RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALDO BELLENI-MORANTE

Sul principio dell'effetto giroscopico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 304-329

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__304_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUL PRINCIPIO DELL'EFFETTO GIROSCOPICO

ALDO BELLENI-MORANTE *)

RIASSUNTO: Si descrive un metodo di calcolo, che permette di ricondurre la discussione sulla validità dell'effetto giroscopico allo studio di semplici sistemi lineari in due equazioni e due incognite, e di generalizzare i risultati ottenuti da altri Autori.

1. Sia S un sistema materiale rigido, che ruota intorno ad un punto fisso 0, sotto l'azione di forze che hanno momento risultante $\mathbf{M}$ rispetto ad 0. Siano inoltre $T(0\,;\ \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ una terna principale d'inerzia di S, A, B e C i rispettivi momenti d'inerzia ad $\omega = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$ la velocità di rotazione di T rispetto ad un'opportuna terna inerziale $T_1 = T_1(0\,;\ \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$.

Ammettiamo che la velocità di rotazione iniziale $\omega_0 = p_0\,\mathbf{i} + q_0\,\mathbf{j} + r_0\,\mathbf{k}$ sia tale che $|p_0| << |r_0|$, $|q_0| << |r_0|$, l'asse di versore $\mathbf{k}$ essendo asse principale d'inerzia cui competa momento d'inerzia massimo oppure minimo.

È ben noto allora che, a causa anche delle numerose applicazioni pratiche, ha grande interesse studiare, sotto quali condizioni per il momento risultante $\mathbf{M}$, $|p(t)|$ e $|q(t)|$ continuino a mantenersi « piccoli » in confronto ad $|r(t)|$ nell'intervallo di tempo $[0, t_1]$, nel quale è assicurata l'esistenza e l'unicità della soluzione delle

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 6 del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico - Università - Firenze.

equazioni che regolano il moto di S. Quando questo accade, diciamo che l'asse z, cioè l'asse di « rapida rotazione », è dotato di « tenacia ».

Il problema, cui si è sopra accennato, è stato preso in esame in alcuni interessanti lavori, [1], [2], ... , [10], [11], nei quali si mostra che l'asse di rapida rotazione può essere dotato di tenacia, oppure può anche non esserlo, questa notevole proprietà dipendendo dalla struttura di S, oltre che, s'intende, dal tipo di sollecitazione che dà luogo al momento risultante $\mathbf{M}$.

Nel presente lavoro ci proponiamo di inquadrare in uno stesso schema i risultati fino ad ora ottenuti, facendo uso di un metodo di calcolo che, semplificando notevolmente il necessario apparato analitico, permette fra l'altro di generalizzare quanto provato dagli Autori dei lavori citati. I Teoremi 2 e 3 dei §§ 5 e 6 forniscono infatti, come casi particolari, i risultati di STOPPELLI, [10], e di RIONERO, [9]. Il Teorema 1. contiene poi i risultati di QUILGHINI, [4], [8], ed il Teorema 1′ mette in evidenza il fatto, fino ad ora non rilevato, che l'asse di rapida rotazione è dotato di tenacia anche nel caso in cui S sia un sistema materiale piano a struttura non giroscopica, purchè una delle componenti di $\mathbf{M}$ normali all'asse z sia nulla, (§ 4).

Il metodo di calcolo, cui si è sopra accennato, permette di ricondurre la discussione sulla validità dell'effetto giroscopico allo studio di semplici sistemi lineari in due equazioni e due incognite.

2. Le equazioni di Eulero, che regolano il moto di S, hanno la forma :

$$(1) \qquad \dot{p} = -a\,qr + M_x/A,\ \dot{q} = b\,pr + M_y/B,\ \dot{r} = c\,pq + M_z/C,$$

ove $a = (C - B)/A$, $b = (C - A)/B$, $c = (A - B)/C$, $M_x = \mathbf{M}\cdot\mathbf{i}$, $M_y = \mathbf{M}\cdot\mathbf{j}$, $M_z = \mathbf{M}\cdot\mathbf{k}$, il prodotto (ab) essendo non negativo dato che, per ipotesi, l'asse z è asse principale d'inerzia cui compete momento d'inerzia massimo oppure minimo. Alle (1) vanno associate le condizioni iniziali :

$$(1') \qquad p(0) = p_0, \qquad q(0) = q_0, \qquad r(0) = r_0.$$

Conviene per il seguito considerare, accanto alle (1), anche le equazioni cinematiche:

$$(1') \qquad \dot{\vartheta} = p \cos \varphi - q \sin \varphi, \quad \dot{\psi} = \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \vartheta},$$

$$\dot{\varphi} = r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cotg} \vartheta,$$

ove ϑ, ψ e φ sono gli angoli di Eulero di T rispetto a T_1, con le condizioni iniziali:

$$(2') \qquad \vartheta(0) = \vartheta_0, \qquad \psi(0) = \psi_0, \qquad \varphi(0) = \varphi_0.$$

Notiamo che, senza perdere in generalità, il momento risultante $\mathbf{M}$ può essere posto nella forma:

$$(3) \qquad \mathbf{M} = (\Omega - 0) \wedge \mathbf{F},$$

ove $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i}_1 + F_2 \mathbf{j}_1 + F_3 \mathbf{k}_1$ è una forza opportuna applicata nel punto Ω, avente in T coordinate x, y, z, che supponiamo funzioni note del tempo, continue e limitate insieme con le loro derivate prime. Avvertiamo tuttavia che lievi e non sostanziali modifiche di quanto segue sarebbero necessarie nel caso in cui x, y e z dipendessero da t anche tramite p, q, r e gli angoli di Eulero.

Non è difficile provare, [9], che, se $\mathbf{M}$ ha la forma (3), le componenti M_x, M_y, M_z, che compaiono ai secondi membri delle (1), sono del tipo:

$$(4) \qquad \begin{cases} M_x = zu \sin \varphi - zv \cos \varphi + yw, \quad M_y = zu \cos \varphi + zv \sin \varphi - xw, \\ M_z = (xv - yu) \cos \varphi - (xu + yv) \sin \varphi, \end{cases}$$

ove si è posto:

$$(5) \qquad \begin{cases} u = F_1 \cos \psi + F_2 \sin \psi, \\ \qquad v = - F_1 \sin \psi \cos \vartheta + F_2 \cos \psi \cos \vartheta + F_3 \sin \vartheta \\ w = (F_1 \sin \psi - F_2 \cos \psi) \sin \vartheta + F_3 \cos \vartheta. \end{cases}$$

Indichiamo ora con $\mathcal{R} = \mathcal{R}(r_0)$ il rettangolo definito dalle seguenti diseguaglianze:

$$(6)\qquad \begin{gathered} |t| \leq \tau,\ |p| \leq a_1,\ |q| \leq a_2,\ |r - r_0| \leq a_3,\ b_1 \leq \psi \leq b_2, \\ b_3 \leq \varphi \leq b_4,\ 0 < b_5 \leq \vartheta \leq b_6 < \pi, \end{gathered}$$

ove $\tau, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$ e b_6 sono costanti reali, ed il simbolo $\mathcal{R}(r_0)$ mette in evidenza il fatto che il rettangolo, definito dalle (6), dipende dal « parametro » r_0, al quale intendiamo fare assumere due (od un numero finito di) valori diversi.

È subito visto che, se F_1, F_2 ed F_3 sono funzioni continue di $t, p, q, r, \vartheta, \psi, \varphi$ e lipschitziane del primo ordine rispetto alle variabili $p, q, r, \vartheta, \psi, \varphi$ nel rettangolo $\mathcal{R}$, anche M_x, M_y ed M_z, a causa delle (4) e delle (5), godono di queste stesse proprietà. Ne segue che il sistema (1), (1′), (2), (2′) ammette una sola soluzione definita nell'intervallo $0 \leq t \leq t_1(r_0) \leq \tau$, purchè, s'intende, $|p_0| \leq a_1$, $|q_0| \leq a_2$, $b_1 \leq \psi_0 \leq b_2$, $b_3 \leq \varphi_0 \leq b_4$, $b_5 \leq \vartheta_0 \leq b_6$, (Cfr. G. Sansone: Equazioni differenziali nel campo reale, Parte I, Cap. I). Se poi F_1, F_2, F_3 sono continue e lipschitziane anche nel rettangolo $\mathcal{R}' = \mathcal{R}(r_0')$, si può concludere, in modo analogo, che il sistema (1), (2) con le condizioni (2′) per gli angoli di Eulero e con le seguenti per le componenti di ω:

$$p(0) = p_0',\ |p_0'| \leq a_1;\ q(0) = q_0',\ |q_0'| \leq a_2;\ r(0) = r_0',$$

ammette una sola soluzione definita nell'intervallo $0 \leq t \leq t_1(r_0') \leq \tau$. L'esistenza e l'unicità della soluzione è pertanto assicurata in ambo i casi per $0 \leq t \leq t_1$, ove $t_1 = \min[t_1(r_0), t_1(r_0')]$.

