RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO CHIFFI

Teoremi di prolungamento e continuità per correnti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 376-388

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__376_0>

TEOREMI DI PROLUNGAMENTO E CONTINUITÀ PER CORRENTI

ANTONIO CHIFFI *)

Le correnti sono una generalizzazione del concetto di integrale su una varietà regolare orientata; pertanto ha senso chiedersi se talune questioni, nate nell'ambito di questa teoria, siano proponibili per le correnti.

Abbiamo provato allora a studiare le correnti su forme esterne a coefficienti limitati e continui rispetto a gruppi di variabili separatamente, pervenendo così ad un ampliamento e ad un approfondimento di questioni poste nell'ambito della integrazione su varietà [1]). Si noti che in 2.10 e 2.11 viene volutamente adottato per le correnti un linguaggio proprio delle varietà.

DEFINIZIONE 1.1. Siano n e k due interi con $0 < k < n$; sia $\Lambda(k, n)$ l'insieme di tutte le funzioni λ crescenti definite sui primi k interi e a valori nei primi n interi:

$$\lambda : \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}.$$

Ad ogni tale λ corrisponde una proiezione ortogonale:

$$p^\lambda : R^n \longrightarrow R^k$$

---

*) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica Applicata Università di Padova.

[1]) Cfr. [St], § 1 a pag. 34.

così definita per $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$:

$$p^\lambda (x) = (x_{\lambda(1)}, \dots, x_{\lambda(k)}).$$

DEFINIZIONE 1.2. Sia L_k la misura esterna di Lebesgue in R^k e sia μ_k la misura esterna definita sui sottoinsiemi di R^n associando ad ogni $I \subset R^n$ il numero reale esteso:

$$\mu_k (I) = \sum_{\lambda \in \Lambda(k, n)} L_k (p^\lambda (I)).$$

Diremo che una funzione reale f definita in R^n è *μ_k-quasi continua* se ad ogni numero reale $\varepsilon > 0$ si può associare un insieme A aperto di misura esterna μ_k minore di ε e tale che la restrizione di f a $R^n - A$ sia continua.

Ricordiamo che [2]) condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione f definita in R^n sia μ_k - quasi continua è che essa sia continua separatamente rispetto ad ogni gruppo di $(n - k)$ variabili, cioè che per ogni $\lambda \in \Lambda(k, n)$ e per L_k - quasi ogni $y \in R^k$ la restrizione della f all'insieme $[p^\lambda]^{-1} (y)$ sia continua.

DEFINIZIONE 1.3. Seguiamo, per le forme differenziali $\varphi \in E^k (R^n)$ di grado k e di classe ∞ su R^n e per le correnti $T \in E_k (R^n)$, le definizioni e il simbolismo di [F F], ad eccezione del simbolo *diesis* (*sharp*) che, per ragioni tipografiche, sarà sostituito da un asterisco $*$.

Diremo per brevità che una forma differenziale φ di grado k su R^n è una k-forma limitata [di Baire; μ_s-quasi continua; continua] se i coefficienti di φ sono funzioni limitate [di Baire; μ_s-quasi continue; continue]. Se la k-forma φ è limitata, la sua massa $M(\varphi)$ è finita.

Si può prolungare la definizione di una corrente T, di massa $M(T)$ finita, alla classe delle k-forme φ di Baire localmente limitate e si ha: $| T(\varphi) | \leq M(T) \cdot M(\varphi)$.

DEFINIZIONE 1.4. Diremo che una corrente $T \in E_k (R^n)$ è *quasi normale* [3]) se ad ogni numero positivo $\varepsilon > 0$ si può associare una corrente normale $Q \in E_k (R^n)$ tale che $M(T - Q) < \varepsilon$.

---

[2]) Cfr. [St], 1.III a pag. 32.

[3]) Cfr. [C], def. 1.2 a pag. 189.

