RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SERGIO SPAGNOLO

Una caratterizzazione degli operatori differenziali autoaggiunti del 2° ordine a coefficienti misurabili e limitati

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 56-64

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__56_0>

UNA CARATTERIZZAZIONE DEGLI OPERATORI DIFFERENZIALI AUTOAGGIUNTI DEL 2° ORDINE A COEFFICIENTI MISURABILI E LIMITATI.

SERGIO SPAGNOLO *)

Sono state più volte date delle caratterizzazioni astratte di carattere generale degli operatori differenziali lineari (vedi ad es. [3], [4]); in questa nota viene caratterizzata una classe particolare di operatori differenziali aventi notevole interesse per la teoria delle equazioni alle derivate parziali (cfr. [1] e [2]), precisamente gli operatori del tipo:

$$\sum_{1}^{n}{}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

dove i coefficienti a_{ij} sono funzioni reali misurabili e limitate.

Questa ricerca mi è stata proposta dal Prof. E. de Giorgi che ringrazio per gli utili colloqui avuti sull'argomento.

NOTAZIONI. n è un numero intero ≥ 1; $\mathbf{R}^n$ è lo spazio euclideo n-dimensionale.

Se $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ è una n-pla di interi ≥ 0, si pone:

$$|r| = r_1 + \dots + r_n$$

$$D^r = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{r_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{r_n}$$

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca per la matematica del C N.R.

Indirizzo dell'A.: Scuola Normale Superiore. Pisa.

Per ogni k intero ≥ 0, si considerano gli spazi lineari sul corpo *reale* :

$\mathcal{C}_0^k = \mathcal{C}_0^k(\mathbf{R}^n)$ (risp. : $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$) = spazio delle funzioni reali su $\mathbf{R}^n$ con derivate di ordine $\leq k$ (risp. : di ogni ordine) continue ed aventi supporto compatto.

$\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ è lo spazio delle distribuzioni reali su $\mathbf{R}^n$.

Per k intero ≥ 1 :

$L^k = L^k(\mathbf{R}^n)$ (risp. : $L^\infty = L^\infty(\mathbf{R}^n)$) = spazio delle funzioni reali misurabili su $\mathbf{R}^n$ aventi la k-ma potenza sommabile (risp. : essenz. limitate).

$$H^1 = H^1(\mathbf{R}^n) = \left\{ u \in L^2 : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2 \, ; j = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Tutti questi spazi si intendono dotati delle usuali strutture topologiche.

Una forma bilineare α agente su spazi di distribuzioni si dice *locale* se

$$\alpha(u, v) = 0 \quad \text{quando} \quad \operatorname{supp}(u) \cap \operatorname{supp}(v) = \emptyset .$$

Diremo che α è *D-locale* se è verificata la condizione più forte :

$$\alpha(u, v) = 0 \quad \text{quando} \quad \operatorname{supp}(\operatorname{grad} u) \cap \operatorname{supp}(\operatorname{grad} v) = \emptyset .$$

L'applicazione

$$(u, v) \rightsquigarrow \sum_{1}^{n}{}_{ij} \int_{\mathbf{R}^n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx \qquad (a_{ij} \in L^\infty)$$

definisce una forma bilineare e continua su $H^1 \times H^1$, simmetrica se $a_{ij} = a_{ji}$, che è certamente D-locale.

Mostreremo (Teorema 1) che questa è l'espressione più generale di una forma bilineare, continua, simmetrica e D locale su $H^1 \times H^1$, e caratterizzeremo poi (Teorema 2) il caso in cui le matrici $\| a_{ij}(x) \|$ hanno (per quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$) spettro contenuto in un comune intervallo $[\lambda_0 , \Lambda_0]$ con $\lambda_0 > 0$.

TEOREMA 1. « *Sia* $\alpha : H^1 \times H^1 \to \mathbf{R}$ *una forma bilineare, continua e simmetrica, tale che* $\alpha(u_1, u_2) = 0$ *quando* $u_1, u_2 \in \mathcal{D}$ *sono tali che* u_1 *è costante in un intorno del supporto di* u_2.

Allora α *ammette la seguente rappresentazione :*

$$\alpha(u, v) = \sum_{1}^{n}{}_{ij} \int_{\mathbf{R}^n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \qquad u, v \in H^1 \tag{1}$$

per certe funzioni $a_{ij} \in L^\infty$ *tali che* $a_{ij} = a_{ji}$ ».