Concludiamo questo paragrafo con la definizione di una classe di funzioni, che sarà assai utile nel seguito. Data una funzione $g = g(t, p, q, r, \vartheta, \psi, \varphi)$, definita e continua in $\mathcal{R}(r_0)$, diremo che g è di classe Lr_0 e scriveremo $g \in Lr_0$, se è possibile determinare una costante $\bar{g}$, tale che $|g| \leq \bar{g}$ in $\mathcal{R}(r_0)$, $\bar{g}$ essendo indipendente da r_0.

3. Passiamo ora a delineare il nuovo metodo, con cui intendiamo studiare il principio dell'effetto giroscopico e che si fonda su alcune trasformazioni delle equazioni (1) e (2). Introduciamo all'uopo

la variabile $R = R(t)$, definita dalla relazione:

$$R = R(t) = \int_0^t r(t')\,dt', \qquad R(0) = 0, \left(\frac{d}{dt} = r\frac{d}{dR}\right); \tag{7}$$

facendo uso della (7), le (1) e le (2) divengono rispettivamente:

$$\frac{dp}{dR} + aq = M_x/Ar, \quad \frac{dq}{dR} - bp = M_y/Br, \quad \frac{dr}{dR} - c\frac{pq}{r} = M_z/Cr, \tag{8}$$

$$\frac{d\vartheta}{dR} = \frac{p\cos\varphi - q\sin\varphi}{r}, \quad \frac{d\psi}{dR} = \frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{r}, \tag{8'}$$

$$\frac{d\vartheta}{dR} = 1 - \frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{r}\operatorname{cotg}\vartheta.$$

Tenendo poi presente che il sistema omogeneo associato alle prime due (8) è quello che definisce il $\sin(\sqrt{ab}\,R)$ ed il $\cos(\sqrt{ab}\,R)$ e facendo uso del metodo della variazione delle costanti, notiamo che le prime due (8), con le prime due (1′), equivalgono alle equazioni funzionali seguenti,[1]:

$$\left\{\begin{aligned} p &= p_0\cos(\sqrt{ab}\,R) - \sqrt{\frac{a}{b}}\,q_0\sin(\sqrt{ab}\,R) + \\ &\qquad + I_c(M_x/Ar) - \sqrt{\frac{a}{b}}\,I_s(M_y/Br), \\ q &= q_0\cos(\sqrt{ab}\,R) + \sqrt{\frac{b}{a}}\,p_0\sin(\sqrt{ab}\,R) + \\ &\qquad + \sqrt{\frac{b}{a}}\,I_s(M_x/Ar) + I_c(M_y/Br), \end{aligned}\right. \tag{9}$$

[1]) Le conclusioni su p e su q, che trarremo in questo § dalle equazioni (9), valgono anche nel caso in cui l'ellissoide d'inerzia di S rispetto ad O è una sfera ($A = B = C$, $a = b = c = 0$: caso sferico), come si può vedere direttamente a partire dalle prime due (8) con $a = b = 0$, oppure passando al limite nelle (9) per $\sqrt{ab} \to 0$ e tenendo presente che $\sin[\sqrt{ab}\,(R - R')]/\sqrt{ab} \to (R - R')$, [4].

ove si è posto :

$$
(10)\quad \begin{cases}
I_c(g) = \displaystyle\int_0^R g(R') \cos[\sqrt{ab}\,(R - R')]\, dR' = \\
\qquad\qquad = \displaystyle\int_0^t g(t')\, r(t') \cos\{\sqrt{ab}\,[R(t) - R(t')]\}\, dt', \\
I_s(g) = \displaystyle\int_0^R g(R') \sin[\sqrt{ab}\,(R - R')]\, dR' = \\
\qquad\qquad = \displaystyle\int_0^t g(t')\, r(t') \sin\{\sqrt{ab}\,[R(t) - R(t')]\}\, dt'.
\end{cases}
$$

Le (9) costituiscono la base su cui si fondano i lavori citati nel paragrafo n. 1.

Facciamo ora l'ipotesi che F_1, F_2 ed F_3 siano funzioni di classe Lr_0; dalle (4) e dalle (5) segue che allora anche M_x, M_y ed M_z sono di classe Lr_0 e quindi, a causa delle (9), si può concludere che esistono due costanti $\bar{p}$ e $\bar{q}$, indipendenti da r_0, tali che $|p(t)| \leq \bar{p}$, $|q(t)| \leq \bar{q}$, per ogni $t \in [0, t_1]$, purchè ovviamente si ammetta che $|p_0| \leq \bar{p}_0$, $|q_0| \leq \bar{q}_0$, ove $\bar{p}_0$ e $\bar{q}_0$ sono indipendenti da r_0, (si veda la nota ([2]) del § 4).

Possiamo, cioè scrivere :

$$
(11)\qquad p(t) = 0\,(1), \quad q(t) = 0\,(1),
$$

ove, qui e nel seguito, con il simbolo, che compare al secondo membro delle (11), intendiamo che il valore assoluto dei primi membri è maggiorato da una quantità indipendente da r_0 per $t \in [0, t_1]$. Più in generale, con il simbolo $0\,(1/r_0^n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, intenderemo una grandezza la cui misura è maggiorata da una quantità indipendente da r_0 moltiplicata per $1/|r_0|^n$. In altri termini, il simbolo $0\,(1/r_0^n)$ indica una quantità che risulta moltiplicata per $1/|m|^n$, quando dalla condizione iniziale r_0 si passi alla condizione $r_0' = m\, r_0$.

Integrando poi l'ultima delle (8), si ha:

$$\frac{r}{r_0} - 1 = \frac{1}{r_0} \int_0^R (cpq/r + M_z/Cr)\, dR' = \frac{1}{r_0} \int_0^t (cpq + M_z/C)\, dt',$$

ove l'ultimo integrale è del tipo 0 (1). Vale pertanto la relazione:

$$r(t)/r_0 = 1 + 0\,(1/r_0). \tag{12}$$

Riprendendo ora le considerazioni sulla tenacia dell'asse di rapida rotazione, fatte nel § 1, immaginiamo di eseguire due esperienze con il sistema rigido S: la prima imprimendo una rotazione iniziale $r(0) = r_0$, e la seconda con $r(0) = r_0' = m\, r_0$, m essendo un numero positivo molto maggiore dell'unità. La relazione (12) suggerisce che il rapporto ($r(t)$/rotazione iniziale) sia dello stesso ordine di grandezza nelle due esperienze, ovvero che $|\, r'(t)/r(t)\,|$ sia dell'ordine di m, ove con $r'(t)$ si è indicata la componente di ω secondo l'asse z nella seconda esperienza. È naturale allora chiedersi che cosa accada delle altre due componenti di ω; nel passare dalla prima alla seconda esperienza.

Le osservazioni, di cui sopra, suggeriscono di trasformare le prime due (8), introducendo due nuove variabili $P = rp$, $Q = rq$; si ottiene allora:

$$\begin{aligned} &\frac{dP}{dR} + aQ = M_x/A + \frac{1}{r}(cp^2 q + pM_z/C), \quad P(0) = P_0 = p_0 r_0, \\ &\frac{dQ}{dR} - bP = M_y/B + \frac{1}{r}(cp\, q^2 + q M_z/C), \quad Q(0) = Q_0 = q_0 r_0. \end{aligned} \tag{13}$$

Le equazioni (13) costituiscono la base su cui si fonda il nuovo metodo per studiare il principio dell'effetto giroscopico, cui si è accennato prima delle (7). Infatti, nei paragrafi seguenti, mostreremo come le (13) ed alcune relazioni, valide per le componenti M_x ed M_y di $\mathbf{M}$, suggeriscano di trasformare ulteriormente le (13), introducendo due nuove variabili Π e X, combinazioni lineari di P, Q e delle componenti M_x ed M_y. L'introduzione delle variabili Π e X permetterà

di giungere in modo molto semplice a risultati notevolmente più generali di quelli ottenuti nei lavori citati al § 1.

4. Nel presente paragrafo ci proponiamo di applicare il metodo, di cui al 3, al caso in cui $\mathbf{M}$ soddisfi ipotesi analoghe a quelle fatte da QUILGHINI in [4]. Notiamo per inciso che, a rigore, sarebbe completamente giustificato, da un punto di vista fisico, fare delle ipotesi solo sulle componenti F_1, F_2 ed F_3 di $\mathbf{F}$ in T_1 ed eventualmente sul punto di applicazione Ω. A tale regola ci atterremo sempre in questo e nei nn. seguenti.