LEMMA 1.5. *Sia $T \in E_n(R^n)$ una corrente quasi normale n dimensionale; esiste una funzione reale ψ, definita in R^n e ivi sommabile e a supporto compatto, tale che $T = \mathbf{C}\,\psi$. Viceversa, se ψ è una funzione sommabile e a supporto compatto, la corrente $T = \mathbf{C}\,\psi$ è quasi normale.*

Esiste, per definizione di corrente quasi normale, una successione (T_h) di correnti normali $T_h \in E_n(R^n)$ tali che

$$\lim_{h \to \infty} M(T_h - T) = 0. \tag{1.1}$$

e ad ogni corrente T_h si può associare [4]) una funzione sommabile e a supporto compatto ψ_h tale che $T_h = \mathbf{C}\,\psi_h$ e si ha, per la (1.1):

$$\lim_{h,\, m \to \infty} \int_{R^n} | \psi_h - \psi_m | \, dx = 0 \tag{1.2}$$

e si può supporre [5]) che i supporti delle funzioni ψ_h siano contenuti in uno stesso insieme compatto. Dalle (1.1) e (1.2) segue allora che esiste una funzione ψ, sommabile e a supporto compatto, tale che $T = \mathbf{C}\,\psi$.

Viceversa, se ψ è una funzione sommabile e a supporto compatto, esiste una successione di funzioni $(\psi_h)_{h \in N}$ continue con le loro derivate prime in R^n e a supporto compatto, tali che

$$\lim_{h \to \infty} \int_{R^n} | \psi_h - \psi | \, dx = 0.$$

Posto $T = \mathbf{C}\,\psi$ e $T_h = \mathbf{C}\,\psi_h$, risulta verificata la (1.1) e le funzioni T_h risultano normali perchè è:

$$M(\partial T_h) = \int_{R^n} | \operatorname{grad} \psi_h | \, dx < \infty.$$

---

4) Cfr. [F F], 6.4 a pag. 485.

5) Cfr. [C], 1.7 a pag. 190.

LEMMA 1.6. *Se $T \in E_k(R^n)$ è quasi normale, per ogni insieme di Borel B di misura esterna μ_k nulla, la misura $\| T \|$, variazione totale di T, è nulla.*

Sia B un insieme di Borel con $\mu_k(B) = 0$. Detta $\omega_k \in E^k(R^k)$ la forma differenziale $\omega_k = dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k$, per ogni $\varphi \in E^k(R^n)$ si può) scrivere:

$$\varphi = \sum_{\lambda \in \Lambda(k, n)} \varphi_\lambda \wedge p^{\lambda *}(\omega_k)$$

con $\varphi_\lambda \in E^0(R^n)$; ed anche

$$(1.3) \qquad (T \cap B)(\varphi) = \sum_\lambda (T \cap B)(\varphi_\lambda \wedge p^{\lambda *}(\omega_k)) =$$

$$= \sum_\lambda (T \wedge p^{\lambda *}(\omega_k) \cap B)(\varphi_\lambda).$$

Detta A_λ l'immagine inversa dell'insieme $p^\lambda(B)$ secondo l'applicazione p^λ, si ha subito [6])

$$(1.4) \qquad (T \wedge p^{\lambda *}(\omega_k) \cap A_\lambda)(\varphi_\lambda) = \{[p^\lambda_*(T \wedge \varphi_\lambda)] \cap p^\lambda(B)\}(\omega_k)$$

La corrente $p^\lambda_*(T \wedge \varphi_\lambda) \in E_k(R^k)$ è quasi normale [7]) e, per il lemma 1.5, esiste la funzione sommabile ψ_λ tale che $p^\lambda_*(T \wedge \varphi_\lambda) = \mathrm{C}\, \psi_\lambda$. Dalla (1.4) segue allora:

$$(T \wedge p^{\lambda *}(\omega_k) \cap A_\lambda)(\varphi_\lambda) = \int_{p^\lambda(B)} \psi_\lambda \wedge \omega_k = 0$$

da cui:

$$T \wedge p^{\lambda *}(\omega_k) \cap A_\lambda = 0$$

ed anche, essendo $B \subset A_\lambda$:

$$(1.5) \qquad T \wedge p^{\lambda *}(\omega_k) \cap B = 0.$$

Dalle (1.3) e (1.5) segue: $\| T \| (B) = 0$.