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la restrizione di α a $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$: si tratta di una forma bilineare e separatamente continua (che indicheremo ancora α) e pertanto rappresentabile in virtù del *teorema dei nuclei* di Schwartz ([4]) nel modo seguente :

$$\alpha(u, v) = \langle T, u \otimes v \rangle \qquad u, v \in \mathcal{D}$$

dove $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^{2n})$ e $(u \otimes v)(x, y) = u(x) \cdot v(y)$.

Ma la nostra ipotesi su α implica in particolare che $\alpha(u, v) = 0$ quando u e v sono tali che $\operatorname{supp}(u) \cap \operatorname{supp}(v) = \emptyset$ e da questo segue facilmente che la distribuzione T ha supporto contenuto nella diagonale Δ di $\mathbf{R}^{2n}$.

Si ha allora, tenendo conto che Δ è un *supporto regolare* ([5], Teor. XXXIV) :

$$T = \Sigma_{pq} D_x^p D_y^q \mu_{pq}$$

dove $\{\mu_{pq}\}$ è una famiglia *loc. finita* (cioè su ogni parte compatta di $\mathbf{R}^{2n}$ si ha $\mu_{pq} \equiv 0$ per $|p| + |q|$ abbastanza grande) di misure aventi supporto in Δ.

Proiettando le μ_{pq} su $\mathbf{R}_x^n$ (1) si arriva all'espressione

$$\alpha(u, v) = \Sigma_{pq} \langle \tilde{\mu}_{pq}, D^p u \cdot D^q v \rangle$$

---

1) Se σ è una di tali misure, indicheremo $\tilde{\sigma}$ la sua proiezione, cioè la misura $\mathbf{R}^n$ definita dall'espressione

$$\langle \tilde{\sigma}, w \rangle = \langle \sigma, \tilde{w} \rangle \qquad w \in \mathcal{C}_0^0(\mathbf{R}^n)$$

essendo $\tilde{w}(x, y)$ una qualsiasi funzione continua su $\mathbf{R}^{2n}$ tale che

$$\tilde{w}(x, x) = w(x) \qquad \forall x.$$

e quindi alla

$$\alpha(u, v) = \Sigma_r \langle T_r, D_r u \cdot v \rangle \qquad u, v \in \mathcal{D} \tag{2}$$

dove $\{T_r\}$ è una famiglia loc. finita di distribuzioni su $\mathbf{R}^n$.

Mostreremo ora che la continuità della α, e cioè l'esistenza di una costante $M > 0$ per cui

$$| \alpha(u, v) \leq M \| u \|_{H^1} \| v \|_{H^1} \qquad \forall\, u, v \in \mathcal{D} \tag{3}$$

implica

$$T_r = 0 \qquad \text{per } |r| > 2.$$

In corrispondenza di un'arbitraria $w \in \mathcal{D}$, scegliamo una $\psi \in \mathcal{D}$ tale che $\psi \equiv 1$ in un intorno di $\operatorname{supp}(w)$, e, per ogni vettore $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbf{R}^n$ con $\eta_j \geq 1$, $\forall j$, consideriamo le funzioni

$$\begin{cases} u_\eta(x) = \psi(x) \operatorname{sen} \langle \eta, x \rangle \\ v_\eta(x) = w(x) \cos \langle \eta, x \rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{u}_\eta(x) = \psi(x) \cos \langle \eta, x \rangle \\ \tilde{v}_\eta(x) = -\, w(x) \operatorname{sen} \langle \eta, x \rangle . \end{cases}$$

Si ha allora

$$\| u_\eta \|^2_{H^1}, \quad \| v_\eta \|^2_{H^1}, \quad \| \tilde{u}_\eta \|^2_{H^1}, \quad \| \tilde{v}_\eta \|^2_{H^1} \leq C \, | \eta |^2$$

(essendo $|\eta|^2 = \langle \eta, \eta \rangle$) dove la costante C dipende solo da w e da ψ.

