RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO AMBROSETTI

Un teorema di esistenza per le equazioni differenziali negli spazi di Banach

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 349-361

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__349_0>

UN TEOREMA DI ESISTENZA PER LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI NEGLI SPAZI DI BANACH

ANTONIO AMBROSETTI *)

Sia Σ un sottoinsieme di uno spazio di Banach E, I un intervallo chiuso e limitato della retta reale e $f(x, y)$ una funzione di $I \times \Sigma$ in E. Allora la sola ipotesi della continuità di $f(x, y)$ non è sufficiente a garantire l'esistenza di almeno una soluzione dell'equazione differenziale ordinaria del primo ordine

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

soddisfacente alla condizione iniziale

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$ [1].

In questo lavoro verrà dimostrato un Teorema di esistenza per tale problema, ottenendo così un risultato che è più generale di quelli dovuti a C. CORDUNEANU [2]) ed a M. A. KRASNOSEL'SKII - S. G. KREIN [3]). Nella dimostrazione si farà uso di un Teorema di punto unito di G. DARBO [4]).

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Scuola Normale Superiore, Pisa.

1) Cfr. [1] — pag. 25.

2) Cfr. [2] — pag. 226 e segg.

3) Cfr. [5] — pag. 13-16.

4) Cfr. [3] — pag. 84 e segg.

Ringrazio il Prof. G. Prodi che mi ha guidato nella presente ricerca e il Prof. E. De Giorgi per le utili discussioni sull'argomento.

§ 1. Premesse.

Faremo nel seguito frequente uso di alcune nozioni sulle α-contrazioni introdotte da G. DARBO [5]; per comodità daremo dapprima alcuni richiami su tale argomento e cominceremo perciò con la seguente

DEFINIZIONE 1.1. *Sia X un insieme limitato di uno spazio di Banach E. Indicheremo con $\alpha(X)$ l'estremo inferiore dei numeri positivi ε per i quali è possibile decomporre X nell'unione di un numero finito di parti di diametro inferiore ad ε.*

Dalla definizione precedente segue subito che:

PROPRIETÀ 1.2. *Condizione necessaria e sufficiente perchè X sia relativamente compatto in E è che risulti $\alpha(X) = 0$.*

PROPRIETÀ 1.3. *Se X e Y sono porzioni limitate di E, detto $X + Y$ l'insieme $\{z = x + y : x \in X, y \in Y\}$, si ha*

$$\alpha(X + Y) \leq \alpha(X) + \alpha(Y).$$

Sia E uno spazio metrico e T una trasformazione di E in sè; hanno importanza in molte questioni quelle trasformazioni T che sono completamente continue, cioè che sono continue e che trasformano ogni insieme limitato in un insieme relativamente compatto in E. Tali trasformazioni godono quindi della proprietà che, per ogni $X \subset E$, X limitato, risulta $\alpha(T(X)) = 0 \leq \alpha(X)$. Per generalizzare tale concetto, si dà, seguendo G. DARBO, la seguente

DEFINIZIONE 1.4. *Chiameremo α-contrazione ogni trasformazione continua T di uno spazio metrico E in sè, che soddisfa alle seguenti proprietà:*

---

[5]) Per ulteriori notizie sull'argomento e per la dimostrazione del Teorema 1.7 vedi [3] con relativa bibliografia.

I. *ogni insieme limitato di E venga trasformato dalla T in un insieme limitato*;

II. *qualunque sia l'insieme limitato $X \subset E$, posto $X' = T(X)$, risulti*

$$\alpha(X') \leq k\,\alpha(X),$$

con k conveniente numero non negativo, minore di uno e indipendente da X.

