

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIA GRAZIA MAIA

Un'osservazione sulle contrazioni metriche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 40 (1968), p. 139-143

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__40__139_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__40__139_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN'OSSERVAZIONE SULLE CONTRAZIONI METRICHE

di MARIA GRAZIA MAIA *)

Si dà una generalizzazione del teorema sui punti fissi di una contrazione, nel caso di uno spazio completo rispetto a una metrica e di una contrazione rispetto a una metrica maggiorante. Si dà successivamente un metodo per costruire una tale metrica maggiorante ed alcuni criteri per la sua esistenza.

TEOREMA 1. *Sia X uno spazio con due metriche d e δ , tali che : $d(x, y) \leq \delta(x, y)$ per tutti i punti x, y di X . Sia inoltre X completo rispetto a d ; sia $T: X \rightarrow X$ un'applicazione continua rispetto a d e una contrazione rispetto a δ ; allora esiste uno e un solo punto fisso per T in X .*

DIM. Sia X_0 un punto di X , consideriamo la successione $\{T^n(x_0)\}_{n \in \mathbf{N}}$. Tale successione è di Cauchy rispetto a δ , infatti : poichè T è una contrazione rispetto a δ , esiste $k < 1$ tale che :

$$\delta(T(x), T(y)) \leq k \delta(x, y) \quad \text{per tutti i punti } x, y \text{ di } X.$$

Siano n, m numeri interi, $m < n$:

$$\delta(T^n(x), T^m(y)) \leq k^m \delta(T^{n-m}(x_0), x_0)$$

ma k è minore di 1, quindi per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un indice r tale

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca matematica n° 20 del C.N.R.

Indirizzo dell'A: Istituto Matematico dell'Università, Via L. B. Alberti, Genova.

che, se $m > \nu$, si ha: $k^m < \varepsilon$. Allora:

$$\delta(T^n(x_0), T^m(x_0)) \leq \varepsilon \delta(T^{n-m}(x_0), x_0) \quad \text{se } n > m > \nu.$$

Dunque $\{T^n(x_0)\}_{n \in \mathbf{N}}$ è di Cauchy rispetto a δ e quindi anche rispetto a d , in quanto d è maggiorata da δ . Ma X è completo rispetto a d , per cui $\{T^n(x_0)\}_{n \in \mathbf{N}}$ è convergente in d . Sia x il punto di convergenza:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x_0) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x_0)) = T(x)$$

x risulta così punto fisso per T in X .

Tale punto fisso è anche unico, infatti: siano x e y punti fissi per T :

$$\delta(T(x), T(y)) \leq k \delta(x, y)$$

da cui: $\delta(x, y) = 0$ e quindi $x = y$.

OSSERVAZIONE. L'ipotesi di continuità di T rispetto a d nel teorema 1 non è superflua, infatti se X è l'insieme dei numeri naturali (zero incluso), consideriamo le seguenti metriche su X :

$$\delta(p, q) = \left| \frac{1}{2^p} - \frac{1}{2^q} \right|; \quad d(p, q) = \begin{cases} \left| \frac{1}{2^{p+1}} - \frac{1}{2^{q+1}} \right| & \text{se } p > 0 \text{ e } q > 0 \\ \frac{1}{2^{p+1}} & \text{se } p > 0 \text{ e } q = 0 \\ \frac{1}{2^{q+1}} & \text{se } p = 0 \text{ e } q > 0 \\ 0 & \text{se } p = 0 \text{ e } q = 0. \end{cases}$$

Risulta: $d(p, q) \leq \delta(p, q)$ per tutti i punti p, q di X ; inoltre X è completo rispetto a δ e non rispetto a d . Sia $T: X \rightarrow X$ tale che: $T(p) = p + 1$; T è una contrazione rispetto a δ , ma non ha punti fissi in X .

TEOREMA 2. *Sia X uno spazio metrico, d la metrica su X , $T: X \rightarrow X$ un'applicazione; consideriamo la serie di potenze:*

$$(*) \quad \sum_0^{\infty} \lambda^n d(T^n(x), T^n(y)).$$

Supponiamo che, per un certo $\lambda > 1$, la serie () converga qualunque siano i punti x, y in X . Allora, posto per un tale λ :*

$$\delta(x, y) = \sum_0^{\infty} \lambda^n d(T^n(x), T^n(y))$$

si ha:

- (i) δ è una metrica su X , maggiorante la metrica d
- (ii) T risulta una contrazione rispetto a δ .