D'altra parte, osservando che $u_\eta \equiv \operatorname{sen} \langle \eta, x \rangle$ e $\tilde{u}_\eta \equiv \cos \langle \eta, x \rangle$ in un intorno di $\operatorname{supp}(w)$, si ricava dalla (2):

$$\alpha(u_\eta, v_\eta) + \alpha(\tilde{u}_\eta, \tilde{v}_\eta) = \sum_{|r| \text{ dispari}} (-1)^{\frac{|r|-1}{2}} \langle T_r, w \rangle \eta^r .$$

La (3) conduce allora alla diseguaglianza, valida per ogni $\eta \in \mathbf{R}^n$ con $\eta_j \geq 1$,

$$\left| \sum_{|r| \text{ dispari}} (-1)^{\frac{|r|-1}{2}} \langle T_r, w \rangle \eta^r \right| \leq 2\, MC \, |\eta|^2$$

da cui segue che tutte le parti omogenee di grado > 2 del polinomio nella η che compare al 1^0 membro (la somma è finita perchè la famiglia $\{T_r\}$ è loc. finita) sono identicamente nulle, e quindi:

$$\langle T_r , w \rangle = 0 \qquad \text{per } |r| \text{ dispari } > 2.$$

In modo analogo (scegliendo $u_\eta = \psi \cos \langle \eta, x \rangle$, $v_\eta = w \cos \langle \eta, x \rangle$, $\tilde{u}_\eta = \psi \operatorname{sen} \langle \eta, x \rangle$, $\tilde{v}_\eta = w \operatorname{sen} \langle \eta, x \rangle$) si ottiene:

$$\langle T_r , w \rangle = 0 \qquad \text{per } |r| \text{ pari } > 2.$$

Data l'arbitrarietà di w si ha pertanto $T_r = 0$ per $|r| > 2$, cioè:

$$\alpha(u, v) = \sum_{|r| \leq 2} \langle T_r , D^r u \cdot v \rangle.$$

Utilizzando ora l'ipotesi che α è una forma simmetrica, si ha

$$\alpha(u, v) = \frac{1}{2} (\alpha(u, v) + \alpha(v, u)) = \frac{1}{2} \sum_{|r| \leq 2} \langle T_r , D^r u \cdot v + u \cdot D^r v \rangle.$$

Ma essendo:

$$D^r (u \cdot v) = D^r u \cdot v + u \cdot D^r v \qquad \text{per } |r| = 1$$

$$D^r (u \cdot v) = D^r u \cdot v + u \cdot D^r v + \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

$$\text{per } r = (0, \dots , \underset{(i)}{1}, \dots , 0, \dots , \underset{(j)}{1}, \dots , 0)$$

si ricava

$$\alpha(u, v) = \frac{1}{2} \sum_{|r| \leq 2} (-1)^{|r|} \langle D^r T_r , u \cdot v \rangle + \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{ij} \langle T_{ij} + T_{ji}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \rangle$$

$$= \langle A, u \cdot v \rangle + \sum_{1}^{n}{}_{ij} \langle B_{ij} , \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \rangle ,$$

dove A e B_{ij} sono distribuzioni su $\mathbf{R}^n$ e $B_{ij} = B_{ji}$.

Se ora, per ogni $u \in \mathcal{D}$, si sceglie $\tilde{u} \in \mathcal{D}$ in modo che $\tilde{u} \equiv 1$ in un intorno di supp (u), si ottiene $u \tilde{u} = u$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} = 0$; ne segue, per l'ipotesi che α è D-locale, $0 = \alpha(u, \tilde{u}) = \langle A, u \rangle$ e quindi, data l'arbitrarietà di u, :

$$A = 0.$$

Il teorema sarà allora interamente provato se si mostrerà che le B_{ij} sono delle funzioni misurabili ess. limitate su $\mathbf{R}^n$.

Infatti in tal caso l'espressione

$$(u, v) \rightsquigarrow \sum_{1}^{n}{}_{ij} \int_{\mathbf{R}^n} B_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx$$

definisce manifestamente una forma bilineare e continua su $H^1 \times H^1$ che coincide con la α su $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ e quindi su tutto $H^1 \times H^1$.

Resta quindi da provare il seguente

Lemma. *Sia* $\alpha : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ *un'applicazione bilineare tale che,* $\forall\, u, v \in \mathcal{D}$:

(i) $$\alpha(u, v) = \sum_{1}^{n}{}_{ij} \langle B_{ij}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \rangle \qquad B_{ij} = B_{ji} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$$

(ii) $$|\alpha(u, v)| \leq M \| u \|_{H^1} \| v \|_{H^1}.$$

Allora si ha $B_{ij} \in L^\infty \qquad \forall i, j.$

Dimostrazione (del Lemma).