Segue subito che:

PROPRIETÀ 1.5. *Le trasformazioni completamente continue sono α-contrazioni.*

Poichè ovviamente le contrazioni ordinarie sono α-contrazioni, dalla definizione 1.4 e dalle proprietà 1.3 e 1.5 segue che:

PFOPRIETÀ 1.6. *Se la trasformazione T di E in E si può scrivere come $T_1 + T_2$, con T_1 completamente continua e T_2 contrazione, allora $T = T_1 + T_2$ è una α-contrazione.*

Generalizzando un noto Teorema di punto unito di G. SCHAUDER, G. DARBO ha dimostrato sulle α-contrazioni il seguente

TEOREMA 1.7. *Sia T una α contrazione definita in un insieme convesso e chiuso X di uno spazio di Banach E. Sia inoltre l'immagine $T(X)$ limitata e contenuta in X. In tali ipotesi esiste in X almeno un punto unito per la T.*

Generalizzando il concetto di α-contrazione, diamo poi la seguente

DEFINIZIONE 1.8. *Siano E e F due spazi di Banach; diremo che una funzione $f(y): E \longrightarrow F$ è α-lipschitziana se è continua e se*

I. *per ogni insieme limitato $S \subset E$, $f(S) \subset F$ è limitato*;

II. *esiste una costante h, tale che, per ogni insieme limitato $S \subset E$, si abbia*

$$\alpha(f(S)) \leq h \cdot \alpha(S).$$

Data una funzione α-lipschitziana f, il più piccolo valore non negativo di h, h_f, per cui sussiste la diseguaglianza precedente qualunque sia l'insieme S limitato di E, sarà chiamato *modulo* della funzione α-lipschitziana f.

Sussiste infine il seguente Teorema, di immediata dimostrazione:

TEOREMA 1.9. *Siano E, F, G, tre spazi di Banach; f un'applicazione di E in F α-lipschitziana con modulo uguale ad h_f; g una applicazione di F in G α-lipschitziana con modulo uguale ad h_g. Allora l'applicazione composta $g \circ f$ di E in G, è α-lipschitziana con modulo $h_{g \circ f}$ minore o uguale a $h_f \cdot h_g$.*

§ 2. Un teorema preliminare.

Sia E uno spazio di Banach, I un intervallo chiuso e limitato della retta reale. Indichiamo con $C(I; E)$ lo spazio delle funzioni continue su I, a valori in E, che rispetto alla norma

$$|||u|||_C = \sup \{ \| u(x) \|_E : x \in I \}$$

è uno spazio di Banach; e consideriamo un sottoinsieme $H \subset C(I; E)$. In corrispondenza ad H si prenda, per ogni $x \in I$, l'insieme $H(x) \subset E$, formato da tutti gli elementi del tipo $u(x)$ con $u \in H$, e sia inoltre $H(I) \subset E$ l'insieme $\bigcup_{x \in I} H(x)$; se H è limitato anche $H(I)$ lo è, e viceversa. Vogliamo ora dimostrare un Teorema che ci sarà utile nel seguito e che generalizza il classico Teorema di ASCOLI-ARZELÀ [6]. A tale scopo proviamo dapprima due Lemmi.

LEMMA 2.1. *Se $H \subset C(I; E)$ è un insieme limitato ed equicontinuo, per il corrispondente $H(I) \subset E$ si ha*

$$\alpha(H) = \alpha(H(I)).$$

DIM. Divideremo la dimostrazione in due parti: mostreremo prima che $\alpha(H(I)) \leq \alpha(H)$, provando successivamente la diseguaglianza inversa.

---

[6]) Per una dimostrazione del Teorema di ASCOLI-ARZELÀ, cfr., ad esempio, [4], pp. 135-136. La dimostrazione dei Lemmi 2.1 e 2.2 del presente lavoro, ricalca, nelle sue linee essenziali, quella del suddetto Teorema.

