RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

Struttura degli anelli generati dai loro elementi unità sinistri

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 86-101

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__86_0>

STRUTTURA DEGLI ANELLI GENERATI DAI LORO ELEMENTI UNITÀ SINISTRI

DOMENICO BOCCIONI *)

Com'è ben noto, un anello 1-generato A (cioè un anello A dotato di un elemento unità bilatero 1, e generato da 1) è isomorfo all'anello, $I/(\text{car}\, A)$, degli interi modulo $\text{car}\, A$ ($\text{car}\, A =$ caratteristica di A). Quindi un anello 1-generato è univocamente determinato (a meno di isomorfismi) dalla sua caratteristica (≥ 0).

D'altra parte, è pure noto (e fu osservato per primo dal Baer nel 1942: v. [2] **)) che un anello A è dotato di 1 se, e solo se, esso è dotato di un unico elemento unità sinistro.

Si presenta quindi, in modo naturale, il problema di mettere in luce la struttura di un anello A che sia E_s-generato (cioè di un anello A che contenga almeno un elemento unità sinistro e che sia generato dall'insieme $E_s = E_s(A)$, finito o infinito, di tutti i suoi elementi unità sinistri).

Questo problema viene studiato e risolto nel presente lavoro. Come risultati principali, si è trovato (n.^{0} 5, teor. 2 e coroll.) che *la struttura di un anello E_s-generato A è univocamente determinata dalla sua caratteristica,* car A, *e dalla struttura additiva del suo annichilatore sinistro* $Z_s(A)$ (n.^{0} 1), ed inoltre (n.^{0} 6, teor. 3) che *l'in-*

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

**) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine del lavoro.

tero car A (≥ 0) *e lo zero-anello* $Z_s(A)$ *possono essere del tutto arbitrari, con l'unica restrizione* (evidentemente necessaria) *che* car A *sia un multiplo di* car $Z_s(A)$.

È da rilevare (n.^{0} 1, prop. II) che, se un anello A è dotato di elementi unità sinistri, il loro numero cardinale $|E_s(A)|$ coincide con l'ordine $|Z_s(A)|$ dell'annichilatore sinistro di A.

In base ai suddetti risultati si può dunque dire che, mentre l'ordine $|A|$ di un anello E_s - generato A è sempre univocamente determinato da car A e $|E_s(A)|$ (infatti, per il teor. 2 del n.^{0} 5, $|A|$ è il prodotto dei due numeri cardinali $|I/(\text{car}\, A)|$ e $|Z_s(A)| = |E_s(A)|$), non lo è invece in generale (a meno di isomorfismi) l'anello A stesso, (perché in generale lo zero-anello $Z_s(A)$ non è determinato dal suo ordine $|E_s(A)|$).

Il fatto (ricordato all'inizio) che un anello E_s - generato A sia univocamente determinato (a meno di isomorfismi) da car A e $|E_s(A)|$ quando $|E_s(A)| = 1$ (cioè quando A è 1-generato), è dovuto appunto alla circostanza che lo zero-anello $Z_s(A)$ è, in tal caso, univocamente determinato (a meno di isomorfismi) dal suo ordine $(= 1)$.

Questa stessa circostanza si presenta anche quando $|E_s(A)| = p$ $=$ numero primo (poiché in tal caso $Z_s(A)$ è lo zero-anello col gruppo additivo ciclico di ordine p). Quindi dal teor. 3 del n.^{0} 6 risulta in particolare che: Per ogni numero primo p, e per ogni multiplo intero $m \geq 0$ di p, esiste uno e (a meno di isomorfismi) un solo anello E_s - generato di caratteristica m, che contiene esattamente p elementi unità sinistri.

1. Sia A un anello (associativo) qualsiasi. Ricordiamo ([7], pp. 53, 55, 22) che un elemento e di A dicesi una *identità sinistra* (oppure un *elemento unità sinistro*: [11], pp. 62, 45) di A, se

$$ex = x \qquad \text{per ogni } x \in A.$$

L'insieme di tutte le identità sinistre dell'anello A verrà denotato nel seguito con

$$E_s(A).$$

Ricordiamo poi ([11], pp. 47, 62, 395) che un elemento z dell'anello A dicesi un *annullatore sinistro* di A, se

$$zx = 0 \qquad \text{per ogni } x \in A.$$

L'insieme di tutti gli annullatori sinistri dell'anello A verrà denotato nel seguito con

$$Z_s(A).$$

Tale insieme $Z_s(A)$ (che è detto *l'annichilatore sinistro* di A: [8], p. 92, cfr. [7], pp. 83, 82) è notoriamente un ideale (bilatero) di A ([7], p. 83, [11], p. 395).

