes M \otimes M \rightarrow M_3 \rightarrow 0 \quad (\text{cfr. ii) def. 13}),$$

ed osservando che  $dh(R/I) = 3$ ,  $dh(M_3) \leq 2$  (essendo  $M_3$  senza torsione) segue  $dh(M \otimes M \otimes M) = 3$ , ricordando anche che dev'essere:

$$dh(R/I) \leq \max \{dh(M \otimes M \otimes M), dh(M_3)\} \quad (\text{cfr. [19] pag. 243}).$$

**5.3 VERIFICA DEL NON ANNULARSI DI  $t(F \otimes F)$ .** Sia  $E$  il sottomodulo di  $R^2$ -generato dai tre elementi:

$$\sigma_1 = (X, 0), \sigma_2 = (0, Y), \sigma_3 = (Y, X)$$

essendo  $R$  anello di polinomi in per lo meno tre indeterminate  $X, Y, Z$ .

Verificheremo che non è nullo l'elemento di torsione:

$$\omega = (0, X^2) \otimes (0, Y) - (0, Y) \otimes (0, X^2) \in F \otimes F.$$

Si verifica che  $\omega$  è l'immagine dell'elemento  $\sigma = (0, -Y, 0, Y, 0, -X, 0, X, 0)$  di  $R^3 \otimes R^3 (= R^9)$  nell'omomorfismo  $\psi \otimes \psi$ , ove  $\psi(a, b, c) = a \cdot \sigma_1 + b \cdot \sigma_2 + c \cdot \sigma_3$ ,  $\psi: R^3 \rightarrow F$ .

Siccome  $Nc(\psi \otimes \psi) \subseteq x^2 R^9$ , (come si può verificare calcolando il nucleo di  $\psi \otimes \psi$ , applicando il teorema di [18] citato in 1.13), mentre  $\sigma$  non appartiene a  $r^2 R^9$ , segue che  $\omega \neq 0$  ( $x = (\{X, Y\})$ )

**5.4 APPLICAZIONI RIPETUTE DEL CRITERIO ENUNCIATO IN 1.10.**

Sia  $R$  anello di polinomi in almeno quattro indeterminate  $X, Y, Z, T$ , ed  $M$  il sottomodulo di  $R^2$  generato dagli elementi:

$$\omega_1 = (Z, T), \omega_2 = (Y, 0), \omega_3 = (0, Y), \omega_4 = (X, 0), \omega_5 = (0, X).$$

Si ottiene allora una sequenza esatta  $0 \rightarrow F \rightarrow R^5 \rightarrow M \rightarrow 0$ , nella quale  $F$  risulta isomorfo con il secondo modulo di sizige dell'ideale  $I = (\{X, Y, Z, T\})$ .

Pertanto, se  $N$  è un qualunque  $R$ -modulo, soddisfacente alla P.E. e se si vuole calcolare  $t(M \otimes N)$  si trova, applicando ripetute volte la proprietà 1.10 alle sequenze esatte seguenti:

- 1)  $0 \rightarrow R \rightarrow R^4 \rightarrow F \rightarrow 0$  ;    4)  $0 \rightarrow N \rightarrow R^q \rightarrow G \rightarrow 0$ ,
- 2)  $0 \rightarrow F \rightarrow R^6 \rightarrow S_1 \rightarrow 0$  ;    5)  $0 \rightarrow S \rightarrow R^p \rightarrow N \rightarrow 0$ ,
- 3)  $0 \rightarrow S_1 \rightarrow R^4 \rightarrow I \rightarrow 0$     6)  $0 \rightarrow S' \rightarrow R^s \rightarrow S \rightarrow 0$ ,

che :

$$t(M \otimes N) \approx t(F \otimes G) \approx t(S_1 \otimes N) \approx t(I \otimes S) = (\text{cfr. 2.1}), (S' \cap IR^s)/IS'.$$

Se poi risulta  $S' \subseteq IR^s$  ne segue addirittura che  $t(M \otimes N)$  è isomorfo con una somma diretta di copie di  $R/I$ .

NOTA. L'esistenza di una sequenza esatta come la 4) è assicurata da quanto esposto in [9].

5.5 APPLICAZIONE DEL CRITERIO ENUNCIATO IN 3.4. Sia  $M$  l' $R$ -modulo considerato in 5.4 ; giacchè  $(Y, 0), (X, 0)$  fanno parte di un sistema minimale di generatori per  $M$  risulta, applicando il criterio 3.4, che  $t(M \otimes M) \neq 0$ .