In corrispondenza di una $w \in \mathcal{D}$ $(w \neq 0)$ e agli interi $k, s \in \{1, 2, \dots, n\}$, definiamo le funzioni seguenti:

$$w_1(x) = \frac{1}{\varrho} w(x) \operatorname{sen}(\varrho x_k) \operatorname{sen}(\varrho x_s)$$

$$w_2(x) = -\frac{1}{\varrho} w(x) \cos(\varrho x_k) \cos(\varrho x_s)$$

$$w_3(x) = \frac{1}{\varrho} w(x) \operatorname{sen}(\varrho x_k) \cos(\varrho x_s)$$

$$w_4(x) = \frac{1}{\varrho} w(x) \cos(\varrho x_k) \operatorname{sen}(\varrho x_s)$$

dove $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ e $\varrho = \dfrac{\| w \|_{H^1}}{\| w \|_{L^2}}$.

Si ottiene allora con facili calcoli:

$$\| w_j \|^2_{H^1} \leq 4 \| w \|^2_{L^2} + \frac{2}{\varrho^2} \| w \|^2_{H^1} = 6 \| w \|^2_{L^2} \qquad j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\alpha(w_1, w_2) + \alpha(w_3, w_4) = \langle B_{ks}, w^2 \rangle$$

da cui per la (ii)

$$| \langle B_{ks}, w^2 \rangle | \leq 12\, M \| w \|^2_{L^2} = 12\, M \| w^2 \|_{L^1}.$$

Si ha in conclusione la maggiorazione seguente:

$$(4) \qquad | \langle B_{ks}, \varphi \rangle | \leq C \| \varphi \|_{L^1} \qquad \forall\, \varphi = w^2 \text{ con } w \in \mathcal{D}.$$

Ma ogni $u \in \mathcal{D}$ che sia ≥ 0 è limite, in $\mathcal{D}$, di una successione di funzioni del tipo w^2 con $w \in \mathcal{D}$ $\Big[$scelta invero una $\psi \in \mathcal{D}$, $\psi \geq 0$, che valga 1 in un intorno di supp(u) si ha che $\left\{\left(\psi \cdot \sqrt{u + \frac{1}{j}}\right)^2\right\} \xrightarrow{j} u\Big]$; pertanto la (4) vale per tutte le $\varphi \in \mathcal{D}$ che sono ≥ 0 e quindi anche per tutte le $\varphi \in \mathcal{D}$.

Ciò implica che il funzionale B_{ks} si estende con continuità allo spazio L^1, i. e. $B_{ks} \in L^\infty$.

Facendo variare fra 1 ed n gli interi k, s si ottiene la tesi del Lemma e quindi del Teorema 1.

Osserviamo infine che, nel caso che la forma α sia coercitiva, i coefficienti a_{ij} della rappresentazione (1) si possono ulteriormente precisare.

TEOREMA 2. « *Se α è come nell'enunciato del Teor. 1 e inoltre*:

$$(5) \qquad \Lambda_0 \sum_1^n{}_j \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2} \geq \alpha(u, u) \geq \lambda_0 \sum_1^n{}_j \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2} \qquad \forall\, u \in \mathcal{D} \;\; (\lambda_0 > 0)$$

le a_{ij} che compaiono nella rappresentazione (1) *della forma α, sono tali che*

$$(6) \qquad \Lambda_0 \, | \xi |^2 \geq \sum_1^n{}_{ij}\, a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq \lambda_0 \, | \xi |^2$$

per ogni $\xi \in \mathbf{R}^n$ e per quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$ ».

DIMOSTRAZIONE: Poichè le *funzioni a scalino* sono dense in L^∞, basta provare il Teorema nel caso particolare che le a_{ij} siano funzioni a scalino.

La (6) equivale al fatto che, per quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$, la matrice $\| a_{ij}(x) \|$ ha tutti i suoi autovalori compresi fra λ_0 e Λ_0.

Proviamo che essi sono $\geq \lambda_0$, l'altra prova essendo analoga.