---

[6]) Cfr. [F F], 2.5 a pag. 465.

[7]) Cfr. [C], 2.8 a pag. 198.

LEMMA 1.7. *Se $T \in E_k(R^n)$ è quasi normale, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni insieme di Borel B con $\mu_k(B) < \delta$ si ha $\| T \| (B) < \varepsilon$.*

Il lemma 1.7 segue subito dal lemma 1.6, ragionando per assurdo.

LEMMA 1.8. Se *$T \in E_k(R^n)$ è quasi normale, la misura $\| T \|$ è assolutamente continua rispetto alla misura di Hausdorff H^k.*

Infatti se B è un insieme di Borel con $H^k(B) = 0$, si ha pure: $\mu_k(B) = 0$ e, per il lemma 1.6, $\| T \| (B) = 0$.

TEOREMA 1.9. Sia *$T \in E_k(R^n)$ quasi normale; è possibile prolungare in modo unico la definizione della corrente T alle forme μ_k-quasi continue e limitate.*

Se φ è una k-forma μ_k-quasi continua e limitata su R^n, esiste un numero $L > 0$ tale che: $M(\varphi) \leq L$; fissato un intero i, si può determinare un insieme aperto A_i, con $\mu_k(A_i) < 1/i$, tale che la forma φ sia continua in $R^n - A_i$. Sia φ_i una k forma continua su R^n, uguale a φ nell'insieme chiuso $R^n - A_i$, con $M(\varphi_i) \leq L$ [8]. La corrente quasi normale $T \in E_k(R^n)$ è definita sulla k-forma continua φ_i e si ha, per ogni coppia di indici i e j:

$$| T(\varphi_i) - T(\varphi_j) | = | [T \cap (A_i \cup A_j)] (\varphi_i - \varphi_j) | \leq 2L \| T \| (A_i \cup A_j).$$

Dal lemma 1.7 segue poi che, fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, esiste un intero $m > 0$, tale che per ogni coppia di indici i e j entrambi maggiori di m, si ha:

$$| T(\varphi_i) - T(\varphi_j) | \leq 2L\, \varepsilon. \tag{1.6}$$

La (1.6) assicura l'esistenza del limite della successione $(T(\varphi_i))_{i \in N}$ e si può porre:

$$T(\varphi) = \lim_{i \to \infty} T(\varphi_i). \tag{1.7}$$

Il limite indicato in (1.7) è poi indipendente dalla particolare successione (φ_i) scelta (e quindi anche dalla particolare successione

---

[8]) Cfr. [M S], a pag. 842.

(A_i) scelta) perchè, se $(\varphi_{1,i})$ e $(\varphi_{2,i})$ sono due tali successioni, la successione :

$$\{T(\varphi_{1,1}),\ T(\varphi_{2,1}),\ T(\varphi_{1,2}),\ T(\varphi_{2,2}), \dots\}$$

risulta pure convergente.

OSSERVAZIONE 1.10. Nelle ipotesi del teorema 1.9, per ogni k-forma φ μ_k-quasi continua e limitata, si ha : $|T(\varphi)| \leq M(T)\, M(\varphi)$.

OSSERVAZIONE 1.11. Se la successione $(T_h)_{h \in N}$ di correnti $T_h \in E_k(R^n)$ di massa finita converge debolmente verso la corrente $T \in E_k(R^n)$ e se è : $\sup\{M(T_h) : h = 1, 2 \dots\} < \infty$, allora è noto che T è di massa finita e che per ogni k-forma continua φ si ha :

$$\lim_{h \to \infty} T_h(\varphi) = T(\varphi). \tag{1.8}$$

Se invece φ è una k-forma μ_k-quasi continua e limitata, e le correnti T_h e T sono quasi normali, la (1.8) può non valere, come si può vedere con facili esempi. Nel teorema seguente vengono stabilite condizioni sufficienti per la validità della (1.8).