Supponiamo dunque che F_1, F_2 ed F_3 siano di classe Lr_0 insieme con le loro derivate parziali rispetto a t, r, ϑ e ψ e con le derivate parziali rispetto a p, q, φ moltiplicate per r. Avendosi allora dalla (3) $\dot{\mathbf{M}} = (\Omega - 0) \wedge \mathbf{F} + \Omega \wedge \mathbf{F}$ e facendo uso delle (1), delle (2) e di formule analoghe alle (4) e (5), si conclude che le componenti in T del vettore $\dot{\mathbf{M}}$, derivato totale rispetto al tempo di $\mathbf{M}$ (la derivazione essendo eseguita in T_1), sono di classe Lr_0. L'appartenenza ad Lr_0 delle componenti $(\dot{\mathbf{M}})_x = \dot{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{i}$, $(\dot{\mathbf{M}})_y = \dot{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{j}$, $(\dot{\mathbf{M}})_z = \dot{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{k}$ costituiscono appunto la base del citato lavoro [4].

Come si è accennato nel § precedente, conviene trasformare ulteriormente le (13), introducendo due nuove variabili Π e X, combinazioni lineari di P, Q e delle componenti M_x ed M_y. Consideriamo infatti la ben nota formula:

$$\mathbf{i}\,\frac{dv_x}{dt} + \mathbf{j}\,\frac{dv_y}{dt} + \mathbf{k}\,\frac{dv_z}{dt} = \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega}, \tag{14}$$

ove $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{i}_1 \frac{d}{dt} v_{x_1} + \mathbf{j}_1 \frac{d}{dt} v_{y_1} + \mathbf{k}_1 \frac{d}{dt} v_{z_1}$. Facciamo uso della (14) con $\mathbf{v} = \mathbf{M}$ e ricordando la (7), si ha:

$$\frac{d}{dR}(M_x) - M_y = \frac{1}{r}\,[(\dot{\mathbf{M}})_x - qM_z], \tag{15}$$

$$\frac{d}{dR}(M_y) + M_x = \frac{1}{r}\,[(\mathbf{M})_y + pM_z],$$

ove, nelle nostre ipotesi, $(\dot{\mathbf{M}})_x$ ed $(\dot{\mathbf{M}})_y$ sono di classe Lr_0.

Confrontando le (15) con le (13), si nota un'analogia formale che suggerisce le posizioni seguenti:

$$\Pi = P + \alpha M_y, \qquad X = Q + \beta M_x, \tag{16}$$

α e β essendo costanti che fisseremo in modo opportuno.

Dalle (13), (15) e (16) si ottiene:

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi}{dR} + aX = (1/A - \alpha + a\beta) M_x + f_1/r, \\[2ex] \dfrac{dX}{dR} - b\Pi = (1/B - b\alpha + \beta) M_y + f_2/r, \end{cases} \tag{17}$$

ove si è posto:

$$\begin{cases} f_1 = \alpha [(\dot{\mathbf{M}})_y + pM_z] + cp^2 q + pM_z/C, \\ f_2 = \beta [(\dot{\mathbf{M}})_x - qM_z] + cpq^2 + qM_z/C, \end{cases} \tag{13}$$

f_1 ed f_2 risultando di classe Lr_0.

La forma delle (17) suggerisce di fissare α e β in modo che siano verificate le relazioni:

$$\alpha - a\beta = 1/A, \qquad b\alpha - \beta = 1/B. \tag{19}$$

Le (17) divengono allora:

$$\frac{d\Pi}{dR} + aX = f_1/r, \qquad \frac{dX}{dR} - b\Pi = f_2/r, \tag{20}$$

a cui vanno associate le condizioni iniziali:

$$\Pi(0) = \Pi_0 = P_0 + \alpha M_y(0), \qquad X(0) = X_0 = Q_0 + \beta M_x(0). \tag{20'}$$

Prima di fare uso delle (20), notiamo che il sistema lineare (19) nella ipotesi $ab \neq 1$, fornisce:

$$\alpha = \frac{a - B/A}{B(ab-1)}, \qquad \beta = \frac{-b + A/B}{A(ab-1)}, \qquad ab \neq 1. \tag{21}$$

Se invece $ab = 1$ (eventualità possibile se e solo se S è un sistema materiale piano), le (21) non sono più valide; tuttavia, se $ab = 1$ ed $A = B$, (caso piano giroscopico), il sistema (19) è ancora risolubile, benchè indeterminato. Possiamo allora scegliere la soluzione:

$$\alpha = 1/2A, \qquad \beta = -1/2A, \qquad (ab = 1,\ A = B). \tag{21'}$$

Se infine $ab = 1$ ed $A \neq B$ (caso piano non giroscopico), il sistema (19) è impossibile; dunque, nel caso piano non giroscopico, non sono più valide le conclusioni che trarremo dalle (20).

Escluso quindi il caso $ab = 1$ ed $A \neq B$, integrando le (20) con le condizioni (20') si ottiene (Cfr. § 2.):

$$\left\{\begin{aligned} P &= -\alpha M_y + \Pi_0 \cos(\sqrt{ab}\,R) - \sqrt{\frac{a}{b}}\,X_0 \sin(\sqrt{ab}\,R) + I_c(f_1/r) - \\ &\qquad\qquad - \sqrt{\frac{a}{b}}\,I_s(f_2/r), \\ Q &= -\beta M_x + X_0 \cos(\sqrt{ab}\,R) + \sqrt{\frac{a}{b}}\,\Pi_0 \sin(\sqrt{ab}\,R) + \\ &\qquad\qquad + \sqrt{\frac{a}{b}}\,I_s(f_1/r) + I_c(f_2/r), \end{aligned}\right. \tag{22}$$

ove si è fatto uso delle (16).

Nel caso in cui l'ellissoide d'inerzia di S rispetto ad O sia una sfera (caso sferico $a = b = c = 0$), integrando le (20) con le condizioni (20') e con $a = b = 0$, si ottiene:

$$P = -\alpha M_y + \Pi_0 + \int_0^R \frac{f_1(R')}{r(R')}\,dR'; \tag{22'}$$

$$Q = -\beta M_x + X_0 + \int_0^R \frac{f_2(R')}{r(R')}\,dR',$$

ove ora $\alpha = 1/A$, $\beta = -1/B = -1/A$.

Tenendo poi presente che, se $g = g(t, p, q, r, \vartheta, \psi, \varphi)$ è una funzione di classe Lr_0 definita in $\mathcal{R}$, vale la relazione:

$$(12') \qquad \int_0^R \frac{g}{r}\, dR' = \int_0^t g\, dt' = 0\,(1),$$

si vede subito che gli integrali I_c, I_s e quelli che compaiono ai secondi membri delle (22′) sono del tipo $0\,(1)$.

Dalle (22) oppure dalle (22′) segue quindi che $P(t) = 0\,(1)$, $Q(t) = 0\,(1)$, purchè naturalmente $\Pi_0 = 0\,(1)$, $X_0 = 0\,(1)$, cioè purchè $p_0 = 0\,(1/r_0)$ e $q_0 = 0\,(1/r_0)$, [2]. Si ottiene perciò:

$$p(t) = P(t)/r(t) = \frac{P(t)}{r_0}\, r_0/r(t) = 0\,(1/r_0)\,[1 + 0\,(1/r_0)] = 0\,(1/r_0),$$

e analogamente:

$$q(t) = Q(t)/r(t) = 0\,(1/r_0),$$

ove si è fatto uso della relazione:

$$r_0/r(t) = 1 + 0\,(1/r_0),\ ^{3}).$$

Dalle precedenti segue infine:

$$|\dot{\mathbf{k}}| = |\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{k}| = |q\mathbf{i} - p\mathbf{j}| = 0\,(1/r_0).$$

Riassumendo i risultati ottenuti, possiamo enunciare il seguente:

---

[2]) Notiamo che se, come la pratica suggerisce, conveniamo di eseguire esperienze tali che $|r_0| \geq r_{\min}$, dall'ipotesi $p_0 = 0\,(1/r_0)$, ovvero dall'ipotesi $|p_0| <$ (costante indipendente da r_0)$/|r_0|$ segue $|p_0| < \overline{p}_0 =$ (costante indipendente da r_0)$/r_{\min}$ = quantità indipendente da r_0. In modo analogo si ragiona per q_0.

[3]) Dalla (12) si ha infatti: $1/(1 + a/|r_0|) \leq r_0/r(t) \leq 1/(1 - a/|r_0|)$, ove a è una costante positiva indipendente da r_0. D'altra parte:

$$1/(1 + a/|r_0|) \geq 1 - a/|r_0| \geq 1 - 2a/|r_0|; \qquad 1/(1 - a/|r_0|) \leq 1 + 2a/|r_0|,$$

purchè $a/|r_0| \leq 1/2$.