Per la definizione 1.1., fissato $\varepsilon > 0$, si può trovare un ricoprimento finito $\{H_i\}_{1 \leq i \leq n}$ di H, tale che, per ogni indice $i = 1, 2, \dots, n$, il diametro di H_i, diam H_i, risulti minore di $\alpha(H) + \varepsilon$. Poichè H è equicontinuo, in corrispondenza a detto ε, è possibile dividere I, che è compatto, in m intorni $V_j (j = 1, 2, \dots, m)$, tali che, se x_1 e x_2 appartengono a V_j, risulti $\| u(x_1) - u(x_2) \| < \varepsilon$ per ogni $u \in H$. Consideriamo allora, per ogni coppia di indici i, j, l'insieme $B_{i,j} \subset H(I)$ siffatto : $B_{i,j} = H_i(V_j) = \{u(x) : u \in H_i, x \in V_j\}$. È ovvio che $\{B_{i,j}\}_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m}$ forma un ricoprimento (finito) di $H(I)$, e risulta

$$\operatorname{diam} B_{i,j} = \sup \{ \| u(x_1) - \bar{u}(x_2) \| : u, \bar{u} \in H_i, x_1, x_2 \in V_j \}.$$

Inoltre si ha

$$\| u(x_1) - \bar{u}(x_2) \| \leq \| u(x_1) - \bar{u}(x_1) \| + \| \bar{u}(x_1) - \bar{u}(x_2) \|.$$

Ma al variare di x_1 e x_2 in un certo V_j, $\| \bar{u}(x_1) - \bar{u}(x_2) \|$ si mantiene più piccolo di ε, per ogni $\bar{u} \in H$, e quindi

$$\| u(x_1) - \bar{u}(x_2) \| < \| u(x_1) - \bar{u}(x_1) \| + \varepsilon.$$

Allora risulta, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \operatorname{diam} B_{i,j} &\leq \sup \{ \| u(x_1) - \bar{u}(x_1) \| : u, \bar{u} \in H_i, x_1 \in V_j \} + \varepsilon \leq \\ &\leq \sup \{ \| u(x) - \bar{u}(x) \| : u, \bar{u} \in H_i, x \in I \} + \varepsilon = \\ &= \operatorname{diam} H_i + \varepsilon < \alpha(H) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Quindi, a maggior ragione

$$\alpha(H(I)) < \alpha(H) + 2\varepsilon.$$

E, attesa l'arbitrarietà di ε, segue la conclusione.

Dimostriamo ora che $\alpha(H) \leq \alpha(H(I))$. Dato $\varepsilon > 0$, per l'equicontinuità di H, si può ricoprire I con un numero finito di intorni $V(x_i)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ tali che, se $x \in V(x_i)$, segua $\| u(x) - u(x_i) \| < \varepsilon$, per ogni $u \in H$. D'altra parte è anche possibile, in corrispondenza al precedente ε, trovare un ricoprimento finito di $H(I)$ con insiemi

B_j $(j = 1, 2, \dots, m)$ di diametro minore di $\alpha(H(I)) + \varepsilon$. Sia Φ l'insieme (finito) di tutte le mappe $i \longrightarrow \varphi(i)$ di $[1, 2, \dots, n] \subset N$ in $[1, 2, \dots, m] \subset N$. Per ogni $\varphi \in \Phi$, si denoti con L_φ l'insieme di tutti gli $u \in H$ tali che $\forall\, i \in [1, 2, \dots, n]$ si abbia $u(x_i) \in B_{\varphi(i)}$. Si vede facilmente che H è ricoperto dall'unione degli L_φ. Inoltre se $u, \bar{u} \in L_\varphi$, per ogni $x \in I$, c'è un indice i tale che $x \in V(x_i)$. Allora si ha $\| u(x) - u(x_i) \| < \varepsilon$, e $\| \bar{u}(x) - \bar{u}(x_i) \| < \varepsilon$; dato poi che $\| u(x_i) - \bar{u}(x_i) \| < \alpha(H(I)) + \varepsilon$, risulta:

$$\| u(x) - \bar{u}(x) \| \leq \| u(x) - u(x_i) \| + \| u(x_i) - \bar{u}(x_i) \| + \\ + \| \bar{u}(x_i) - \bar{u}(x) \| < \alpha(H(I)) + 3\varepsilon.$$

Perciò

$$\alpha(H) \leq \alpha(H(I)) + 3\varepsilon,$$

e quindi la conclusione, perchè ε è arbitrario.