Si verifica subito che:

I. *Se* $E_s(A) \neq \varnothing$ [1]), *allora* $E_s(A)$ *è un laterale dell'ideale* $Z_s(A)$, cioè ([7], p. 64):

$$E_s(A) = e + Z_s(A),$$

qualunque sia $e \in E_s(A)$.

Dalla I risulta che ([7], p. 38):

II. *Se* $E_s(A) \neq \varnothing$, *allora* $E_s(A)$ *e* $Z_s(A)$ *sono equipotenti* ([6], p. 54), cioè [2]):

$$|E_s(A)| = |Z_s(A)|.$$

III. *Se* A *non è nullo* [3]), *allora:*

$$E_s(A) \cap Z_s(A) = \varnothing .$$

Infatti da $a \in E_s(A) \cap Z_s(A)$ seguirebbe $x = ax = 0$ per ogni $x \in A$, cioè $A = \{0\}$, contro l'ipotesi.

IV. *Sia* $E_s(A) \neq \varnothing$. *Allora l'anello* A *è nullo se, e solo se, l'anello* (quoziente) $A/Z_s(A)$ *è nullo.*

Infatti, se A non è nullo, allora (v. I e III) $A/Z_s(A)$ contiene almeno i due elementi (distinti) $E_s(A)$ e $Z_s(A)$, quindi non è nullo.

V. *Se* $e \in E_s(A)$, *allora* $(a, b \in A)$:

$$ae \in E_s(A) \quad \text{implica} \quad a \in E_s(A),$$

$$be \in Z_s(A) \quad \text{implica} \quad b \in Z_s(A).$$

---

[1]) $\varnothing =$ insieme vuoto.

[2]) Se M è un insieme qualsiasi, denoteremo con $|M|$ il numero cardinale (la potenza) di M.

[3]) Dicendo che un anello A è *nullo*, intendiamo dire che $A = \{0\}$, cioè che A contiene un solo elemento (lo zero).

Infatti, per ogni $x \in A$: $ax = a(ex) = (ae)x = x$, $bx = b(ex) = (be)x = 0$.

VI. *Se* $E_s(A) \neq \varnothing$, *allora* $E_s(A)$ *è l'identità* (bilatera : [7], pp. 53, 22) *dell'anello* $A/Z_s(A)$.

Infatti, $E_s(A) \neq \varnothing$ implica intanto

$$|Z_s(A/Z_s(A))| = 1, \tag{1}$$

cioè che $A/Z_s(A)$ ha un unico annullatore sinistro (il suo zero $Z_s(A)$); invero, posto $\bar{a} = a + Z_s(A)$ $(a \in A)$, se

$$\bar{a} \in Z_s(A/Z_s(A)),$$

cioè se $\bar{a}\,\bar{x} = Z_s(A)$ per ogni $x \in A$, allora $a\,x \in Z_s(A)$ per ogni $x \in A$, quindi in particolare $ae \in Z_s(A)$ con $e \in E_s(A)\,(\neq \varnothing)$, quindi (per la V) : $a \in Z_s(A)$, da cui

$$\bar{a} = Z_s(A),$$

dunque appunto vale la (1). D'altra parte

$$E_s(A/Z_s(A)) \neq \varnothing,$$

poiché evidentemente (v. I) $E_s(A)$ è una identità sinistra di $A/Z_s(A)$. Ma allora dalla (1) risulta (per la II) che $E_s(A)$ è l'unica identità sinistra di $A/Z_s(A)$. Ne segue, per un noto risultato di Baer ([2], p. 631, Lemma 2 ; v. [7], p. 55, ex. 6), che $E_s(A)$ è appunto l'identità di $A/Z_s(A)$, (cfr. pure [3], p. 1, terzult. capov.).

