RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

TULLIO VALENT

Qualche proprietà dei sistemi di vettori applicati possibili applicazioni alla teoria matematica dell'elasticità

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 47-55

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__47_0>

QUALCHE PROPRIETÀ DEI SISTEMI DI VETTORI APPLICATI POSSIBILI APPLICAZIONI ALLA TEORIA MATEMATICA DELL'ELASTICITÀ

Tullio Valent *)

Dopo aver messo in evidenza qualche proprietà dei sistemi di vettori applicati, indico la possibilità di una caratterizzazione di tipo integrale dei vettori del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi.

Ciò può riuscire utile in una teoria di tipo integrale della Meccanica dei continui, in particolare nella teoria matematica dell'equilibrio elastico, per la possibilità, tra l'altro, di dimostrare l'invertibilità del teorema di Menabrea, in presenza di vincoli anche unilaterali.

1. Sia X un sottoinsieme limitato misurabile [1]) dello spazio euclideo tridimensionale $S_{(3)}$ — in particolare X può essere una superficie, una linea, oppure anche un insieme finito di punti di $S_{(3)}$ — e μ una misura finita in X.

Prendiamo in considerazione l'insieme dei *vettori* definiti in X *del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi*, cioè del tipo

$$a + b \wedge OP,$$

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico - Università - Padova.

[1]) Cfr. P. Halmos, *Measure Theory*, Van Nostrand 1965.

essendo a, b vettori costanti, O un punto prefissato di $S_{(3)}$, P il punto variabile in X, e l'insieme dei vettori v definiti in X tali che

$$\int_X v\, d\mu = 0, \quad \int_X v \wedge OP\, d\mu = 0$$

che chiameremo, con ovvia generalizzazione del termine, *equilibrati* in X.

È immediato che

(a) *se un vettore definito in X è ortogonale in media a ogni vettore del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi, esso è equilibrato in X.*

Dimostriamo che, viceversa,

(b) *se un vettore definito in X è ortogonale in media a ogni vettore equilibrato in X, esso è, quasi ovunque in X, del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi.*

Facciamo vedere innanzitutto che, preso un qualunque vettore [2]) u definito in X, esso si può esprimere in uno e un sol modo come somma di un vettore del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi e di un vettore equilibrato in X.

A tale scopo scriviamo u nella forma

$$u = a + b \wedge OP + w, \tag{1}$$

con a, b vettori costanti e osserviamo che è possibile determinare a e b in modo che w risulti equilibrato in X.

Se si sceglie, com'è possibile, il punto O tale che risulti

$$\int_X OP\, d\mu = 0, \tag{2}$$

la condizione

$$\int_X w\, d\mu = 0$$

---

[2]) per il quale abbiano senso gli integrali contenuti in (3), (4). A tale condizione certamente soddisfano i vettori di quadrato sommabile, come pure quelli di cui si fa cenno nell'enunciato.

è soddisfatta se

$$a = \frac{1}{\mu(X)} \int_X u \, d\mu, \tag{3}$$

mentre la condizione

$$\int_X w \wedge OP \, d\mu = 0$$

è soddisfatta, come facilmente si verifica, se

$$b = -\, \sigma_X^{-1} \left(\int_X u \wedge OP \, d\mu \right) \tag{4}$$

essendo σ_X l'omografia invertibile [3])

$$\left\| \begin{matrix} \int_X (x_2^2 + x_3^2)\, d\mu & -\int_X x_1 x_2 \, d\mu & -\int_X x_1 x_3 \, d\mu \\ -\int_X x_1 x_2 \, d\mu & \int_X (x_1^2 + x_3^2)\, d\mu & -\int_X x_2 x_3 \, d\mu \\ -\int_X x_1 x_3 \, d\mu & -\int_X x_2 x_3 \, d\mu & \int_X (x_1^2 + x_2^2)\, d\mu \end{matrix} \right\| \tag{5}$$

ove x_1, x_2, x_3 esprimono le coordinate di OP in un riferimento cartesiano ortogonale.

L'unicità di una tale rappresentazione di u segue, poi, dal fatto che solo il vettore nullo è contemporaneamente equilibrato in X e del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi.

---

[3]) Naturalmente, il riferimento cartesiano ortogonale può essere scelto in modo che la (5) divenga una matrice diagonale. Nell'unico caso eccezionale che X sia un sottoinsieme di una retta, per l'invertibilità della σ_X e l'applicabilità del metodo basta rinunciare alla (2) scegliendo O fuori di X.

Ciò premesso, sia v un vettore definito in X ortogonale in media a ogni vettore equilibrato in X: si abbia cioè

$$\int_X v \times q \, d\mu = 0$$

per ogni vettore q equilibrato in X. Supposto v espresso nella forma (1), si ha, in particolare,

$$\int_X v \times w \, d\mu = \int_X w^2 \, d\mu = 0$$

ossia $w = 0$ quasi ovunque e quindi $v = a + b \wedge OP$ quasi ovunque.