LEMMA 2.2. *Nelle stesse ipotesi del Lemma* 2.1 *si ha:*

$$\alpha(H(I)) = \sup \{\alpha(H(x)) : x \in I\}.$$

DIM. Poichè per ogni $x \in I$, $H(x) \subset H(I)$, si ha intanto $\alpha(H(x)) \leq \alpha(H(I))$, il che implica $\sup \{\alpha(H(x)) : x \in I\} \leq \alpha(H(I))$.

Viceversa, poichè H è equicontinuo, fissato ad arbitrio $\varepsilon > 0$, si divida I in n intervalli $V(x_1) \dots V(x_n)$ tali che ivi si abbia $\| u(x) - u(x_i) \| < \varepsilon$ per ogni $u \in H$. Inoltre per ogni $i = 1, 2, \dots, n$, si può trovare un ricoprimento finito $\{H_j^{(i)}\}_{1 \leq j \leq m}$ di H tale che $\{H_j^{(i)}(x_i)\}_{1 \leq j \leq m}$ sia un ricoprimento finito di $H(x_i)$ soddisfacente a

$$\max_{1 \leq j \leq m} \operatorname{diam} H_j^{(i)}(x_i) < \alpha(H(x_i)) + \varepsilon.$$

Allora, detto $B_{i,j} = H_j^{(i)}(V(x_i))$, si ha che $\{B_{i,j}\}_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m}$ è un ricoprimento finito di $H(I)$, e inoltre

$$\operatorname{diam} B_{i,j} = \sup \{ \| u(x) - v(y) \| : u, v \in H_j^{(i)};\, x, y \in V(x_i)\}.$$

Ma risulta anche:

$$\| u(x) - v(y) \| \leq \| u(x) - u(x_i) \| + \| u(x_i) - v(x_i) \| +$$
$$+ \| v(x_i) - v(y) \| < 2\varepsilon + \| u(x_i) - v(x_i) \| ,$$

quindi

$\operatorname{diam} B_{i,j} \leq 2\varepsilon + \sup \{ \| u(x_i) - v(x_i) \| : u, v \in H_j^{(i)} \} = 2\varepsilon + \operatorname{diam} H_j^{(i)}(x_i)$. Questo ci dice che $\max \{\operatorname{diam} B_{i,j} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \leq 2\varepsilon + \max \{\operatorname{diam} H_j^{(i)}(x_i) : \ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$.

Allora a più forte ragione si ha:

$$\alpha(H(I)) < 3\varepsilon + \max_{1 \leq i \leq n} \alpha(H(x_i)) \leq 3\varepsilon + \sup \{\alpha(H(x)) : x \in I\} ; \qquad \text{c. v. d.}$$

Si può così concludere, riunendo i risultati dei Lemmi 2.1 e 2.2 col

TEOREMA 2.3. *Se $H \subset C(I; E)$ è un insieme limitato ed equicontinuo, si ha:*

$$\alpha(H) = \sup \{\alpha(H(x)) : x \in I\}.$$

OSSERVAZIONI. Nelle dimostrazioni precedenti non si è esplicitamente sfruttato il fatto che I è un intervallo della retta reale, ma solo che I è compatto. E infatti il risultato precedente è ancora vero nell'ipotesi che H sia un generico sottoinsieme limitato ed equicontinuo di $C(I; E)$ con I generico spazio metrico compatto.