2. Sia G un qualsiasi gruppo additivo (non necessariamente abeliano). Se $x \in G$, chiameremo nel seguito *ordine di* x, e lo denoteremo col simbolo

$$\text{ord } x,$$

il minimo intero $r > 0$ tale che $rx = 0$ (= zero di G), se un tale r esiste (cfr. [7], p. 33), ed altrimenti il numero zero, cioè converremo (con Zassenhaus : [13], pp. 15 e 3) che

$$\text{ord } x = 0$$

significhi che il sottogruppo (ciclico) generato da x sia infinito. Dunque, per ogni fissato $x \in G$, si ha $0 \leq \mathrm{ord}\, x \in I$ [4]), ed ord x coincide (v. [7], p. 32) col generatore ≥ 0 dell'ideale (principale) di I costituito da quei $q\,(\in I)$ tali che $qx = 0$, cioè [5]):

$$(2) \qquad qx = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \mathrm{ord}\, x \mid q \qquad (q \in I).$$

Ricordiamo che l'*esponente* del gruppo G, che denoteremo con

$$\mathrm{esp}\, G,$$

si può definire (v. [13], p. 108, ex. 2*b*) come l'intero ≥ 0 che è il minimo comun multiplo degli ordini di tutti gli elementi x di G:

$$(3) \qquad 0 \leq \mathrm{esp}\, G = \mathrm{mcm}\, (\mathrm{ord}\, x)_{x \in G}\,.$$

Ciò equivale a dire che esp G coincide col generatore ≥ 0 dell'ideale intersezione di tutti gli ideali principali (ord x) di I generati dai numeri ord x $(x \in G)$:

$$(3') \qquad (\mathrm{esp}\, G) = \bigcap_{x \in G} (\mathrm{ord}\, x),$$

cioè che (v. (2)) [6]):

$$(3'') \qquad qx = 0 \;\; \forall\, x \in G \quad \text{se e solo se} \quad \mathrm{esp}\, G \mid q \qquad (q \in I).$$

Ne segue (poiché si verifica subito direttamente che i $q \in I$ tali che $qx = 0 \;\forall\, x \in G$ costituiscono un ideale di I: cfr. [13], p. 108, ex. 2*a*) la seguente altra equivalente definizione ([13], p. 108, ex. 3, cfr. [12], p. 92): esp G è il minimo intero $m > 0$ tale che $mx = 0 \;\forall\, x \in G$, se un tale m esiste, altrimenti esp $G = 0$.

Se A è un anello qualsiasi, è allora chiaro (ricordando la sua definizione più diffusa: v., ad es., [10], p. 24) che la caratteristica

---

[4]) I denotata (qui e nel seguito) l'anello dei numeri interi.

[5]) $a \mid b$ significa: a è un divisore di b.

[6]) $\forall$ significa: per ogni.

di A, che denoteremo nel seguito con

$$\text{car } A,$$

coincide con l'esponente di A^+ [7]):

$$\text{car } A = \text{esp } A^+, \tag{4}$$

(la definizione (4)-(3″) è ad es. adottata in [4], p. 114). Ricordiamo inoltre ([9], cfr. [1], pp. 31, 20) che la definizione (4) è equivalente ad un'altra ben nota definizione di car A: quella adottata da Jacobson in [7], p. 74, (una affermazione analoga vale pure per la definizione di esp G, se G è un gruppo abeliano).

Dalle (4)-(3) risulta evidentemente che (cfr. [13], p. 108, ex. 4):

VII. *Se S è un qualsiasi sottoanello di un anello A, allora* car S | car A.

Si osservi inoltre che (v. n.⁰ 1):

VIII. *Se $e \in E_s(A)$, allora* ord e = car A.

Infatti, poiché (cfr. [7], p. 74):

$$qe = 0 \quad \text{se e solo se} \quad qx = 0 \ \forall\, x \in A \qquad (q \in I),$$

la conclusione segue subito dalle (2) e (4)-(3″).

Ciò premesso, proviamo che (v. n.⁰ 1):

IX. *Se $E_s(A) \neq \emptyset$, allora* car A = car $A/Z_s(A)$.

Infatti, se $e \in E_s(A)$, risulta intanto

$$qe = 0 \quad \text{se e solo se} \quad qe \in Z_s(A) \qquad (q \in I), \tag{5}$$

poiché $qe \in Z_s(A)$ implica appunto $qe = q(ee) = (qe)e = 0$. D'altra parte (si pensi all'omomorfismo canonico di A sopra $A/Z_s(A)$ ricordando la I): $qe \in Z_s(A)$ se e solo se $qE_s(A) = Z_s(A)$, quindi (per la (5)):

$$qe = 0 \quad \text{se e solo se} \quad qE_s(A) = Z_s(A) \qquad (q \in I),$$

---

7) A^+ denota (qui e nel seguito) il gruppo additivo dell'anello A ([7], p. 50, cfr. [11], p. 62).

donde (v. (2)): ord $e =$ ord $E_s(A)$. E da questa segue appunto la conclusione, in base alle VI e VIII.