DIM. δ è una metrica su X :

se $x = y$, $\delta(x, y) = 0$; viceversa sia $\delta(x, y) = 0$, cioè:

$$\sum_0^{\infty} \lambda^n d(T^n(x), T^n(y)) = 0$$

poichè la serie è a termini positivi, si ha: $d(T^n(x), T^n(y)) = 0$ per ogni n , da cui: $T^0(x) = T^0(y)$, cioè $x = y$.

Tralasciamo la ovvia dimostrazione della simmetria e della disuguaglianza triangolare e proviamo che T è una contrazione rispetto a δ :

$$\begin{aligned} \delta(x, y) &= d(x, y) + \lambda \sum_0^{\infty} \lambda^n d(T^{n+1}(x), T^{n+1}(y)) = \\ &= d(x, y) + \lambda d(T(x), T(y)) \end{aligned}$$

da cui:

$$\delta(T(x), T(y)) = \frac{1}{\lambda} (\delta(x, y) - d(x, y)) \leq \frac{1}{\lambda} \delta(x, y).$$

TEOREMA 3. *Sia $T: X \rightarrow X$ un'applicazione dello spazio metrico X in sé. Se una certa iterata di T è una contrazione, la serie (*) del teorema 2 converge per un $\lambda > 1$, qualunque siano i punti x, y in X .*

DIM. Per ipotesi si ha che esistono $k < 1$ e un intero ν tali che :

$$d(T^\nu(x), T^\nu(y)) \leq k d(x, y)$$

da cui, per ogni n intero :

$$d(T^n(x), T^n(y)) \leq k^n d(x, y).$$

Allora :

$$\begin{aligned} \sum_0^\infty \lambda^n d(T^n(x), T^n(y)) &= \sum_0^\infty \lambda^n d(T^n(x), T^n(y)) + \\ &\sum_0^\infty \lambda^{\nu n+1} d(T^{\nu n+1}(x), T^{\nu n+1}(y)) + \dots + \\ &\sum_0^\infty \lambda^{\nu n+n-1} d(T^{\nu n+n-1}(x), T^{\nu n+n-1}(y)) \leq \sum_0^\infty \lambda^{\nu n} k^n d(x, y) + \\ &\lambda \sum_0^\infty \lambda^{\nu n} k^n d(T(x), T(y)) + \dots + \\ &\lambda^{n-1} \sum_0^\infty \lambda^{\nu n} k^n d(T^{n-1}(x), T^{n-1}(y)). \end{aligned}$$

Basta allora prendere λ tale che : $1 < \lambda^n < \frac{1}{k}$, perchè la serie converga qualunque siano i punti x, y in X .

Esempio di applicazione al problema di Cauchy

Da quanto visto si può dedurre l'esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy in grande per equazioni differenziali del primo ordine, in forma normale, su un intervallo limitato e chiuso.

Sia X lo spazio delle funzioni continue su un intervallo limitato e chiuso $[a, b]$ di $\mathbf{R}$, a valori reali ; X , con la metrica lagrangiana :

$$d(f, g) = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$$

è uno spazio completo.

Sia $T: X \rightarrow X$ tale che, per ogni y in X , $T(y) = w$, dove:

$$w(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

essendo f continua nella striscia: $a \leq t \leq b$, $y \in \mathbf{R}$ e lipschitziana rispetto a y (con costante L).

Dimostriamo che T soddisfa le ipotesi del teorema 3.

Sia τ in $[a, b]$, poniamo:

$$d_\tau(y, z) = \sup_{a \leq x \leq \tau} |y(x) - z(x)|$$

e proviamo la seguente disuguaglianza:

$$(1) \quad d_\tau(T^n(y), T^n(z)) \leq L^n d_\tau(y, z) \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Per $n=0$ è ovvia; supponiamola dunque vera per un intero $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} d_\tau(T^{n+1}(y), T^{n+1}(z)) &= \sup_{a \leq x \leq \tau} \left| \int_{x_0}^x f(t, (T^n(y))(t)) dt + \right. \\ &\quad \left. - \int_{x_0}^x f(t, (T^n(z))(t)) dt \right| \leq \int_a^\tau L d_\tau(T^n(y), T^n(z)) dt \leq \\ &\leq \frac{L^{n+1}}{n!} d_\tau(y, z) \int_a^\tau (t-a)^n dt = L^{n+1} d_\tau(y, z) \frac{(\tau-a)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

E quindi induttivamente vale la (1) per ogni n .

Ponendo $\tau = b$ in (1), si ha:

$$d(T^n(y), T^n(z)) \leq L^n d(y, z) \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Da quest'ultima relazione segue che una certa iterata di T è una contrazione; inoltre T è ovviamente continua rispetto a d . Applicando allora i teoremi 2 e 1 si ha che T ha uno e un solo punto fisso.