5.6. A PROPOSITO DI LIMITE DI VALIDITÀ DEL CRITERIO 1.10. Considerate le due sequenze esatte, (ove  $I$  è un ideale proprio),  $0 \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow T \rightarrow 0$ ,  $0 \rightarrow R \rightarrow R^2 \rightarrow R \rightarrow 0$ , si constata immediatamente, essendo  $t(I \otimes R) = 0 \neq t(R \otimes T) = T$ , che il criterio enunciato in 1.10 non rimane valido se alcuni dei moduli in questione presentano torsione.

5.7. APPLICAZIONE DEL CRITERIO 3.3. Per l'ideale  $I = (\{X^4 - Y^3, Y^7 X, 3X^3 Y^2\})$  in  $K[X, Y]$  si ha  $t(I \otimes I) \neq 0$ .

5.8 In  $R = K[X, Y, Z]$  siano  $I = (\{X, Y, Z\})$ ,  $J = (\{X^2, Y^2, Z^2\})$ ; risulta allora :  $n(IJ) = n(I)n(J) = n(I \otimes J)$ ;  $t(I \otimes J) \approx (R/\mathfrak{r})^3 \neq 0$ .

Pertanto (cfr. 4.7)  $t(I \otimes J)$  non è sommando diretto in  $I \otimes J$ .

5.9 In  $R = K[X, Y, Z, T]$  si consideri  $\varphi: R \rightarrow R^5$  definito con  $\varphi(1) = (XY, Z, TX, YT, XT, X)$ . Risulta allora, giacchè  $(\{XY, TX, YT, X\}): Z = (XY, TX, YT, X)$ , che  $t(J \otimes F) \approx R/J \neq 0$ ,  $J \otimes F \approx (R/J) \oplus JF$  con  $J = (\{X, Z, YT\})$  (cfr. 4.5).

## BIBLIOGRAFIA

- [1] BALDASSARRI, M. : *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci*. Atti del Convegno Internazionale di Geometria Algebrica. Torino. 1961. (edit. Rattero).
- [2] BALDASSARRI-GHEZZO, S. ; MARGAGLIO, C. ; MILLEVOI, T. : *Considerazioni sulla conferenza tenuta da M. Baldassarri a Torino nel 1961 : « Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci »*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 1965.
- [3] BOURBAKI, N. : *Algebre commutative* « Chap. 1, 2. Hermann, Paris 1961.
- [4] CARTAN, H. ; EILENBERG, S. : *Homological Algebra*. Princeton Univ. Press. 1956.
- [5] CARTIER P. : *Rationalité des diviseurs*. Bull. Soc. Math. France 86, 1958, pp. 177-251.
- [6] GRÖBNER, W. : *Moderne Algebraische Geometrie*. Springer Verlag 1949.
- [7] KAPLANSKI, I. : *Some aspects of rings theory*. Corso C.I.M.E. in Varenna estate 1965.
- [8] MARGAGLIO, C. : *Una condizione affinché il sottofascio di torsione di un fascio algebrico coerente sia sommando diretto*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova Vol. XXXI 1961.
- [9] MARGAGLIO, C. : *Una caratterizzazione di certi fasci algebrici coerenti ed una ulteriore applicazione della proprietà di estensione*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova Vol. XXXIV 1964.
- [10] MARGAGLIO C. : *Sul prodotto tensoriale di fasci algebrici coerenti e lisci*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova Vol. XXXIV 1964.
- [11] MARGAGLIO, C. : *Anelli che soddisfano alla proprietà di estensione*. In corso di stampa.
- [12] MARGAGLIO C. : *Sopra un problema di immersione per certi fasci algebrici coerenti su una varietà affine*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. Vol. XXXIX 1967.
- [13] MICALI, A. : *Algebres integres et sans torsion*. Bull. Soc. Math. France. Tome 94, 1966.
- [14] MILLEVOI, T. : *Una proprietà degli ideali di classe principale negli anelli di Macaulay*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 1965.
- [15] MIYATA, T. : *A remark on M-sequences*. Sugaku 15 ('63/'64) pp. 215-216.
- [16] NAGATA, M. : *Local rings*. Interscience Tracts n. 13.
- [17] NORTHOTT, D. G. : *Ideal Theory*. Cambridge Tracts n. 42. 1960.
- [18] NORTHOTT, D. G. : *An introduction to homological algebra*. Cambridge. Univ. Press.
- [19] SAMUEL, P. ; ZARISKI, O. : *Commutative algebra*. Vol. II. Van Nostrand.
- [20] SERRE, J. P. : *Faisceaux algebriques coherents*. Ann. of Math. 61 pp. 197-278.