3. Osserviamo ora che (v. n.° 1):

X. *Se* $E_s(A) \neq \emptyset$, *e se* A' *è un sottoanello di* A, *allora*:

$$E_s(A) \subseteq A' \quad \text{implica} \quad Z_s(A) \subseteq A'.$$

Infatti, se $e \in E_s(A)$, sappiamo che (v. I): $E_s(A) = e + Z_s(A)$, da cui (cfr. [7], p. 38): $Z_s(A) = -e + E_s(A)$, donde appunto la conclusione.

XI. *Se* $E_s(A) \neq \emptyset$, *e se* A' *è un sottoanello di* A *contenente* $E_s(A)$:

$$E_s(A) \subseteq A' \subseteq A,$$

allora risulta

$$E_s(A) = E_s(A'), \qquad Z_s(A) = Z_s(A').$$

Infatti (si ricordi la X), è chiaro intanto che

$$E_s(A) \subseteq E_s(A'), \qquad Z_s(A) \subseteq Z_s(A').$$

Sia $e \in E_s(A)$ ($\subseteq A'$). Allora $e' \in E_s(A')$ ($\subseteq A'$), cioè $e'x' = x' \;\forall\; x' \in A'$, implica $e'e = e$ ($\in E_s(A)$), donde (per la V) $e' \in E_s(A)$, quindi appunto

$$E_s(A') \subseteq E_s(A),$$

mentre $z' \in Z_s(A')$ ($\subseteq A'$), cioè $z'x' = 0 \;\forall\; x' \in A'$, implica $z'e = 0$ ($\in Z_s(A)$), donde (per la V) $z' \in Z_s(A)$, quindi appunto

$$Z_s(A') \subseteq Z_s(A).$$

Possiamo ora riassumere i risultati fin qui ottenuti (nei n.[i] 1-3) nel seguente

TEOREMA 1: *Supponiamo che non sia vuoto l'insieme* $E_s(A)$ *delle identità sinistre* (n.° 1) *di un anello* A, *e denotiamo con* $Z_s(A)$ *l'annichilatore sinistro* (n.° 1) *di* A.

Allora $E_s(A)$ *è un laterale dell'ideale* $Z_s(A)$ *di* A *(quindi i due insiemi* $E_s(A)$ *e* $Z_s(A)$ *sono equipotenti).* $E_s(A)$ *è l'identità* (bilatera) *dell'anello quoziente* $A/Z_s(A)$ (il cui zero è $Z_s(A)$), *e le caratteristiche dei due anelli* A *ed* $A/Z_s(A)$ *sono eguali. Inoltre l'anello* $A/Z_s(A)$ *non è nullo* (n.^{0} 1), *se* (e solo se) *l'anello* A *non è nullo.*

Infine $E_s(A)$ *e* $Z_s(A)$ *coincidono rispettivamente con l'insieme* $E_s(A')$ *delle identità sinistre e con l'annichilatore sinistro* $Z_s(A')$ *di ogni sottoanello* A' *di* A *che contenga* $E_s(A)$.

4. Diremo che un anello A è *E_s-generato*, se l'insieme $E_s = E_s(A)$ delle sue identità sinistre (n.^{0} 1) non è vuoto:

$$E_s(A) \neq \varnothing ,$$

e se inoltre A è generato da $E_s(A)$ [8]:

$$A = [[E_s(A)]].$$

Diremo che un anello A è *1-generato*, se A è dotato di una identità (bilatera) 1, cioè ([7], p. 22, 3^0 capov., p. 55, ex. 6) se $E_s(A)$ contiene uno e un solo elemento (l'identità 1):

$$E_s(A) = \{1\} ,$$

e se inoltre A è generato da 1:

$$A = [[1]].$$

La struttura degli anelli 1-generati è ben nota. Ricordiamo infatti che (v. ad es. [7], pp. 70-71):

XII. *Se un anello* A *è 1-generato, allora* (v. n.^{0} 2) [9]:

$$A \cong I/(\text{car } A).$$

---

[8]) Se M è un sottoinsieme di un anello A, denoteremo con $[[M]]$ il sottoanello di A generato da M ([7], p. 63), e con $[[a]]$ il sottoanello di A generato da $a \in A$ (cioè generato da $M = \{a\}$: cfr. [7], pp 103, 31)

[9]) $\cong$ significa : isomorfo.

Viceversa, se $A \cong I/(m)$, *con* $0 \leq m \in I$, *allora* A *è 1-generato e* car $A = m$.