Dunque $r_0/r(t) = 1 + 0\,(1/r_0)$ purchè $|r_0|$ sia sufficientemente grande, (Cfr. nota [2])).

TEOREMA 1. *Se* $p_0 = 0\,(1/r_0)$, $q_0 = 0\,(1/r_0)$ *ed* F_1, F_2, F_3 *insieme con le loro derivate parziali ripetto a* t, r, ϑ *e* ψ *e con le derivate parziali rispetto a* p, q, φ *moltiplicate per* r *sono di classe* Lr_0, *allora* $|\dot{\mathbf{k}}| = 0\,(1/r_0)$ *per tutti gli istanti* $t \in [0, t_1]$ *e l'asse di rapida rotazione è dotato di tenacia, purchè* S *non sia un sistema materiale piano a struttura non giroscopica.*

I risultati sintetizzati nell'enunciato del Teorema 1 possono essere utilmente interpetrati immaginando di eseguire, con il sistema rigido S, due esprienze del tipo di quelle descritte alla fine del § 3. Supponiamo dunque che, nella seconda esperienza, il valore iniziale di $r(t)$ sia r_0' uguale ad m volte ($m >> 1$) il valore iniziale r_0 della prima esperienza. Ebbene, se F_1, F_2, F_3 soddisfano le ipotesi del Teorema 1, il modulo della variazione per unità di tempo del versore dell'asse di rapida rotazione è maggiorato da una quantità che, nel passare dalla prima alla seconda esperienza, viene moltiplicata per $1/m$. Possiamo cioè affermare che l'asse z, nella seconda esperienza, tende a « conservare più a lungo » la sua direzione iniziale. Quanto precede è valido purchè, nel passare dalla prima alla seconda esperienza, i valori iniziali di p e di q vengano (almeno) divisi per m. La necessità di questa ipotesi è dovuta agli accoppiamenti esistenti tra le varie componenti di ω (Cfr. eq. (1)), che, se $r(t)$ ha valori rilevanti, possono dar luogo a rapide variazioni di p e di q. Giova portanto sottolineare che l'ipotesi $p_0 = 0\,(1/r_0)$, $q_0 = 0\,(1/r_0)$ e — naturalmente — il significato del simbolo $0\,(1/r_0)$ sono di importanza fondamentale quando si voglia discutere il risultato di esperienze pratiche (si pensi per es. ad una comune trottola), che sembrano non essere in completo accordo con i risultati del Teor. 1.

Resta da esaminare il caso piano non giroscopico; osserviamo che, se $a = b = 1$ ($C = A + B$) ed $A \neq B$, le (17) possono scriversi nella forma:

$$(17') \qquad \frac{dH}{dR} + X = (1/A - \alpha + \beta)\, M_x + f_1/r,$$

$$\frac{dX}{dR} - H = (1/B - \alpha + \beta)\, M_y + f_2/r,$$

ove i coefficienti di M_x e di M_y non possono essere resi contemporaneamente nulli, dato che il sistema (19) è impossibile se $ab = 1$ ed

$A \neq B$. Possiamo tuttavia scegliere α e β in modo che, per esempio, $\alpha - \beta = 1/A$, cioè, per fissare le idee, porre $\alpha = 1/2A$, $\beta = -1/2A$; le (17′) divengono allora:

$$\frac{d\Pi}{dR} + X = f_1/r\,, \qquad \frac{dX}{dR} - \Pi = \frac{A-B}{AB} M_y + f_2/r\,,$$

che, integrate, forniscono:

$$(22'') \quad \begin{cases} P = \{\Pi_0 \cos R - X_0 \sin R - \alpha M_y + I_c(f_1/r) - I_s(f_2/r)\} + \\ \qquad\qquad + \dfrac{A-B}{AB} I_s(M_y), \\ Q = \{X_0 \cos R + \Pi_0 \sin R - \beta M_x + I_s(f_1/r) + I_c(f_2/r)\} + \\ \qquad\qquad + \dfrac{A-B}{AB} I_c(M_y), \end{cases}$$

ove I_c ed I_s sono definiti dalle (10) con $\sqrt{ab} = 1$.

Tenendo presente che, nelle ipotesi fatte, i termini entro parentesi graffa sono tutti del tipo $0(1)$, ma che in generale si ha:

$$\frac{1}{r_0} I_s(M_y) = 0(1), \qquad \frac{1}{r_0} I_c(M_y) = 0(1),$$

possiamo concludere che, nel caso piano non giroscopico, P e Q non sono in generale funzioni del tipo $0(1)$ e quindi p e q non sono del tipo $0(1/r_0)$. Osserviamo però che dalle (22″) si può concludere che $P = 0(1)$ e $Q = 0(1)$ se $M_y = 0$ oppure se $(r\,M_y) \in Lr_0$. Allo stesso risultato si perverrebbe infine se $M_x = 0$ oppure se $(r\,M_x) \in Lr_0$, scegliendo α e β in modo che $\alpha - \beta = 1/B$.

Possiamo pertanto perfezionare il Teorema 1. con il seguente:

TEOREMA 1′. *Se $p_0 = 0(1/r_0)$, $q_0 = 0(1/r_0)$ ed F_1, F_2, F_3 insieme con le loro derivate parziali rispetto a t, r, ϑ, ψ e con le derivate parziali rispetto a p, q, φ moltiplicate per r sono di classe Lr_0 ed S è un sistema piano a struttura non giroscopica, allora l'asse di rapida rotazione è dotato di tenacia, purchè M_x (oppure M_y) sia nullo o tale che $(r\,M_x) \in Lr_0$.*

Concludiamo sottolineando il fatto che i risultati del Teorema 1 sono quelli già ottenuti, seppure con metodi formalmente più complicati, da QUILGHINI in [4]. Il Teorema 1′ mette poi in evidenza che

l'asse di rapida rotazione è dotato di tenacia anche se $ab = 1$ ed $A \neq B$ in ipotesi più semplici di quelle usate in [4].

5. Nel presente paragrafo ci proponiamo di applicare il metodo, già usato nel n. 4, al caso in cui le componenti di $\mathbf{F}$ in T abbiano la forma considerata da STOPPELLI in [10]. Ammettiamo cioè che F_1, F_2, F_3 siano del tipo:

$$F_i = \sum_{n=1}^{\infty} F_{is}^{(n)} \sin(\gamma_n \varphi) + F_{ic}^{(n)} \cos(\gamma_n \varphi), \qquad n = 1, 2, 3, \tag{23}$$

ove $F_{is}^{(n)}$ e $F_{ic}^{(n)}$ sono funzioni di classe Lr_0 e derivabili parzialmente rispetto ai loro argomenti, $\{\gamma_n\}$ è una successione crescente di numeri interi non negativi e naturalmente si suppone che la serie al secondo membro della (23) goda di tutte le proprietà che sono necessarie affinchè siano leciti tutti i procedimenti analitici, di cui faremo uso nel seguito.

Vogliamo qui sottolineare il fatto che in [10] si suppone che $F_{is}^{(n)}$ ed $F_{ic}^{(n)}$ dipendano solo da t, ϑ, ψ, r; l'uso delle (13) ed il passaggio ad opportune variabili Π e X, cui si è accennato nel § 3, permetteranno invece di estendere la nostra indagine al caso in cui $F_{is}^{(n)}$ ed $F_{ic}^{(n)}$ dipendano da t, p, q, r e dagli angoli di Eulero, e di semplificare notevolmente i necessari procedimenti analitici.

Ricordando ora le (4) e le (5) e facendo uso delle formule di prostaferesi, è subito visto che, nelle ipotesi (23), le componenti M_x ed M_y di M hanno la forma:

$$M_x = \sum_{n=1}^{\infty} \{u_{xn} \sin(\sigma_n \varphi) + v_{xn} \cos(\sigma_n \varphi)\}; \tag{24}$$

$$M_y = \sum_{n=1}^{\infty} \{u_{yn} \sin(\sigma_n \varphi) + v_{yn} \cos(\sigma_n \varphi)\},$$

ove $\{\sigma_n\}$ è ancora una successione crescente di numeri interi non negativi e le funzioni $u_{xn}, v_{xn}, u_{yn}, v_{yn}$ si esprimono semplicemente per mezzo delle $F_{is}^{(n)}$, $F_{ic}^{(n)}$ e delle coordinate x, y, z di Ω, [9]. Non è poi difficile provare che, se anche x, y, z sono funzioni di classe Lr_0 e derivabili parzialmente rispetto al tempo, alle componenti di ω ed agli angoli di Eulero, delle stesse proprietà godono $u_{xn}, v_{xn}, u_{yn}, v_{xn}$ [4]).