TEOREMA 1.12. *Se la successione $(T_h)_{h \in N}$ di correnti quasi normali $T_h \in E_k(R^n)$ converge debolmente alla corrente quasi normale $T \in E_k(R^n)$ e se le misure $\| T_h \|$ $(h = 1, 2, \dots)$, sono equiassolutamente continue rispetto alla misura k-dimensionale di Hausdorff H^k, allora, per ogni k-forma φ μ_k-quasi continua e limitata, si ha :*

$$\lim_{h \to \infty} T_h(\varphi) = T(\varphi).$$

Fissato il numero $\varepsilon > 0$, determiniamo $\sigma > 0$ tale che per ogni insieme di Borel B, con $\mu_k(B) < \sigma$, si abbia (cfr. lemma 1.8) : $\| T \|(B) < \varepsilon$ e $\| T_h \|(B) < \varepsilon$ per ogni h.

Sia A_σ un insieme aperto, con $\mu_k(A_\sigma) < \sigma$ e tale che in $R^n - A_\sigma$ la k-forma φ risulti continua [9]. Sia φ_σ una k-forma continua su R^n, uguale a φ in $R^n - A_\sigma$ e tale che, se è : $M(\varphi) \leq L$, risulti

[9] Loc. cit. [8].

pure $M(\varphi_\sigma) \leq L$. Per l'osservazione 1.11 si potrà determinare un indice h' tale che per $h > h'$ si abbia:

$$| T_h(\varphi_\sigma) - T(\varphi_\sigma) | < \varepsilon.$$

Con facili calcoli si ottiene allora, per $h > h'$:

$$\begin{aligned} | T_h(\varphi) - T(\varphi) | \leq | [T_h \cap A_\sigma](\varphi - \varphi_\sigma) | + | T_h(\varphi_\sigma) - T(\varphi_\sigma) | + \\ + | [T \cap A_\sigma](\varphi_\sigma - \varphi) | \leq 2L \| T_h \| (A_\sigma) + \varepsilon + \\ + 2L \| T \| (A_\sigma) < (4L + 1)\varepsilon \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

§ 2. — In questo paragrafo stabiliremo alcuni risultati sulle sezioni delle correnti quasi normali, i quali ci permetteranno di rendere più espressive le ipotesi contenute nel teorema 1.12.

E' nota [10]) la definizione di *sezione* di una corrente normale; tale definizione si può estendere facilmente alle correnti quasi normali nel modo seguente:

DEFINIZIONE 2.1. Sia $T \in E_k(R^n)$ una corrente quasi normale; s un intero $\leq k$; sia $f: R^n \longrightarrow R^s$ una funzione localmente lipschitziana; sia $\theta: R^s \longrightarrow R^1$ una funzione non negativa, nulla al di fuori della sfera $\{z : z \in R^s, |z| \leq 1\}$, con $\theta(z) = \theta(-z)$ e $\int_{R^k} \theta(z)\, dz = 1$; sia $(\theta_h)_{h \in N}$ una successione di funzioni così definite: $\theta_h(z) = h^s \theta(hz)$; sia $\tau_y: R^s \longrightarrow R^s$, con $y \in R^s$, la traslazione così definita: $\tau_y(z) = \tau(y - z)$; sia, al solito, ω_s la s-forma: $dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_s$.

Per ogni $\psi \in E^{k-s}(R^n)$ risulta definita [11]) la corrente quasi normale $f_*(T \wedge \psi) \in E_s(R^s)$; sia $y \in R^s$; se esiste il limite:

$$\lim_{h \to \infty} (-1)^{s(k-s)} [f_*(T \wedge \psi) \wedge \omega_s](\theta_h \circ \tau_y) \tag{2.1}$$

---

10) Cfr. [F], 3.5 a pag. 49.
11) Cfr. [C], 2.8 a pag. 198

qualunque sia $\psi \in E^{k-s}(R^n)$, se tale limite è indipendente dalla particolare funzione θ, esso si dirà sezione della corrente T con la varietà $f = y$ e si indicherà col simbolo $\langle T, f, y \rangle$.