La proprietà dimostrata e la reciproca sono suscettibili di un interessante significato meccanico e forniscono una caratterizzazione di tipo integrale dei vettori del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi.

Precisamente: *un vettore è del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi se e solo se il lavoro, relativo ad esso, di ogni sistema di forze equilibrato è nullo.*

Basta infatti pensare che l'integrale

$$\int_X v \times q \, d\mu \tag{6}$$

esprime il lavoro del sistema di forze q definite in X, in corrispondenza allo spostamento v, qualora la misura μ sia assegnata in maniera opportuna (in relazione all'insieme X e alla natura del sistema di forze q ivi applicate).

Così, ad esempio, se X è uu insieme finito di punti, $P_1, P_2, \dots P_n$, e q è un sistema di n forze applicate in essi, (*sistema particellare*), l'integrale (6) ha il significato di un lavoro se μ è la funzione caratteristica di X, cioè

$$\mu(P_i) = 1, \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Se X è una superficie misurabile secondo Lebesgue od una linea, q è costituito da un sistema di forze distribuite e da forze concentrate in alcuni punti, e μ è la somma della misura di Lebesgue e della misura che vale 1 nei punti di applicazione delle forze concentrate ed è nulla fuori, l'integrale (6) esprime ancora il lavoro del sistema di forze q in corrispondenza allo spostamento v.

2. Sia ora $X = \Sigma$ un sottoinsieme limitato misurabile del piano e Σ_1, Σ_2 due sottoinsiemi misurabili di Σ siffatti che

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \quad \mu(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = 0, \quad \mu(\Sigma_1) > 0.$$

Sia N il versore della normale orientata al piano.

Dimostriamo che [4])

(c) *se un vettore v definito in Σ verifica le*

$$\int_{\Sigma_1} qN \times v \, d\mu = 0, \qquad \int_{\Sigma_2} qN \times v \, d\mu \geq 0 \tag{7}$$

per ogni vettore qN della classe, diciamola K, *dei vettori definiti ed equilibrati in Σ, paralleli a N in Σ_1, paralleli e concordi a N in Σ_2, si ha quasi ovunque*

$$\begin{cases} (v \times N)\, N = \text{vettore del tipo degli spostamenti rigidi} \\ \qquad\qquad\quad \text{infinitesimi in } \Sigma_1, \\ v \times N \geq 0 \qquad\qquad \text{in } \Sigma_2. \end{cases} \tag{8}$$

Cominciamo con l'osservare che ogni vettore [5]) uN, parallelo a N, definito in Σ_1 è somma di un vettore del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi parallelo a N e di un vettore equilibrato in Σ_1, pure parallelo a N, questi due vettori essendo univocamente individuati dal vettore uN.

---

[4]) Questa proprietà potrebbe non essere vera per certi tipi di misure μ, ma è senz'altro vera, come vedremo, per le misure più comuni e di interesse concreto.

[5]) vale la considerazione della nota ([2]).

Se poniamo, infatti,

$$uN = a + b \wedge OP + w,$$

con a e b vettori costanti e O tale che risulti

$$\int_{\Sigma_1} OP\, d\mu = 0,$$

troviamo che $w = uN - a - b \wedge OP$ risulta equilibrato in Σ_1 quando

$$a = \frac{1}{\mu(\Sigma_1)} N \int_{\Sigma_1} u\, d\mu, \quad b = -\sigma_{\Sigma_1}^{-1}\left(N \wedge \int_{\Sigma_1} u\, OP\, d\mu\right),$$

essendo σ_{Σ_1} l'omografia [6]) (5) relativa a Σ_1. Si riconosce subito che il vettore $a + b \wedge OP$ risulta parallelo a N, in quanto O appartiene al piano di Σ_1 e, di conseguenza, anche w è parallelo a N.

Dal fatto, poi, che la (7.1), che può scriversi

$$\int_{\Sigma_1} qN \times (v \times N)\, N\, d\mu = 0$$

deve valere, in particolare, per ogni qN equilibrato in Σ_1, e che $(v \times N)\, N$ è, in Σ_1, somma di un vettore del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi e di un vettore equilibrato in Σ_1 parallelo a N, discende che $(v \times N)\, N$ è, quasi ovunque in Σ_1, un vettore del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi.

La dimostrazione è valida anche se $\Sigma \equiv \Sigma_1$.

La (8.2) si deduce dalla (7.2) in maniera immediata, sfruttando il fatto che, almeno per i tipi di misura più comuni, (e, in particolare, per tutte le misure che ci possono interessare cade [7])), si ha che

---

[6]) Valgono considerazioni analoghe a quelle della nota ([3]).

[7]) Tale fatto è ovviamente vero, infatti, se Σ_1 è un insieme finito di punti e μ è la sua funzione caratteristica (almeno quando Σ_1 contiene tre punti non allineati); così pure è vero se Σ_1 è una superficie e μ è la misura di Lebesgue, oppure la somma della misura di Lebesgue e della misura che vale 1 in alcuni punti di Σ_1 ed è nulla fuori di essi.

ogni vettore parallelo e concorde a N definito in Σ_2 può essere equilibrato da un vettore parallelo a N definito in Σ_1.