Inoltre il Teorema 2.3 generalizza, in un certo senso, il Teorema di ASCOLI-ARZELÀ. Sia infatti H un insieme limitato ed equicontinuo; allora, se H è compatto, si ha che $\alpha(H) = 0$, e quindi anche il $\sup \{\alpha(H(x)) : x \in I\}$ è eguale a zero; questo implica che $H(x)$ è compatto per ogni $x \in I$; viceversa, se $H(x)$ è compatto per ogni $x \in I$, allora $\alpha(H(x)) = 0$ per ogni $x \in I$. Quindi $\alpha(H) = \sup \{\alpha(H(x)) : x \in I\} = 0$, e questo equivale a dire che H è compatto in $C(I; E)$.

§ 3. Teorema di esistenza.

Il Teorema dimostrato nel paragrafo precedente, ci permette ora di dimostrare il seguente

TEOREMA 3.1. *Sia E uno spazio di Banach e, fissato $y_0 \in E$, sia $\Sigma \subset E$ l'insieme $\{y : y \in E, \| y - y_0 \| \leq b\}$; inoltre, fissato $x_0 \in R$, sia*

$I \subset R$ l'intervallo $\{x : |x - x_0| \leq a\}$. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

dove $f(x, y)$ è una funzione definita per $(x, y) \in I \times \Sigma$, che assume i suoi valori in E. Supponiamo che $f(x, y)$ sia uniformemente continua e, per ogni $x \in I$, α-lipschitziana rispetto ad y, con costante h indipendente dal punto x. Allora, se δ' è un numero tale che $\delta' h < 1$, esiste almeno una soluzione dell'equazione (1) *soddisfacente alla condizione iniziale*

$$y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

definita in un opportuno intorno $\overline{I}$ di x_0 di ampiezza δ, dove

$$\delta = \min\left(\delta', a, \frac{b}{M}\right), \textit{ con } M = \| \sup \{ \|f(x, y)\| : (x, y) \in I \times \Sigma\} \text{ [7]}).$$

DIM. Consideriamo lo spazio di Banach $C(\overline{I}; E)$ introdotto nel paragrafo 2, e sia K l'insieme delle funzioni $u(x) \in C(\overline{I}; E)$ lipschitziane con costante di Lipschitz minore o eguale a M e soddisfacenti inoltre a

$$\| u(x) - y_0 \| \leq b, \qquad (x \in \overline{I}).$$

K è un insieme equicontinuo, chiuso e convesso. Si definisca sopra K la seguente trasformazione funzionale T:

$$T : u(x) \longrightarrow Tu(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt.$$

È facile verificare che T è continua sopra K e che se $u \in K$ anche $Tu \in K$.

Dimostriamo che T è una α-contrazione; per questo si osservi che T si può scrivere come $J \circ f^*$, ove si è indicato con J l'applicazione che ad ogni funzione $g(x) \in C(\overline{I}; E)$ associa

$$Jg(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt;$$

[7]) Si tenga presente che $f(x, y)$, applicazione uniformemente continua definita in un insieme convesso e limitato, è limitata.

e con f^* l'applicazione di K in $C(\bar{I}; E)$ definita nel seguente modo:

$$f^* u(x) = f(x, u(x)).$$

La J è ovviamente α-lipschitziana con modulo uguale a δ. Quanto alla f^*, si osservi che essa è continua e che, per ogni $H \subset K$, $H^* = f^*(H)$ è equicontinuo. Allora, attese le ipotesi fatte e il Teorema 2.3., risulta:

$$\alpha(H^*) = \sup\{\alpha(H^*(x)) : x \in \bar{I}\} \leq h \sup\{\alpha(H(x)) : x \in \bar{I}\} = h\alpha(H),$$

con h indipendente da H. Ciò equivale a dire che anche la f^* è α-lipschitziana con modulo uguale ad h. Applicando ora il Teorema 1.9, si può affermare che T è un'applicazione α-lipschitziana con modulo minore o eguale a $\delta h < 1$, cioè che T è una α-contrazione. Perciò, a norma del Teorema 1.7. di G. DARBO, si può concludere che la T ha almeno un punto unito. Questo punto rappresenta la soluzione della (1) soddisfacente alla (2) che si cercava.; c. v. d.