TEOREMA 2.2. *Sia $T \in E_k(R^n)$ quasi normale, $s \leq k$,* e *$f: R^n \longrightarrow R^s$ localmente lipschitziana; in tali ipotesi per L_s - quasi ogni $y \in R^s$ esiste la corrente $\langle T, f, y \rangle$ ed essa risulta di massa finita.*

Anche in questo caso basta constatare che può essere estesa la dimostrazione dell'esistenza delle sezioni delle correnti normali.

Poniamo, per $g: R^s \longrightarrow R^1$ continua e non negativa:

$$\nu_f(g) = \sup \{[f_*(T \wedge \psi) \wedge \omega_s](g) : \psi \in E^{k-s}(R^n), M(\psi) \leq 1\}.$$

Sia D un insieme numerabile di $E^{k-s}(R^n)$, denso rispetto alla massa M; esiste un insieme $N \subset R^s$, di misura L_s nulla, tale che per $y \in R^s - N$ e per ogni $\psi \in D$ esistono [12] finite le derivate generali delle misure $f_*(T \wedge \psi) \wedge \omega_s$, nonchè la derivata generale della misura ν_f; tali derivate si possono definire nel modo seguente:

$$\lim_{h \to \infty} [f_*(T \wedge \psi) \wedge \omega_s](\theta_h \circ \tau_y) = d_\psi(y) \tag{2.2}$$

$$\lim_{h \to \infty} \nu_f(\theta_h \circ \tau_y) = d(y) \tag{2.3}$$

e sono indipendenti dalla particolare funzione θ. Dalla (2.2) e (2.3) segue, con un facile calcolo, che il limite (2.1) esiste per $y \in R^s - N$ e per ogni $\psi \in E^{k-s}(R^n)$ e si ha:

$$\langle T, f, y \rangle(\psi) = (-1)^{s(k-s)} d_\psi(y) \tag{2.4}$$

$$M(\langle T, f, y \rangle) \leq d(y). \tag{2.5}$$

COROLLARIO 2.3. *Nelle ipotesi del teorema 2.2 si ha per L_s-quasi ogni $y \in R^s$:*

$$\text{supporto } \langle T, f, y \rangle \subset [\text{supporto } T] \cap f^{-1}(y). \tag{2.6}$$

La (2.6) si ottiene considerando il supporto della corrente $S_h(\psi) = [f_*(T \wedge \psi) \wedge \omega_s](\theta_h \circ \tau_y)$ e passando poi al limite per $h \longrightarrow \infty$.

---

[12]) Cfr. [S], cap. IV

COROLLARIO 2.4. *Nelle ipotesi del teorema* 2.1 *si ha:*

$$\nu_f(R^s) = \int_{R^s} M(\langle T, f, y \rangle)\, dy. \tag{2.7}$$

Per il lemma 1.5 la misura $f_*(T \wedge \psi) \wedge \omega_s$ è assolutamente continua rispetto a L_s; da (2.2) e (2.4) segue, indicando con lo stesso simbolo R^s e la sua funzione caratteristica, per ogni $\psi \in E^{k-s}(R^n)$:

$$[f_*(T \wedge \psi) \wedge \omega_s](R^s) = \int_{R^s} \langle T, f, y \rangle (\psi)\, dy. \tag{2.8}$$

Dalla (2.8) segue subito:

$$\nu_f(R^s) \leq \int_{R^s} M(\langle T, f, y \rangle)\, dy \tag{2.9}$$

mentre dalle (2.3) e (2.5) segue la disuguaglianza opposta alla (2.9).

COROLLARIO 2.5. *Nelle ipotesi del teorema* 2.2, *per L_s-quasi ogni $y \in R^s$ la corrente $\langle T, f, y \rangle$ è quasi normale.*

Se (T_h) è una successione di correnti normali k dimensionali di R^n tali che:

$$\lim_{h \to \infty} M(T_h - T) = 0$$

dal corollario 2.4 segue che:

$$\lim_{h \to \infty} \int_{R^s} M(\langle T - T_h, f, y \rangle)\, dy = 0$$

ed anche, per L_s-quasi ogni $y \in R^s$ e per una sottosuccessione $(T_{h'})$:

$$\lim_{h' \to \infty} M(\langle T - T_{h'}, f, y \rangle) = 0. \tag{2.10}$$

Dalla (2.10), tenuto conto che le sezioni delle correnti normali sono, per L_s-quasi ogni y, normali [13]), segue quanto asserito.