---

[4]) D'ora in poi si suppone che le coordinate di Ω possano dipendere da t anche tramite le componenti di ω e tramite gli angoli di Eulero.

Avvertiamo infine che, se in particolare $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$, $u_{xn} = v_{xn} = u_{yn} = v_{yn} = 0$ per $n \geq 3$ e $u_{xn}, v_{xn}, u_{yn}, v_{yn}$ per $n = 1, 2$ non dipendono da φ, i risultati cui perverremo nel 6., si riducono a quelli trovati da RIONERO in [9].

Osserviamo ora che si ha:

$$
(25)\quad
\begin{aligned}
&\frac{d}{dR}[\sin(\sigma_n\varphi)] - [\sigma_n \cos(\sigma_n\varphi)] = -\sigma_n \cos(\sigma_n\varphi)\frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{r}\operatorname{cotg}\vartheta,\\
&\frac{d}{dR}[\cos(\sigma_n\varphi)] + [\sigma_n \sin(\sigma_n\varphi)] = \sigma_n \sin(\sigma_n\varphi)\frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{r}\operatorname{cotg}\vartheta.
\end{aligned}
$$

L'analogia formale tra le (25) e le (13) suggerisce ancora una volta il seguente cambiamento di variabili:

$$
(26)\quad
\begin{cases}
\Pi = P + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\{\alpha_n \cos(\sigma_n\varphi) + \bar{\alpha}_n \sin(\sigma_n\varphi)\},\\
X = Q + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\{\beta_n \sin(\sigma_n\varphi) + \bar{\beta}_n \cos(\sigma_n\varphi)\},
\end{cases}
$$

ove $\alpha_n, \bar{\alpha}_n, \beta_n, \bar{\beta}_n$ sono funzioni opportune (di classe Lr_0), di cui fra breve diremo. Dalle (26) e dalle (13) segue:

$$
(27)\quad
\begin{cases}
\dfrac{d\Pi}{dR} + aX = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\dfrac{u_{xn}}{A} - \sigma_n\alpha_n + a\beta_n\right]\sin(\sigma_n\varphi) + \left[\dfrac{v_{xn}}{A} + \sigma_n\bar{\alpha}_n + a\bar{\beta}_n\right]\cos(\sigma_n\varphi)\right\} +\\
\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\cos(\sigma_n\varphi)\dfrac{d\alpha_n}{dR} + \sin(\sigma_n\varphi)\dfrac{d\bar{\alpha}_n}{dR}\right\} + G_1/r,\\
\dfrac{dX}{dR} - b\Pi = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\dfrac{v_{yn}}{B} - b\alpha_n + \sigma_n\beta_n\right]\cos(\sigma_n\varphi) + \left[\dfrac{u_{yn}}{B} - b\bar{\alpha}_n - \sigma_n\bar{\beta}_n\right]\sin(\sigma_n\varphi)\right\} +\\
\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\sin(\sigma_n\varphi)\dfrac{d\beta_n}{dR} + \cos(\sigma_n\varphi)\dfrac{d\bar{\beta}_n}{dR}\right\} + G_2/r,
\end{cases}
$$

ove si è posto:

$$
(28)\quad \begin{cases}
G_1 = cp^2 q + pM_z/C + \\
\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \{\alpha_n \sigma_n \sin(\sigma_n \varphi) - \bar{\alpha}_n \sigma_n \cos(\sigma_n \varphi)\} (p \sin\varphi + q \cos\varphi) \operatorname{cotg} \vartheta, \\
G_2 = cpq^2 + qM_z/C + \\
\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \{ - \beta_n \sigma_n \cos(\sigma_n \varphi) + \bar{\beta}_n \sigma_n \sin(\sigma_n \varphi)\} (p \sin\varphi + q \cos\varphi) \operatorname{cotg} \vartheta,
\end{cases}
$$

G_1 e G_2 risultando funzioni di classe Lr_0.

Le (27) suggeriscono di scegliere $\alpha_n, \bar{\alpha}_n, \beta_n, \bar{\beta}_n$ in modo che siano soddisfatti i sistemi:

$$
(29)\qquad \sigma_n \alpha_n - a\beta_n = u_{xn}/A, \qquad b\alpha_n - \sigma_n \beta_n = v_{yn}/B, \qquad n = 1, 2, \ldots
$$

$$
(29')\qquad \sigma_n \bar{\alpha}_n + a\bar{\beta}_n = - v_{xn}/A, \qquad b\bar{\alpha}_n + \sigma_n \bar{\beta}_n = u_{yn}/B, \qquad n = 1, 2, \ldots .
$$

Le (27) divengono allora:

$$
(30)\quad \begin{cases}
\dfrac{d\Pi}{dR} + aX = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \cos(\sigma_n \varphi) \dfrac{d\alpha_n}{dR} + \sin(\sigma_n \varphi) \dfrac{d\bar{\alpha}_n}{dR} \right\} + G_1/r \\[2ex]
\dfrac{dX}{dR} - b\Pi = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sin(\sigma_n \varphi) \dfrac{d\beta_n}{dR} + \cos(\sigma_n \varphi) \dfrac{d\bar{\beta}_n}{dR} \right\} + G_2/r.
\end{cases}
$$

Prima di fare uso delle (30), notiamo che dai sistemi (29) e (29′), se $\sigma_n \neq \sqrt{ab}$ per $n = 1, 2, \ldots$, si ottiene:

$$
(31)\qquad \alpha_n = \frac{\dfrac{\sigma_n}{A} u_{xn} - \dfrac{a}{B} v_{yn}}{\sigma_n^2 - ab}, \qquad \beta_n = \frac{-\dfrac{\sigma_n}{B} v_{yn} + \dfrac{b}{A} u_{xn}}{\sigma_n^2 - ab},
$$

$$
(31')\qquad \bar{\alpha} = \frac{-\dfrac{\sigma_n}{A} v_{xn} - \dfrac{a}{B} u_{yn}}{\sigma_n^2 - ab}, \qquad \bar{\beta}_n = \frac{\dfrac{\sigma_n}{B} u_{yn} + \dfrac{b}{A} v_{xn}}{\sigma_n^2 - ab}.
$$

Se invece esiste un $\bar{n}$ per cui $\sigma_{\bar{n}} = \sqrt{ab}$, le (31) e le (31′) non sono valide per $n = \bar{n}$. Tuttavia, se per $\sigma_{\bar{n}} = \sqrt{ab}$, valgono le relazioni:

$$\frac{u_{x\bar{n}}}{A\sqrt{ab}} - \frac{v_{y\bar{n}}}{bB} = 0\,, \qquad \frac{u_{y\bar{n}}}{bB} + \frac{v_{x\bar{n}}}{A\sqrt{ab}} = 0, \tag{32}$$

i sistemi (29) e (29′) risultano possibili e indeterminati per $n = \bar{n}$ e si ha ad es.:

$$\alpha_{\bar{n}} = \frac{u_{x\bar{n}}}{2A\sqrt{ab}} = \frac{v_{y\bar{n}}}{2\,bB}\,, \qquad \beta_{\bar{n}} = -\frac{u_{x\bar{n}}}{2\,aA}\,, \tag{33}$$

$$\bar{\alpha}_{\bar{n}} = -\frac{v_{x\bar{n}}}{2\,A\sqrt{ab}} = \frac{u_{y\bar{n}}}{2\,bB}\,, \qquad \bar{\beta}_{\bar{n}} = -\frac{v_{x\bar{n}}}{2aA}\,,$$

ove per ora si è escluso che l'ellissoide d'inerzia di S rispetto ad O sia una sfera.