Supponiamo per assurdo che esista un sottoinsieme S di $\mathbf{R}^n$ di misura non-nulla tale che per ogni $x \in S$ la matrice $\| a_{ij}(x) \|$ ha un autovalore $< \lambda_0$.

Restringendo eventualmente S, possiamo supporre che le funzioni $a_{ij}(x)$ abbiano su S il valore costante $a_{ij}^{(0)}$; indichiamo $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di $\| a_{ij}^{(0)} \|$ e supponiamo ad esempio che $\lambda_1 < \lambda_0$.

Non è inoltre restrittivo supporre S compatto.

Fissato $\varepsilon > 0$, sia S_ε un aperto contenente S e tale che mis $(S_\varepsilon - S) \leq \varepsilon$. Si ottiene allora dalla (5):

$$\sum_{1}^{n}{}_{ij} \int_S a_{ij}^{(0)} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx \geq \lambda_0 \sum_{1}^{n}{}_{j} \int_S \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 dx - \varepsilon K \sum_{1}^{n}{}_{j} \sup_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2$$

per ogni $u \in \mathcal{D}$ con supp $(u) \subseteq S_\varepsilon$ (la cost. K dipendendo solo dalle a_{ij}).

Eseguendo il cambiamento di coordinate $\mu : x \leadsto y = Mx$, dove M è una matrice ortogonale che diagonalizza la $\| a_{ij}^{(0)} \|$, e ponendo $T = \mu(S)$, $T_\varepsilon = \mu(S_\varepsilon)$, tale diseguaglianza diventa:

$$(7) \qquad \sum_{1}^{n}{}_{j} \lambda_j \int_T \left| \frac{\partial u}{\partial y_j} \right|^2 dy \geq \lambda_0 \sum_{1}^{n}{}_{j} \int_T \left| \frac{\partial u}{\partial y_j} \right|^2 dy - \varepsilon K \sum_{1}^{n}{}_{j} \sup_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{\partial u}{\partial y_j} \right|^2$$

per ogni $u \in \mathcal{D}$ con supp $(u) \subseteq T_\varepsilon$.

Scelta ora una $w \in \mathcal{D}$ tale che $|w| \leq 1$, $w \equiv 0$ su $\mathbf{R}^n - T_\varepsilon$, $w \equiv 1$ in un intorno di T, applichiamo la (7) alle funzioni

$$u_k(y) = \frac{1}{k} w(y) \operatorname{sen}(k y_1)$$

$$v_k(y) = -\frac{1}{k} w(y) \cos(k y_1).$$

Sommando membro a membro le due diseguaglianze relative allo stesso valore di k, ed osservando che

$$\sum_{1}^{n}{}_j \left(\left| \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_k}{\partial y_j} \right|^2 \right) = w^2 + \frac{1}{k^2} \sum_{1}^{n}{}_j \left| \frac{\partial w}{\partial y_j} \right|^2$$

si ha:

$$\lambda_1 \operatorname{mis}(T) \geq \lambda_0 \operatorname{mis}(T) - \varepsilon K \left(1 + \frac{1}{k^2} \sum_{1}^{n}{}_j \sup_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{\partial w}{\partial y_j} \right|^2 \right).$$

Da ciò, dividendo per mis (T) e passando al limite per $k \longrightarrow +\infty$, segue

$$\lambda_1 \geq \lambda_0 - \varepsilon K$$

che porta, data l'arbitrarietà di ε, ad una contraddizione con l'ipotesi fatta $\lambda_1 < \lambda_0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] DE GIORGI, E. « *Sulla differenziabilità e l'analicità degli estremali degli integrali multipli regolari* ». Mem. Acad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) 3 (1957) 25-43.

[2] NASH, J. « *Parabolic equations* ». Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A 43 (1957) 754-758.

[3] PEETRE, J. « *Rectification à l'article : Une caractérisation abstraite des operateurs differentiels* ». Math. Scand. Vol. 7 Fasc. 1 (1960) 116-120.

[4] SCHWARTZ, L. « *Espaces de functions différentiables à valeurs vectorielles* ». J. d'Analyse Math. 4 (1954-55) 88-148.

[5] SCHWARTZ, L. « *Théorie des distributions* ». t. 1. Paris, Hermann, 1951.

[Pervenuto alla redazione il 20 marzo 1967].