La XII si può esprimere dicendo che, per ogni intero $m \geq 0$, esiste uno e (a meno di isomorfismi) un solo anello 1-generato di caratteristica m: l'anello $I/(m)$ degli interi modulo m.

Poiché un anello 1-generato non è altro che un anello E_s-generato con $|E_s| = 1$ (cioè contenente una sola identità sinistra), è natnrale porsi il problema di determinare la struttura degli anelli E_s-generati con $|E_s| > 1$ (cioè contenenti almeno due identità sinistre). Allo studio di questo problema è appunto dedicato il presente lavoro.

Proviamo che (v. n.[i] 1 e 2):

XIII. *Sia* $E_s(A) \neq \emptyset$. *Allora* A *è* E_s*-generato se, e solo se,* $A/Z_s(A)$ *è 1-generato.*

Infatti, consideriamo l'omomorfismo canonico f di A sopra $A/Z_s(A)$. Se B è un qualsiasi sottoanello di A contenente $Z_s(A)$, allora l'applicazione

$$Z_s(A) \subseteq B \longrightarrow f(B) = B/Z_s(A)$$

è notoriamente una biiezione dell'insieme dei sottoanelli di A che contengono $Z_s(A)$ sull'insieme di tutti i sottoanelli di $A/Z_s(A)$ ([5], p. 127, Théor. 4); ed è chiaro (ricordando le I e X) che

(6) $$E_s(A) \subseteq B \quad \text{se e solo se} \quad E_s(A) \in f(B).$$

Dalla (6) risulta che: A è l'unico sottoanello di A contenente $E_s(A)$ se, e solo se, $A/Z_s(A)$ $(= f(A))$ è l'unico sottoanello di $A/Z_s(A)$ contenente la sua identità $E_s(A)$ (si ricordi la VI). Ma ciò prova appunto la XIII ([7], p. 63).

XIV. *Sia* $E_s(A) \neq \emptyset$. *Allora* A *è* E_s*-generato se, e solo se,* $A/Z_s(A) \cong I/(\text{car } A)$.

Infatti, ciò segue immediatamente dalle IX, XII e XIII.

XV. *Se* A *è* E_s*-generato, allora* $A/Z_s(A)$ *è 1-generato. Ma il viceversa non è vero.*

In base alla XIII (che prova la 1ª affermazione) la 2ª affermazione della XV equivale a dire che: Esiste un anello A con

(7) $$E_s(A) = \emptyset$$

(cioè privo di identità sinistre) e tale che

(8) $$A/Z_s(A) \quad \text{è} \quad 1\text{-generato}.$$

Infatti un qualsiasi zero-anello [10]) non nullo A soddisfa evidentemente le (7) e (8). Un esempio meno banale di anello A soddisfacente le (7) e (8) è l'anello prodotto (cartesiano) $A = B \times C$ ([5], p. 129), con B anello degli interi modulo 2 e C zero-anello di ordine 2, come subito si verifica. Più in generale, non è difficile verificare che ogni anello prodotto $A = B \times C$, con B anello E_s-generato e C zero-anello non nullo arbitrari, soddisfa le (7) e (8) (i due esempi precedenti son casi particolari di quest'ultimo).

5. Proviamo che (v. n.^{i} 1, 2, 4):

XVI. *Se* $e \in E_s(A)$, *allora* e *è l'identità* (bilatera) *di* $[[e]]$, *per il quale risulta* [11]):

(9) $$Ie = [[e]] \cong I/(\text{car } A).$$

Infatti, poiché $e^2 = e$, si ha

(10) $$(q_1 e)(q_2 e) = (q_1 q_2) e \qquad \forall\ q_1, q_2 \in I,$$

donde appunto l'eguaglianza (9), e quindi la prima affermazione poiché il sottoanello $[[e]]$ di A risulta commutativo (v. (10)). Infine l'isomorfismo (9) si ottiene subito dalle VIII e XII.

XVII. *Se* A *è un anello* E_s*-generato ed* $e \in E_s(A)$, *allora* [12]):

(11) $$A^+ = [[e]]^+ \oplus Z_s(A)^+.$$

---

[10]) Chiamiamo *zero-anello* ([7], p. 74, cfr. [5], p. 115) un anello A in cui $xy = 0 \ \forall\ x, y \in A$. Com'è ben noto, ogni gruppo abeliano è il gruppo additivo A^+ di uno zero-anello A.