Escludendo dunque il caso sferico ed il caso in cui esiste un $\bar{n}$ tale che $\sigma_n = \sqrt{ab}$ ed almeno una delle (32) non è verificata, possiamo integrare le (30) con le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \Pi(0) = \Pi_0 = P_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \{\alpha_n(0)\cos(\sigma_n\varphi_0) + \bar{\alpha}_n(0)\sin(\sigma_n\varphi_0)\}, \\ X(0) = X_0 = Q_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \{\beta_n(0)\sin(\sigma_n\varphi_0) + \bar{\beta}_n(0)\cos(\sigma_n\varphi_0)\}, \end{cases} \tag{30′}$$

ottenendosi:

$$\begin{cases} \Pi = \Pi_0\cos(\sqrt{ab}R) - \sqrt{\dfrac{a}{b}}\,X_0\sin(\sqrt{ab}\,R) + \\ \qquad\qquad + I_c\left(\dfrac{\mu_1 + G_1}{r}\right) - \sqrt{\dfrac{a}{b}}\,I_s\left(\dfrac{\mu_2 + G_2}{r}\right), \\ X = X_0\cos(\sqrt{ab}\,R) + \sqrt{\dfrac{b}{a}}\,\Pi_0\sin(\sqrt{ab}\,R) + \\ \qquad\qquad + \sqrt{\dfrac{b}{a}}\,I_s\left(\dfrac{\mu_1 + G_1}{r}\right) + I_c\left(\dfrac{\mu_2 + G_2}{r}\right), \end{cases} \tag{34}$$

ove si è posto:

$$(35)\qquad \begin{cases} \mu_1 = r \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\{ \cos(\sigma_n \varphi) \dfrac{d\alpha_n}{dR} + \sin(\sigma_n \varphi) \dfrac{d\bar{\alpha}_n}{dR} \right\}, \\ \mu_2 = r \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\{ \sin(\sigma_n \varphi) \dfrac{d\beta_n}{dR} + \cos(\sigma_n \varphi) \dfrac{d\bar{\beta}_n}{dR} \right\}. \end{cases}$$

Nel caso sferico invece, dalle (30) si ottiene subito:

$$(34')\qquad \Pi = \Pi_0 + \int_0^R \frac{\mu_1 + G_1}{r}\, dR, \qquad X = X_0 + \int_0^R \frac{\mu_2 + G_2}{r}\, dR,$$

le (34′) essendo valide se $\sigma_n \neq 0$ per $n = 1, 2, \ldots$. Se poi esiste un $\bar{n}$ per cui $\sigma_{\bar{n}} = 0$ e $u_{x\bar{n}} = v_{x\bar{n}} = u_{y\bar{n}} = v_{y\bar{n}} = 0$, le (34′) sono ancora valide, purchè in esse si assuma ad es.: $\alpha_{\bar{n}} = \bar{\alpha}_{\bar{n}} = \beta_{\bar{n}} = \bar{\beta}_{\bar{n}} = 0$.

Dalla (34) o dalle (34′), tenendo presente la (12′), seguono immediatamente i risultati enunciati nel seguente:

TEOREMA 2. *Se valgono le ipotesi*:

a) $p_0 = 0\,(1/r_0)$, $q_0 = 0\,(1/r_0)$ *e quindi* $P_0 = 0\,(1)$, $Q_0 = 0\,(1)$ e $\Pi_0 = 0\,(1)$, $X_0 = 0\,(1)$;

v) le funzioni $F_{ic}^{(n)}$, $F_{is}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, 3)$ *e le coordinate* x, y, z *di* Ω *sono funzioni di classe* Lr_0 *e derivabili parzialmente rispetto ai loro argomenti*;

c) le funzioni μ_1 *e* μ_2, *definite dalle* (35), *sono di classe* Lr_0; *allora* $p = 0\,(1/r_0)$ *e* $q = 0\,(1/r_0)$ *per* $t \in [0, t_1]$, *purchè si verifichi una delle tre condizioni seguenti*:

a′) $\sigma_n \neq \sqrt{ab}$ *per* $n = 1, 2, \ldots$;

b′) se esiste un $\bar{n}$ *per cui* $\sigma_{\bar{n}} = \sqrt{ab}$, *valgano le* (32) *e l'ellissoide d'inerzia di* S *rispetto ad* O *non sia una sfera*;

c′) se l'ellissoide d'inerzia di S *rispetto ad* O *è una sfera, sia* $\sigma_n \neq 0$ *per* $n = 1, 2, \ldots$, *appure, se esiste un* $\bar{n}$ *per cui* $\sigma_{\bar{n}} = 0$, *sia anche* $u_{x\bar{n}} = v_{x\bar{n}} = u_{y\bar{n}} = v_{y\bar{n}} = 0$.

Dal Teorema 2 seguono poi i seguenti Corollari.

COROLLARIO 2.1. *Ferme restando le ipotesi* a), b), c) *del* Teorema 2 *ed essendo verificata una delle tre condizioni* a'), b') c'), *se* $F_{ic}^{(n)}$, $F_{is}^{(n)}$ *e le coordinate di* Ω *hanno derivata totale rispetto al tempo di classe* Lr_0, *allora* $p = 0\,(1/r_0)$ *e* $q = 0\,(1/r_0)$ *per* $t \in [0, t_1]$.

In tal caso infatti le funzioni u_{xn}, v_{xn}, u_{yn}, v_{yn} hanno derivata totale rispetto al tempo di classe Lr_0 e quindi, tenendo presenti le (31) e le (31'), la stessa conclusione vale per α_n, $\overline{\alpha}_n$, β_n, $\overline{\beta}_n$.

Avendosi poi $\dfrac{d}{dR} = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}$, dalle (35) segue che μ_1 e μ_2 sono funzioni di classe Lr_0 e quindi valgono le conclusioni del Teorema 2.

COROLLARIO 2.2. *Ferme restando le ipotesi* a), b), c) *del* Teorema 2 *ed essendo verificata una delle tre condizioni* a') b') c') *se* $F_{ic}^{(n)}$, $F_{is}^{(n)}$ *e le coordinate di* Ω *dipendono solo da* t, r, ϑ, ψ *e da* φ *tramite* $\Phi = \varphi/r$ (*oppure tramite* $\Phi = \varphi - R$) *e le loro derivate parziali rispetto a* t, r, ϑ, ψ, φ *sono di classe* Lr_0, *allora* $p = 0\,(1/r_0)$ *e* $q = 0\,(1/r_0)$.

Infatti, nelle ipotesi ammesse per $F_{ic}^{(n)}$, $F_{is}^{(n)}$, x, y, z, segue che u_{xn}, v_{xn}, u_{yn}, v_{yn} dipendono solo da t, r, ϑ, ψ, Φ e che le loro derivate parziali sono di classe Lr_0. Per le (31) e le (31') allora anche α_n, $\overline{\alpha}_n$, β_n, $\overline{\beta}_n$ dipendono solo da t, r, ϑ, ψ, Φ e le loro derivate parziali appartengono ad Lr_0. Si ha poi ad es.:

$$\frac{d}{dR}\alpha_n = \frac{1}{r}\frac{\partial\alpha_n}{\partial t} + \frac{\partial\alpha_n}{\partial r}\frac{dr}{dR} + \frac{\partial\alpha_n}{\partial\vartheta}\frac{d\vartheta}{dR} + \frac{\partial\alpha_n}{\partial\psi}\frac{d\psi}{dR} + \frac{\partial\alpha_n}{\partial\Phi}\frac{d\Phi}{dR} =$$

$$= (\text{una funzione di classe } Lr_0)/r,$$

a causa delle (8), delle (8') e del fatto che:

$$\frac{d\Phi}{dR} = \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dR} - \frac{\Phi}{r^2}\frac{dr}{dR}.$$

Dunque μ_1 e μ_2 sono funzioni di classe Lr_0 e, per il Teorema 2, $p = 0\,(1/r_0)$, $q = 0\,(1/r_0)$.

Se, in particolare, ferme restando tutte le altre ipotesi, $F_{ic}^{(n)}$, $F_{is}^{(n)}$, x, y, z non dipendono da Φ, i risultati del Corollario 2.2 coincidono con quelli di STOPPELLI, [10].

Concludiamo questo paragrafo, esaminando il caso escluso dalla condizione b') del Teorema 2, avvertendo che con un metodo analogo può essere discusso il caso escluso dalla c').

Ammettiamo dunque che esista un $\bar{n}$ per cui $\sigma_{\bar{n}} = \sqrt{ab}$, e che, per esempio, la prima delle (32) non sia verificata; ciò implica che per $n = \bar{n}$, il sistema (29) è impossibile. Tenendo tuttavia presenti le (27), notiamo che, se scegliamo $\alpha_{\bar{n}} = u_{x\bar{n}}/2A\sqrt{ab}$, $\beta_n = -u_{x\bar{n}}/2aA$, e naturalmente facciamo uso delle (31) per $n \neq \bar{n}$ e delle (31′) per $n = 1, 2, \ldots$, otteniamo:

$$
(30'') \quad \begin{cases}
\dfrac{d\Pi}{dR} + aX = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\{ \cos(\sigma_n \varphi) \dfrac{d\alpha_n}{dR} + \sin(\sigma_n \varphi) \dfrac{d\bar{\alpha}_n}{dR} \right\} + G_1/r \\[2ex]
\dfrac{dX}{dR} - b\Pi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\{ \sin(\sigma_n \varphi) \dfrac{d\beta_n}{dR} + \cos(\sigma_n \varphi) \dfrac{d\bar{\beta}_n}{dR} \right\} + G_2/r + \\[2ex]
\qquad\qquad + \left[\left(\dfrac{v_{y\bar{n}}}{B} - \sqrt{\dfrac{b}{a}} \dfrac{u_{x\bar{n}}}{A} \right) \cos(\sqrt{ab}\,\varphi) \right],
\end{cases}
$$

dato che la scelta fatta per $\alpha_{\bar{n}}$ e per $\beta_{\bar{n}}$ implica:

$$
\frac{u_{x\bar{n}}}{A} - \sqrt{ab}\,\alpha_{\bar{n}} + a\beta_{\bar{n}} = 0, \qquad \frac{v_{y\bar{n}}}{B} - b\alpha_{\bar{n}} + \sqrt{ab}\,\beta_{\bar{n}} = \frac{v_{y\bar{n}}}{B} - \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{u_{x\bar{n}}}{A}.
$$