[13]) Cfr. [F], 3.5 a pag. 49.

DEFINIZIONE 2.6. Diremo che la corrente quasi normale $T \in E_k(R^n)$ è una *corrente a sezione* δ se per ogni $\lambda \in \Lambda(k, n)$ e per L_k-quasi ogni $y \in R^k$ esistono un numero finito di punti $x_1, x_2, \dots, x_{m(\lambda, y)}$ di R^n e gli interi $a_1, \dots, a_{m(\lambda, y)}$ tali che si abbia:

$$\langle T, p^\lambda, y \rangle = \sum_i a_i \delta_{x_i} \tag{2.11}$$

dove δ_x è la corrente di $E_0(R^n)$ così definita per ogni $\varphi \in E^0(R^n)$:

$$\delta_x(\varphi) = \varphi(x).$$

DEFINIZIONE 2.7. Se $T \in E_k(R^n)$ e $x \in R^n$, ricordiamo che con $\theta^k(\|T\|, x)$ si indica la $\|T\|$-densità k-dimensionale di R^n nel punto x, vale a dire il limite, se esiste:

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\|T\|(\{z : |z - x| < r\})}{\alpha(k)\, r^k}$$

dove $\alpha(k) = L_k(\{u : u \in R^k,\ |u| < 1\})$.

LEMMA 2.8. *Una corrente $T \in E_k(R^n)$ rettificabile è una corrente a sezione δ.*

Una corrente rettificabile $T \in E_k(R^n)$ è evidentemente quasi normale, per cui per ogni $\lambda \in \Lambda(k, n)$ e per L_k-quasi ogni $y \in R^k$ esiste la sezione $\langle T, p^\lambda, y \rangle$ e si ha, per [F] 3.13:

$$M(\langle T, p^\lambda, y \rangle) = \sum_x \theta^k(\|T\|, x) \tag{2.12}$$

dove la somma è fatta rispetto agli x dell'insieme $(p^\lambda)^{-1}(y)$, che risulta certamente finito, perchè la somma indicata è, per tali y, finita. In realtà la (2.12) è stata provata nella ipotesi che T sia rettificabile e normale, cioè intera (cfr. [F F], 8.14); ma una volta che sia stata estesa la definizione di sezione di corrente alle correnti quasi normali, la stessa dimostrazione vale per le correnti soltanto rettificabili.

Per [F] 3.13 si ha pure, sempre per L_k-quasi ogni $y \in R^k$ e per H^0 quasi ogni (cioè per ogni) $x \in (p^\lambda)^{-1}(y)$:

$$\theta^0 (\| \langle T, p^\lambda, y \rangle \| , x) = \theta^k (\| T \| , x). \tag{2.13}$$

Da (2.12) e (2.13) segue che per L_k-quasi ogni $y \in R^k$ vale la (2.11), dove gli a_i sono numeri interi per l'uguaglianza:

$$a_i = \theta^0 (\| \langle T, p^\lambda, y \rangle \| , x_i)$$

per la (2.13) e per [F F] 8.16 (1).