OSSERVAZIONI. Le proposizioni 1.2 e 1.6. ci dicono che l'ipotesi che la $f(x, y)$ sia completamente continua [8]) o che sia $f = f_1 + f_2$, con f_1 lipschitziana e f_2 completamente continua [9]), rientra come caso particolare nell'ipotesi del Teorema testè dimostrato.

Nel Teorema precedente si è provata l'esistenza di almeno una soluzione dell'equazione (1) verificante alla condizione iniziale (2) in un intervallo di ampiezza $\delta = \min\left(\delta', a, \frac{b}{M}\right)$. Però è facile verificare che se δ è minore di $\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, tale soluzione può essere prolungata e che, in definitiva l'intervallo dove la soluzione è definita può essere preso di ampiezza eguale a $\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$.

---

[8]) Vedi [3]).

[9]) Vedi [4]).

§ 4.

Daremo ora qualche esempio di funzione α-lipschitziana: in tal modo potremo mostrare alcune possibilità di applicazione del Teorema di esistenza 3.1.

Sia E uno spazio di Banach, Δ un sottoinsieme di E, g una funzione di Δ in E α-lipschitziana, φ una funzione di Δ in R (numeri reali) continua e che trasforma Δ in un insieme limitato. La funzione continua

$$f(y) = \varphi(y)\, g(y) \tag{3}$$

di Δ in E, in generale non è — come si vedrà in seguito in un caso particolare — facilmente scomponibile nella somma di una funzione lipschitziana e di una funzione completamente continua. Mostriamo invece che la (3) è una funzione α-lipschitziana. Allo scopo sia $H \subset \Delta$, un insieme limitato; innanzi tutto l'immagine di H tramite $f, f(H)$, è limitata. Inoltre diciamo λ il sup $\{|\varphi(y)| : y \in \Delta\}$ e L il sup $\{\|g(y)\| : y \in H\}$; allora, per ogni coppia $y, \bar{y} \in H$, si ha:

$$\|f(y) - f(\bar{y})\| \leq \lambda \|g(y) - g(\bar{y})\| + L\,|\varphi(y) - \varphi(\bar{y})|. \tag{4}$$

Premesso ciò, fissato $\varepsilon > 0$, si può trovare un ricoprimento finito $\{G_i\}_{1 \leq i \leq n}$ di $g(H)$, tale che

$$\max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{diam} G_i < \alpha(g(H)) + \varepsilon. \tag{5}$$

Poichè inolre $\varphi(H) \subset R$ è ivi relativamente compatto, in corrispondenza al precedente ε, è possibile trovare un ricoprimento finito $\{\Phi_j\}_{1 \leq j \leq m}$ di $\varphi(H)$ tale che

$$\max_{1 \leq j \leq m} \operatorname{diam} \Phi_j < \varepsilon. \tag{6}$$

Poniamo $H_i = g^{-1}(G_i)$, $T_j = \varphi^{-1}(\Phi_j)$; preso $V_{ij} = H_i \cap T_j$, si consideri il ricoprimento finito $\{V_{ij}\}_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m}$ di H e il corrispondente ricoprimento (finito) $\{f(V_{ij})\}_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq m}$ di $f(H)$. Per le (4), (5), (6), si ha:

$$\max_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \operatorname{diam} f(V_{ij}) \leq \lambda \max_{1\leq i\leq n} \operatorname{diam} G_i + L \max_{1\leq j\leq m} \operatorname{diam} \Phi_j \leq$$
$$\leq \lambda\cdot\alpha(g(H)) + \lambda\varepsilon + L\varepsilon.$$

A questo punto, ricordando che la g è α-lipschitziana, risulta:

$$\max_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \operatorname{diam} f(V_{ij}) \leq h\,\lambda\,\alpha(H) + \lambda\varepsilon + L\varepsilon,$$

e quindi, a più forte ragione

$$\alpha(f(H)) \leq h\,\lambda\,\alpha(H) + \lambda\varepsilon + L\varepsilon.$$

Si può così concludere nel modo voluto, perchè ε è arbitrario e λ è indipendente da H.