Integrando le (30″) con le condizioni (30′), si ottiene:

$$
(34'') \quad \begin{cases}
\Pi = \left\{ \Pi_0 \cos(\sqrt{ab}\,R) - \sqrt{\dfrac{a}{b}}\, X_0 \sin(\sqrt{ab}\,R) + \right. \\[2ex]
\qquad\qquad \left. + I_c \left(\dfrac{\mu_1 + G_1}{r} \right) - \sqrt{\dfrac{a}{b}}\, I_s \left(\dfrac{\mu_2 + G_2}{r} \right) \right\} + \\[2ex]
\qquad\qquad + \left[\sqrt{ab}\, I_s \left(\left(\dfrac{u_{x\bar{n}}}{A\sqrt{ab}} - \dfrac{v_{y\bar{n}}}{bB} \right) \cos(\sqrt{ab}\,\varphi) \right) \right], \\[2ex]
X = \left\{ X_0 \cos(\sqrt{ab}\,R) + \sqrt{\dfrac{a}{b}}\, \Pi_0 \sin(\sqrt{ab}\,R) + \right. \\[2ex]
\qquad\qquad \left. + \sqrt{\dfrac{b}{a}}\, I_s \left(\dfrac{\mu_1 + G_1}{r} \right) + I_c \left(\dfrac{\mu_2 + G_2}{r} \right) \right\} - \\[2ex]
\qquad\qquad - \left[b\, I_c \left(\left(\dfrac{u_{x\bar{n}}}{A\sqrt{ab}} - \dfrac{v_{y\bar{n}}}{bB} \right) \cos(\sqrt{ab}\varphi) \right) \right],
\end{cases}
$$

i termini entro le parentesi graffe risultando tutti del tipo $0(1)$, la stessa conclusione non essendo in generale valida per i termini entro le parentesi quadre. Tuttavia, se vale la relazione:

$$r\left\{\frac{u_{x\bar{n}}}{A\sqrt{ab}}-\frac{v_{y\bar{n}}}{bB}\right\}\in Lr_0,$$

che è meno restrittiva della prima delle (32) delle (34″) e ricordando la (12′), si conclude che Π e X sono del tipo $0(1)$ e quindi $p=0(1/r_0)$ e $q=0(1/r_0)$ per $t\in[0,t_1]$. In modo analogo si procede se, per $n=\bar{n}$, $\sigma_n=\sqrt{ab}$ e la seconda delle (32) oppure le due (32) non sono valide.

Possiamo dunque enunciare il seguente:

COROLLARIO 2.3. *Ferme restando le ipotesi* a),b),c) *del* Teorema 2, *se esiste un* $\bar{n}$ *per cui* $\sigma_{\bar{n}}=\sqrt{ab}$ *ed i primi membri delle* (32) *moltiplicati per* r *sono funzioni di classe* Lr_0, *allora* $p=0(1/r_0)$ *e* $q=0(1/r_0)$ *e l'asse di rapida rotazione è dotato di tenacia.*

Concludiamo questo §, osservando che l'introduzione delle variabili Π e X, definite dalle (26), ha permesso di ricondurre la discussione sulla validità dell'effetto giroscopico allo studio dei semplici sistemi lineari (29) e (29′), di semplificare il formalismo necessario e di generalizzare i risultati ottenuti nei lavori citati nel § 1.

6. Il Teorema 2 del § 5 si presta ad essere generalizzato mediante le considerazioni seguenti.

Le funzioni μ_1 e μ_2, definite dalle (35), siano del tipo:

$$\mu_1=\mu_{11}+\mu_{12}\Pi+\mu_{13}X,\qquad \mu_2=\mu_{21}+\mu_{22}\Pi+\mu_{23}X, \tag{36}$$

ove $\mu_{11},\mu_{12},\mu_{13},\mu_{21},\mu_{22},\mu_{23}$ sono funzioni continue di $t,p,q,r,\vartheta,\psi,\varphi$ e appartengono ad Lr_0.

Supposto allora che siano valide le ipotesi a) e b) del Teorema 2 e che sia verificata la condizione a′) oppure la b′), possiamo sostituire le (36) nelle (34), ottenendo:

$$\begin{cases}\Pi=H+I_c\left(\dfrac{\mu_{12}}{r}\Pi+\dfrac{\mu_{13}}{r}X\right)-\sqrt{\dfrac{a}{b}}\,I_s\left(\dfrac{\mu_{22}}{r}\Pi+\dfrac{\mu_{23}}{r}X\right),\\[2ex] X=K+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\,I_s\left(\dfrac{\mu_{12}}{r}\Pi+\dfrac{\mu_{13}}{r}X\right)+I_c\left(\dfrac{\mu_{22}}{r}\Pi+\dfrac{\mu_{23}}{r}X\right),\end{cases} \tag{37}$$

ove si è posto:

$$
(38)\quad \begin{cases} H = \Pi_0 \cos(\sqrt{ab}\, R) - \sqrt{\dfrac{a}{b}}\, X_0 \sin(\sqrt{ab}\, R) + \\ \qquad\qquad + I_c \left(\dfrac{\mu_{11} + G_1}{r}\right) - \sqrt{\dfrac{a}{b}}\, I_s \left(\dfrac{\mu_{21} + G_2}{r}\right), \\ K = X_0 \cos(\sqrt{ab}\, R) + \sqrt{\dfrac{b}{a}}\, \Pi_0 \sin(\sqrt{ab}\, R) + \\ \qquad\qquad + \sqrt{\dfrac{b}{a}}\, I_s \left(\dfrac{\mu_{11} + G_1}{r}\right) + I_c \left(\dfrac{\mu_{21} + G_2}{r}\right), \end{cases}
$$

risultando $H = 0\,(1)$, $K = 0\,(1)$ per le ipotesi fatte su μ_{11}, μ_{21} e su Π_0 e X_0. Se poi, invece della a′) o della b′), è verificata la condizione c′) del Teorema 2, possiamo utilizzare le (34′), ottenendo:

$$
(37')\quad \Pi = H' + \int_0^R \left[\frac{\mu_{12}}{r}\Pi + \frac{\mu_{13}}{r}X\right] dR, \quad X = K' + \int_0^R \left[\frac{\mu_{22}}{r}\Pi + \frac{\mu_{23}}{r}X\right] dR,
$$

ove si è posto:

$$
(38')\quad H' = \Pi_0 + \int_0^R \frac{\mu_{11} + G_1}{r}\, dR, \qquad K' = X_0 + \int_0^R \frac{\mu_{21} + G_2}{r}\, dR,
$$

H' e K' risultando ancora del tipo $0\,(1)$.

Immaginiamo ora, seguendo e generalizzando quanto fatto da Rionero in [9], di aver risolto le (1) e le (2) con le condizioni (1′) e (2′), in modo che, nelle equazioni funzionali (37) o (37′), $\mu_{12}/r, \ldots, \mu_{23}/r$, H, K (o H' e K') possono considerarsi funzioni continue di t (o di R).

L'unica soluzione del sistema (37) può allora essere ottenuta con un metodo di approssimazioni successive, l'approssimazione di ordine

n essendo legata a quella di ordine $(n-1)$ dalle relazioni seguenti:

$$
(39)\quad \begin{cases}
\Pi_n = H + I_c\left(\dfrac{\mu_{13}}{r}\,\Pi_{n-1} + \dfrac{\mu_{13}}{r}\,X_{n-1}\right) - \\
\qquad\qquad - \sqrt{\dfrac{a}{b}}\, I_s\left(\dfrac{\mu_{22}}{r}\,\Pi_{n-1} + \dfrac{\mu_{23}}{r}\,X_{n-1}\right), \\
X_n = K + \sqrt{\dfrac{b}{a}}\, I_s\left(\dfrac{\mu_{12}}{r}\,\Pi_{n-1} + \dfrac{\mu_{13}}{r}\,X_{n-1}\right) + \\
\qquad\qquad + I_c\left(\dfrac{\mu_{22}}{r}\,\Pi_{n-1} + \dfrac{\mu_{23}}{r}\,X_{n-1}\right), \\
\Pi_1 = H, \quad X_1 = K.
\end{cases}
$$

Tenendo presente che μ_{12}, μ_{13}, μ_{22}, μ_{23} sono funzioni di classe Lr_0 e $H = 0\,(1)$, $K = 0\,(1)$, dalle (39) segue:

$$
(40)\quad \begin{cases}
|\,\Pi_n\,| \leq \Lambda + \lambda\left\{\displaystyle\int_0^t |\,\Pi_{n-1}|\,dt + \int_0^t |\,X_{n-1}\,|\,dt\right\}, \\
|\,X_n| \leq \Lambda + \lambda\left\{\displaystyle\int_0^t |\,\Pi_{n-1}|\,dt + \int_0^t |\,X_{n-1}\,|\,dt\right\}, \\
|\,\Pi_1\,| \leq \Lambda, \quad |\,X_1\,| \leq \Lambda,
\end{cases}
$$

ove Λ e λ sono costanti positive opportune, indipendenti da r_0.