[11]) Se A è un anello, ed $a \in A$, denoteremo con Ia l'insieme di tutti gli elementi qa di A ($q \in I$), (cfr. [7], p. 71). Ia è dunque l'insieme degli elementi del sottogruppo (ciclico) di A^+ generato da a.

[12]) $\oplus$ denota somma diretta.

Infatti, $e \in E_s(A)$ implica intanto (si pensi all'omomorfismo canonico di A sopra $A/Z_s(A)$ ricordando la I):

$$(12) \qquad qe \in qE_s(A) \qquad \forall\ q \in I.$$

D'altra parte, poiché A è E_s-generato, allora (v. XV) $A/Z_s(A)$ è 1-generato, quindi notoriamente risulta (si ricordi la VI):

$$(13) \qquad A/Z_s(A) = IE_s(A).$$

Se $a \in A$, allora $a \in a + Z_s(A) \in A/Z_s(A)$, quindi (per la (13)) esiste un $q \in I$ tale che (v. (12)):

$$a + Z_s(A) = qE_s(A) = qe + Z_s(A),$$

e perciò $a \in qe + Z_s(A)$, ossia esiste pure uno $z \in Z_s(A)$ tale che

$$(14) \qquad a = qe + z\,;$$

poiché $qe \in Ie$, ciò appunto significa che intanto (v. (9)): $A^+ = [[e]]^+ + Z_s(A)^+$. Per provare che questa somma è diretta, basta dunque provare che

$$[[e]] \cap Z_s(A) = \{0\}.$$

E invero, se $x \in [[e]] \cap Z_s(A)$, allora (v. (9)) esiste un $q' \in I$ tale che $x = q'e \in Z_s(A)$, da cui (per la (5) del n.^{0} 2) segue appunto $x = q'e = 0$. Dunque la (11) è provata.

XVIII. *Sia A un anello E_s-generato ed $e \in E_s(A)$. Allora $[[e]]$ coincide con l'ideale* (principale) *sinistro di A generato da e* ([7], p. 77);

$$(15) \qquad [[e]] = Ae.$$

$[[e]]$ non è un ideale destro di A se, e solo se, $|E_s(A)| > 1$.

Infatti, se $a \in A$, allora vale la (14) con $q \in I$, $z \in Z_s(A)$, quindi $ae = (qe + z)\,e = (qe)\,e + ze = qe + 0$, cioè

$$(14') \qquad ae = qe,$$

ossia $Ae \subseteq Ie$, donde appunto la (15) (v. (9)). Inoltre, se $[[e]]$ è un ideale destro di A, allora esso contiene tutti i prodotti $ex = x$ $(x \in A)$, quindi $[[e]] = A$, quindi (v. XVI e [7], p. 22, 3° capov.) $|E_s(A)| = 1$; viceversa, se $|E_s(A)| = 1$, allora $A = [[e]]$, quindi $[[e]]$ è un ideale destro di A.

XIX. *Se A è E_s-generato ed $e \in E_s(A)$, allora la* (11) *coincide con la «decomposizione sinistra di Peirce» dell'anello A relativa all'elemento idempotente e di A* (v. [8], p. 48).

Infatti, ciò è appunto provato dalla (15) e dal fatto che $Z_s(A)$ coincide evidentemente (poiché $e \in E_s(A)$) col sottoinsieme di A costituito da tutte le differenze $a - ae$ $(a \in A)$.

In base ai risultati ottenuti in questo n.° 5, vale dunque il seguente

TEOREMA 2: *Sia A un anello generato dall'insieme $E_s(A)$, supposto non vuoto, delle sue identità sinistre* (n.ⁱ 1, 4):

$$A = [[E_s(A)]],$$

ed e sia una fissata identità sinistra di A:

$$e \in E_s(A).$$

Allora l'anello A è somma diretta gruppale (cfr. [5], p. 131) *del suo sottoanello Ie* (generato da e), *isomorfo ad $I/(\mathrm{car}\, A)$* ($I =$ anello dei numeri interi, $0 \leq \mathrm{car}\, A =$ caratteristica di A), *e del suo annichilatore sinistro $Z_s(A)$* (n.° 1). *L'anello A è dunque l'insieme di tutte le somme:*

$$qe + z \qquad (q \in I,\ z \in Z_s(A)), \tag{16}$$

per le quali si hanno le seguenti regole di calcolo $(q_1, q_2 \in I, z_1, z_2 \in Z_s(A))$:

$$q_1 e + z_1 = q_2 e + z_2 \tag{17}$$

se, e solo se, valgono entrambe le seguenti (17′):