TEOREMA 2.9. *Se la successione $(T_h)_{h \in N}$ di correnti quasi normali $T_h \in E_k(R^n)$ converge debolmente alla corrente quasi normale $T \in E_k(R^n)$ e se per ogni $\lambda \in \Lambda(k, n)$ gli integrali indefiniti delle funzioni di $y \in R^k$: $M(\langle T, p^\lambda, y \rangle)$ sono equiassolutamente continui rispetto a L_k, allora, per ogni k-forma φ, μ_k-quasi continua e limitata, si ha:*

$$\lim_{h \to \infty} T_h(\varphi) = T(\varphi) .$$

Nelle ipotesi poste la (2.7) del corollario 2.4 si può così scrivere per ogni $\lambda \in \Lambda(k, n)$ e per ogni h:

$$M(T_h \wedge p^{\lambda *}(\omega_k)) = \int_{R^k} M(\langle T_h , p^\lambda, y \rangle) \, dy .$$

Per ogni insieme di Borel $B \subset R^n$ si ha poi, tenendo presente il corollario 2.3 e ricordando che la corrente $T \cap B$ è quasi normale:

$$M(T_h \cap B \wedge p^{\lambda *}(\omega_k)) = \int_{p^\lambda(B)} M(\langle T_h \cap B, p^\lambda, y \rangle) \, dy.$$

Segue :

$$\| T_h \| (B) = M(T_h \cap B) \leq \sum_{\lambda \in \Lambda(k,n)} M(T_h \cap B \wedge p^{\lambda *}(\omega_k)) =$$

$$= \sum_{\lambda} \int_{p^{\lambda}(B)} M(\langle T_h \cap B, p^{\lambda}, y \rangle) \, dy \leq \sum_{\lambda} \int_{p^{\lambda}(B)} M(\langle T_h, p^{\lambda}, y \rangle) \, dy$$

e le misure $\| T_h \|$ risultano così equiassolutamente continue rispetto a H^k.

DEFINIZIONE 2.10. Se $T \in E_k(R^n)$ è una corrente rettificabile, chiameremo il numero $\theta^k(\| T \|, x)$ (che, come si è detto, è intero per H^k-quasi ogni $x \in R^n$) *molteplicità del punto* $x \in R^n$ relativamente alla corrente rettificabile T. Poniamo per $\lambda \in \Lambda(k, n)$ e per $y \in R^k$ tale che esista la corrente $\langle T, p^{\lambda}, y \rangle$:

$$N(T, p^{\lambda}, y) = M(\langle T, p^{\lambda}, y \rangle) \tag{2.14}$$

Per il lemma 2.8 e, in particolare, per la (2.12) si può affermare che la funzione di y : $N(T, p^{\lambda}, y)$ esprime il numero dei punti, ciascuno contatto con la dovuta molteplicità, dell'insieme intersezione tra la varietà lineare $(n - k)$-dimensionale $(p^{\lambda})^{-1}(y)$ e la corrente rettificabile T.

COROLLARIO 2.11. *Se la successione $(T_h)_{h \in N}$ di correnti rettificabili $T_h \in E_k(R^n)$ converge debolmente alla corrente quasi normale $T \in E_k(R^n)$ e se per ogni $\lambda \in \Lambda(k, n)$ gli integrali indefiniti delle funzioni di $y \in R^k$: $N(T_h, p^{\lambda}, y)$ sono equiassolutamente continui rispetto a L_k, allora, per ogni k-forma φ, μ_k-quasi continua e limitata, si ha :*

$$\lim_{h \to \infty} T_h(\varphi) = T(\varphi).$$

L'ipotesi posta è in particolare verificata se le funzioni $N(T_h, p^{\lambda}, y)$ sono equilimitate rispetto ad h.

Segue subito dal teorema 2.9 e dalla (2.14).

BIBLIOGRAFIA

[C] A. Chiffi: *Correnti quasi normali,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (3) 19 (1965), pp. 185-205.

[F] H. Federer: *Some theorems on integral currents,* Trans. Amer. Math. Soc. vol. 117 (1965), pp. 43-67.

[F F] H. Federer and W. Fleming: *Normal and integral currents,* Ann. of Math. (2) 72 (1960), pp. 458-520.

[M S] E. J. Mac Shane: *Extension of range of functions,* Bull. Amer. Math Soc. 40 (1934), pp. 837-842.

[S] S. Saks: *Theory of the integral,* Warsaw, 1937.

[St] G. Stampacchia: *Sopra una classe di funzioni in n variabili,* Ricerche Mat. 1 (1952), pp. 27-54.

Manoscritto pervenuto in redazione il 30-11-67.