Procedendo come in [9] e ragionando per induzione, dalle (40) segue facilmente che $\Pi = \lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n$ e $X = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ sono funzioni del tipo $0\,(1)$. In modo analogo si procede nel caso sferico.

Possiamo sintetizzare i risultati ottenuti, con il seguente:

TEOREMA 3. *Se valgono le ipotesi.*

a) $p_0 = 0\,(1/r_0)$, $q_0 = 0\,(1/r_0)$;

b) *le funzioni* $F_{is}^{(n)}$, $F_{ic}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, 3)$ *e le coordinate* x, y, z *di* Ω *sono funzioni di classe* Lr_0, *derivabili rispetto ai loro argomenti*;

c) *le funzioni* μ_1 *e* μ_2, *definite dalle* (35), *hanno la forma* (36), *ove* $\mu_{11}, \ldots, \mu_{23}$ *sono funzioni continue dei loro argomenti ed appartengono ad* Lr_0;

allora $p = 0\,(1/r_0)$, $q = 0\,(1/r_0)$ *per* $t \in [0, t_1]$ *e l'asse di rapida rotazione è dotato di tecnica, purchè una delle tre condizioni* a'), b') *o* c') del Teorema 2 *sia verificata.*

Dal Teorema 3 segue subito il seguente:

COROLLARIO 3.1. *Ferme restando le ipotesi* a) *e* b) del Teorema 3 *e valendo una delle tre condizioni* a'), b') *o* c') *del* Teorema 2, *se* $F_{ic}^{(n)}$, $F_{is}^{(n)}$, x, y, z *dipendono da* $t, p, q, r, \vartheta, \psi, \Phi$ *e le loro derivate parziali sono continue e di classe* Lr_0, *allora* μ_1 *e* μ_2 *sono del tipo richiesto dal* Teorema 3 *e quindi* $p = 0\,(1/r_0)$; $q = 0\,(1/r_0)$.

In tal caso infatti $u_{xn}, v_{xn}, u_{yn}, v_{yn}$ e quindi $\alpha_n, \bar{\alpha}_n, \beta_n, \bar{\beta}_n$ dipendono da $t, p, q, r, \vartheta, \psi, \Phi$, hanno derivate parziali continue e di classe Lr_0; si ha poi ad es.:

$$\frac{d\alpha_n}{dR} = \frac{1}{r}\frac{\partial \alpha_n}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_n}{\partial p}\frac{dp}{dR} + \frac{\partial \alpha_n}{\partial q}\frac{dq}{dR} + \frac{\partial \alpha_n}{\partial r}\frac{dr}{dR} + \\ + \frac{\partial \alpha_n}{\partial \vartheta}\frac{d\vartheta}{dR} + \frac{\partial \alpha_n}{\partial \psi}\frac{d\psi}{dR} + \frac{\partial \alpha_n}{\partial \Phi}\frac{d\Phi}{dR},$$

ove, per le (8), le (26) e ricordando che $P = pr$, $Q = qr$:

$$\frac{dp}{dR} = \frac{1}{r}(-aQ + M_x/A) = -\frac{a}{r}X + \\ + \frac{1}{r}\left\{ M_x/A + a\sum_{n=1}^{\infty}[\beta_n \sin(\sigma_n \varphi) + \bar{\beta}_n \cos(\sigma_n \varphi)] \right\},$$

$$\frac{dq}{dR} = \frac{1}{r}(bP + M_y/B) = \frac{b}{r}\Pi + \\ + \frac{1}{r}\left\{ M_y/B - b\sum_{n=1}^{\infty}[\alpha_n \cos(\sigma_n \varphi) + \bar{\alpha}_n \sin(\sigma_n \varphi)] \right\}.$$

Dunque, per l'ultima delle (4), per le (5) e ricordando che $\Phi = \varphi/r$, si conclude che $(rd\,\alpha_n/dR)$ è uguale alla somma di una funzione di

classe Lr_0, di una funzione di classe Lr_0 moltiplicata per Π e di un'altra funzione di classe Lr_0 moltiplicata per X. Risultati analoghi valgono naturalmente per $(rd\,\overline{\alpha}_n/dR)$, $(r\,d\beta_n/dR)$, $(r\,d\,\overline{\beta}_n/dR)$.

Dunque μ_1 e μ_2, definite dalle (35), hanno la forma (36), richiesta dal Teorema 3.

Notiamo poi che i risultati, ottenuti da RIONERO in [9], seguono dal Corollario precedente se, ferme restando tutte le altre ipotesi, $F_{is}^{(n)}$, $F_{ic}^{(n)}$, x, y, z non dipendono da Φ, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$, $u_{xn} = v_{xn} = u_{yn} = v_{yn} = 0$ per $n \geq 3$, ed avvertiamo che i casi esclusi del Teorema 3 possono essere trattati in modo analogo a quanto già fatto nel § precedente.

Concludiamo, mettendo in rilievo che, in questo e nei nn. precedenti, si è sempre evitato di ammettere, implicitamente od esplicitamente che r_0 potesse tendere all'infinito. Se infatti la condizione iniziale per $r(t)$ può diventare arbitrariamente grande in valore assoluto, il problema dell'esistenza e dell'unicità del sistema (1), (2), in forma normale, va studiato nel rettangolo $\mathcal{R}(\infty)$, definito dalle prime e dalle ultime tre diseguaglianze (6) e dalla seguente: $|r| \geq a_3$. Questo porta a notevoli difficoltà a causa del fatto che i secondi membri delle prime due (1) e della terza delle (2) non risultano limitati in $\mathcal{R}(\infty)$. Ovvero, eseguito il cambiamento di variabile $\varrho = 1/r$, i secondi membri delle prime due (1) e della terza delle (2) risultano singolari per $\varrho = 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. SIGNORINI: *Complementi alla dinamica dei giroscopi e equazioni del problema completo della balistica esterna,* Atti dell'Accademia Nazianale dei Lincei, Serie VIII, vol. I, Memorie.

[2] F. STOPPELLI: *Sul principio dell'effetto giroscopico,* Giornale di Matematiche di Battaglini, Serie IV, Vol. LXXX (1950-51), pagg. 14-38.

[3] F. STOPPELLI: *Sui fenomeni giroscopici in un solido qualsiasi,* Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, Vol. XXI (1952) pagg. 25-43.

[4] D. QUILGHINI: *Sul principio dell'effetto giroscopico,* Ricerche di Matematica, Vol. VII (1958), pagg. 205-31.

[5] S. RIONERO: *Sul principio dell'effetto giroscopico,* Ricerche di Matematica, Vol. VII (1958), pagg. 14-20.

[6] S. RIONERO: *Sul principio dell'effetto giroscopico del caso sferico,* Ricerche di Matematica, vol. VII (1958), pagg. 281-90.

[7] S. RIONERO: *Un ulteriore caso di non validità dell'effetto giroscopico,* Rendiconti dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società di Scienze Lettere ed Arti in Napoli, Serie VI, Vol. XXV (1958), pagg. 173-85.

[8] D. QUILGHINI: *Il principio dell'effetto giroscopico nel caso di un sistema materiale rigido piano a struttura non giroscopica,* Bollettino U.M.I. (3), Vol. XIV (1959), pagg. 532-36.

[9] S. RIONERO: *Sul principio dell'effetto giroscopico nel caso di forze dipendenti dall'atto di moto,* Ricerche di Matematica, Vol. VIII (1959), pagg. 111-27.

[10] F. STOPPELLI: *Un fenomeno di risonanza nei solidi in rapida rotazione,* Ricerche di Matematica, Vol. IX (1960), pagg. 213-241.

[11] F. STOPPELLI: *Approssimazione dell'atto di moto e della posizione di un solido in rapida rotazione in assenza di risonanza,* Ricerche di Matematica, Vol. X (1951), pagg. 86-105.

Manoscritto pervenuto in redazione il 23 giugno 1967