Se fosse, infatti, $v \times N < 0$ in un sottoinsieme $\bar{\Sigma}$ di Σ_2 di misura non nulla, preso un vettore $\bar{q}N$ della classe K non nullo in $\bar{\Sigma}$ e nullo in $\Sigma_2 - \bar{\Sigma}$, si avrebbe

$$\int_{\Sigma_2} \bar{q} N \times v \, d\mu = \int_{\bar{\Sigma}} \bar{q} N \times v \, d\mu < 0$$

contro la (7.2).

3. Le proprietà *b*) e *c*) dimostrate nei paragrafi precedenti trovano immediata applicazione in problemi connessi con una impostazione di tipo integrale della teoria linearizzata dell'equilibrio elastico, e, in particolare, laddove si voglia dimostrare la ***possibilità di inversione del teorema di Menabrea per i corpi vincolati.*** [8])

Nel caso dell'incastro, o più in generale quando è assegnato lo spostamento $u = \bar{u}$, su una parte, Σ, della frontiera del corpo, (ove si suppongano i vincoli capaci di esplicare qualsiasi reazione), si dimostra che lo stress reale minimizza, nella classe di tutti gli stress in equilibrio con le forze attive di massa e superficiali assegnate, il funzionale

$$A(Y) = \int_C W(Y) \, dC - \int_{\Sigma} \Phi \times \bar{u} \, d\Sigma \, ,$$

essendo C la configurazione di equilibrio del corpo, $W(Y)$ la forma quadratica definita positiva, nelle componenti Y_{rs} dello stress, che esprime l'energia potenziale elastica e Φ una reazione vincolare.

Se u' è lo spostamento indotto dallo stress minimizzante $A(Y)$, posto $v = u' - \bar{u}$, la condizione di minimo di $A(Y)$ impone che si

---

[8]) G. Grioli, *Problemi d'integrazione e formulazione integrale del problema fondamentale dell'elastostatica;* Atti del Simposio Internazionale sulle Applicazioni dell'Analisi alla Fisica Matematica, Cagliari-Sassari, 28-IX — 4-X 1964; Ed. Cremonese-Roma.

Le proprietà avanti dimostrate sono solo enunciate nel lavoro citato.

abbia

$$\int_{\Sigma} q \times v \, d\Sigma = 0$$

per ogni vettore q equilibrato su Σ, ossia l'ortogonalità in media, su Σ, del vettore v a tutti i vettori q equilibrati su Σ.

Ebbene, la proprietà b) permette di concludere che v è un vettore del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi quasi ovunque su Σ, cioè che lo spostamento u' coincide con lo spostamento prefissato $\overline{u}$ quasi ovunque, (a meno di un inessenziale vettore del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi). In altri termini: lo stress minimizzante $A(Y)$ dà luogo a spostamenti che soddisfano quasi ovunque alle condizioni imposte dal vincolo o prefissate.

Nel caso del vincolo di appoggio unilaterale liscio con supporto rigido si trova che il funzionale minimizzato dallo stress reale, nella classe di tutti gli stress in equilibrio con le forze attive di massa e superficiali assegnate che dànno luogo, sulla parte Σ della frontiera ove esiste il vincolo superficiale, a reazioni parallele e concordi alla sua normale interna N, è il seguente:

$$B(Y) = \int_{C} W(Y) \, dC$$

Sia Y'_{rs} lo stress minimizzante $B(Y)$, Φ' la corrispondente reazione vincolare e risulti

$$\Phi' \begin{cases} = \Phi' N, \; (\Phi' > 0), & \text{su } \Sigma_1 \\ = 0 \quad , & \text{su } \Sigma_2 ; \end{cases} \tag{9}$$

sia inoltre u' lo spostamento indotto dallo stress Y'_{rs}.

Se l'appoggio è piano, dalla condizione di minimo di $B(Y)$ si deduce che lo spostamento u' deve soddisfare proprio alla condizione espressa dalle (7). Ne segue, in virtù della proprietà c), che quasi ovunque risulta, (a meno di un inessenziale vettore del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi).

$$u' \times N = 0, \quad \text{su } \Sigma_1 ; \; u' \times N \geq 0, \quad \text{su } \Sigma_2 ,$$

che, insieme alle (9), esprimono la condizione di appoggio unilaterale.

La proprietà *c*) permette di invertire il teorema di Menabrea anche nel caso che l'appoggio unilaterale piano si supponga *elasticamente cedevole*: anche in questo caso, infatti, dalla condizione di minimo del funzionale esprimente il teorema di Menabrea, si ottiene, per lo spostamento, una condizione del tipo (7).

Resta in tale modo dimostrata la completa inversione del teorema di Menabrea, nei casi dell'incastro e dell'appoggio unilaterale piano, anche quando — in quest'ultimo caso — non si escluda la possibilità di distacco del corpo da una parte, Σ_2, della superficie Σ di appoggio.

Manoscritto pervenuto in redazione il 31 maggio 1967