$$q_1 \equiv q_2 \,(\mathrm{mod\ car}\, A), \quad z_1 = z_2\,; \tag{17′}$$

$$(q_1 e + z_1) + (q_2 e + z_2) = (q_1 + q_2) e + (z_1 + z_2); \tag{18}$$

$$(q_1 e + z_1)(q_2 e + z_2) = (q_1 q_2) e + q_1 z_2. \tag{19}$$

Da questo teorema 2 si ottiene subito il seguente

COROLLARIO: *Affinché due anelli E_s-generati* (n.° 4) *A ed A' siano isomorfi, è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le due seguenti condizioni* (n.^i 2, 1):

$$\operatorname{car} A = \operatorname{car} A' \tag{20}$$

$$Z_s(A) \cong Z_s(A'). \tag{21}$$

Infatti, la necessità è evidente. Per provare la sufficienza delle (20), (21), basta osservare che, se f è un isomorfismo di $Z_s(A)$ sopra $Z_s(A')$, fissati a piacere $e \in E_s(A)$ ed $e' \in E_s(A')$ (n.° 1), allora la corrispondenza

$$qe + z \longrightarrow qe' + f(z) \qquad (q \in I,\ z \in Z_s(A))$$

risulta appunto (in virtù del teor. 2 e della (20)) un isomorfismo di A sopra A'.

6. In base al teorema 2, la struttura di un anello E_s-generato (n.° 4) è del tutto nota, quando sia nota la struttura additiva del suo annichilatore sinistro (n.° 1) $Z_s(A)$ (si osservi infatti che $Z_s(A)$, essendo uno zero-anello, è univocamente determinato dal suo gruppo additivo $Z_s(A)^+$). Naturalmente (v. VII e (4)):

$$\operatorname{esp} Z_s(A)^+ \mid \operatorname{car} A, \tag{22}$$

(questa (22) vale anche per un anello A qualsiasi). Ebbene, a parte la necessaria condizione (22), vedremo in questo n.° che la struttura del gruppo abeliano $Z_s(A)^+$ può essere del tutto arbitraria. Ciò verrà provato dal seguente teorema 3, il quale da un lato è un teorema d'immersione (di un qualsiasi zero-anello come annichilatore sinistro in un anello E_s-generato), d'altro lato è appunto un teorema di esistenza (di anelli E_s-generati aventi caratteristiche ed annichilatori sinistri arbitrari, a parte la (22)).

TEOREMA 3: *Sia Z uno zero-anello* [10]) *qualsiasi, ed $m \geq 0$ sia un qualsiasi multiplo* (intero) *della sua caratteristica* (n.° 2):

$$\text{car}\, Z \mid m. \tag{23}$$

Allora esiste un anello E_s-generato (n.° 4) *A, il cui annichilatore sinistro $Z_s(A)$* (n.° 1) *è isomorfo a Z, e la cui caratteristica è m:*

$$Z_s(A) \cong Z, \qquad \text{car}\, A = m. \tag{24}$$

Tale anello E_s-generato A è univocamente determinato, a meno di isomorfismi, dallo zero-anello Z e dall'intero m soddisfacenti la (23), *e contiene esattamente $|Z|$* [2]) *identità sinistre* (n.° 1):

$$|E_s(A)| = |Z|. \tag{25}$$

Ammessa l'esistenza di un tale anello A, le ultime due affermazioni del teor. 3 seguono immediatamente dal precedente corollario (n.° 5) e dalla II (n.° 1). L'esistenza di un tale A (e quindi la prova del teorema 3) risulta poi della seguente proposizione XX.

XX. *Siano dati uno zero-anello Z ed un numero intero $m \geq 0$ soddisfacenti la* (23). *Allora l'insieme prodotto cartesiano* ($I/(m)$ = anello degli interi modulo m):

$$(I/(m)) \times Z \tag{26}$$

è un anello, che denotiamo con A, rispetto alle seguenti addizione e moltiplicazione ($q_i \in I$, $\overline{q_i} = q_i + (m) \in I/(m)$, $z_i \in Z$; $i = 1, 2$):

$$(\overline{q}_1, z_1) + (\overline{q}_2, z_2) = (\overline{q}_1 + \overline{q}_2, z_1 + z_2), \tag{27}$$

$$(\overline{q}_1, z_1)(\overline{q}_2, z_2) = (\overline{q}_1\, \overline{q}_2, q_1 z_2), \tag{28}$$

(dove $\overline{q}_1 + \overline{q}_2$ e $\overline{q}_1\, \overline{q}_2$ sono calcolati nell'anello $I/(m)$, $z_1 + z_2$ e $q_1 z_2$ nel gruppo Z^+). *Questo anello A è E_s-generato* (n.° 4) *e soddisfa le due condizioni* (24).