Un caso particolare è il seguente. Si prenda per E lo spazio di Banach $C([0,1])$ delle funzioni continue sull'intervallo $[0,1]$ con la norma $\|x\| = \sup\{|y(x)| : x \in [0,1]\}$, e per $f(y)$ la funzione

$$f(y) = y\int_0^1 \sqrt{|y(x)|}\,dx, \tag{7}$$

definita su di una sfera di E, avente per centro l'origine e raggio 2. Si constata facilmente che la (7) non è una funzione completamente continua. Si può anche vedere che tale funzione non è lipschitziana. Sia infatti $u \in C([0,1])$ una funzione tale che sia:

a) positiva o nulla e di norma eguale a 1;

b) $\displaystyle\int_0^1 u(x)^{-1/2}\,dx = +\infty.$

Per ogni numero naturale n, sia $u_n(x)$ la funzione definita ponendo:

$$u_n(x) = u(x) \qquad \text{per } x \geq \frac{1}{n}$$

$$u_n(x) = u\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{per } x < \frac{1}{n}.$$

Risulta:

$$\left\| \{u_n(x)+\varepsilon\} \int_0^1 \sqrt{u_n(x)+\varepsilon}\, dx - u_n(x) \int_0^1 \sqrt{u_n(x)}\, dx \right\| \geq$$

$$\geq \left| \int_0^1 \{\sqrt{u_n(x)+\varepsilon} - \sqrt{u_n(x)}\}\, dx \geq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 u_n(x)^{-1/2}\, dx. \right.$$

Quindi il rapporto $\dfrac{f(u_n+\varepsilon)-f(u_n)}{\varepsilon}$, per ε abbastanza piccolo e n tendente a $+\infty$, tende a $+\infty$, in virtù dell'ipotesi b) fatta sulla $u(x)$. Dunque la (7) non è una funzione lipschitziana; nè si vede un'immediata scomposizione della (7) come somma di due funzioni: una completamente continua e una lipschitziana; essa è invece α-lipschitziana, perchè è del tipo della (3).

Un ulteriore esempio è il seguente: sia E un'algebra di Banach, Δ un sottoinsieme di $E, g(y)$ e $h(y)$ due funzioni α-lipschitziane che trasformano Δ in un insieme limitato e contenuto in E; e si consideri la funzione $f(y)$ di Δ in E, definita nel seguente modo:

$$f(y) = g(y)\, h(y).$$

Una facile verifica mostra che anche per questa funzione sussiste una diseguaglianza del tipo della (4) [10]), dopo di che, usando di un ragionamento del tutto analogo ai precedenti, si può affermare che $f(y) = g(y)\, h(y)$ è una funzione α-lipschitziana.

---

[10]) In questo caso la costante L deve essere presa come il $\sup\{\|g(y)\| : y \in \Delta\}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI - *Fonctions d'une variable reélle.* Chap. IV - (1951).

[2] C. CORDUNEANU - *Equazioni differenziali negli spazi di Banach. Teoremi di esistenza e prolungabilità.* Rendiconti dell'Accademia dei Lincei. Vol. XXIII-(1957).

[3] G. DARBO - *Punti uniti in trasformaziani a codominio non compatto.* Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. Vol. XXIV - (1955).

[4] J. DIEUDONNÉ - *Fondements de l'Analyse Moderne.* (1963).

[5] M. A. KRASNOSEL'SKII - S. G. KREIN- *Non local existence theorems and uniqueness theorems for systems of ordinary differential equations.* (In russo) Doklady Akad. Nauk C. C. C. P. - 102 - (1955).

Manoscritto pervenuto in redazione il 15-9-1967.