Infatti, che l'insieme (26) sia un gruppo abeliano rispetto alla (27) è ben noto (si tratta del gruppo prodotto cartesiano dei gruppi $(I/(m))^+$ e Z^+: [5], p. 73).

Osserviamo allora che $(q_1, q'_1 \in I, z_2 \in Z)$:

$$q_1 \equiv q'_1 \pmod m \text{ implica } q_1 z_2 = q'_1 z_2,$$

poiché (in virtù dell'ipotesi (23)): $\operatorname{ord} z_2 \mid m$ (n.° 2); quindi il 2° membro della (28) è univocamente determinato dai due fattori a 1° membro, cioè la (28) definisce effettivamente una moltiplicazione nell'insieme (26). Si verifica facilmente che tale moltiplicazione (28) è associativa, e che essa è distributiva, a sinistra e a destra, rispetto all'addizione (27), provando così la prima affermazione della XX.

È chiaro che $(\overline{1}, 0)$ $(0 =$ zero di $Z)$ è una identità sinistra dell'anello A così ottenuto (anzi è chiaro che le identità sinistre di A sono le $|Z|$ coppie $(\overline{1}, z_1)$, con z_1 arbitrario $\in Z$) e che $\operatorname{ord}(\overline{1}, 0) = m$ (n.° 2); quindi appunto (v. VIII):

$$E_s(A) \neq \varnothing, \qquad \operatorname{car} A = m. \tag{29}$$

È pure chiaro (poiché $\overline{0}$ è l'unico annullatore sinistro dell'anello $I/(m)$: v. II) che $Z_s(A)$ è costituito dalle $|Z|$ coppie $(\overline{0}, z_1)$, con z_1 arbitrario $\in Z$, e che la biiezione $(\overline{0}, z_1) \longrightarrow z_1$ è un isomorfismo di $Z_s(A)$ sopra lo zero-anello Z; quindi appunto

$$Z_s(A) \cong Z.$$

Infine l'applicazione $(\overline{q}_1, z_1) \longrightarrow \overline{q}_1$ è evidentemente un omomorfismo dell'anello A sopra l'anello $I/(m)$, il cui nucleo è $Z_s(A)$; quindi $A/Z_s(A) \cong I/(\operatorname{car} A)$ (v. (29)), e perciò appunto (v. XIV) A è E_s-generato. Dunque la XX è provata. Si osservi che l'eguaglianza

$$(\overline{q}, z) = q(\overline{1}, 0) + (\overline{0}, z),$$

valida per ogni $(\overline{q}, z) \in A$, non è altro che la decomposizione (14), relativa ad $e = (\overline{1}, 0) \in E_s(A)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALBERT, A. A.: *Fundamental concepts of higher algebra,* The University of Chicago Press (1956).

[2] BAER, R.: *Inverses and zero-divisors,* Bull. Amer. Math. Soc., vol. 48, pp. 630-638 (1942).

[3] BAER, R.: *Kriterien für die Existenz eines Einselements in Ringen,* Math. Zeitschrift, Bd. 56, pp. 1-17 (1952).

[4] BARSOTTI, I: *Appunti di algebra,* Università di Pisa (1965).

[5] BOURBAKI, N.: *Algèbre, Chap.* 1, Hermann (1958).

[6] BOURBAKI, N.: *Théorie des ensembles, Chap. III,* Hermann (1956).

[7] JACOBSON, N: *Lectures in abstract algebra, Vol. I,* Van Nostrand (1951).

[8] JACOBSON, N.: *Structure of rings,* Amer. Math. Soc. (1956).

[9] KHAN, N. A.: *The characteristic of a ring,* The Amer. Math. Monthly, Vol. 70, p. 736 (1963).

[10] MCCOY, N. H.: *Rings and ideals,* The Math. Assoc. of America (1948).

[11] RÉDEI, L.: *Algebra, Teil 1,* Akad. Verlagsg. (1959).

[12] SCOTT, W. R.: *Group theory,* Prentice-Hall (1964).

[13] ZASSENHAUS, H. J.: *The theory of groups,* Chelsea (1958).

Manoscritto pervenuto in redazione il 18 luglio 1967.