RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCO NAPOLITANI

Sui p-gruppi modulari finiti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 296-303

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__296_0>

SUI p-GRUPPI MODULARI FINITI

FRANCO NAPOLITANI *)

Si dice che un gruppo G è un gruppo modulare se il reticolo $\mathcal{L}(G)$ dei sottogruppi di G è modulare. I gruppi modulari finiti sono stati determinati da K. Iwasawa in un lavoro pubblicato nel 1941 [2]. Egli ha dapprima ricondotto la determinazione dei gruppi modulari finiti a quella dei p-gruppi modulari provando che:

Un gruppo finito G è modulare se, e solo se, G è prodotto diretto di gruppi aventi ordini relativamente primi e ciascuno di questi gruppi è un P_0^*-gruppo [1]) *oppure un p-gruppo modulare.*

Dopodichè ha determinato con il seguente Teorema la struttura dei p-gruppi modulari:

TEOREMA: *Un p-gruppo modulare finito non-Hamiltoniano G è modulare se, e solo se,*

1) G ha un sottogruppo normale abeliano N con G/N ciclico,

2) esiste un elemento t in G, con $G = \langle t, N \rangle$, tale che $t a t^{-1} a^{1+p^s}$ per ogni $a \in N$, dove s è un numero naturale che non dipende da a e che è almeno 2 per $p = 2$.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matem. del C. N. R.

Indirizzo dell'A: Seminario matematico, Università Padova

[1]) Un P_0^*-gruppo è un gruppo G con la seguente struttura: $G = NQ$, con N p-gruppo abeliano elementare, Q q-gruppo ciclico ($p \neq q$) e gli automorfismi non identici di N indotti da elementi di Q hanno la forma $a \to a^r$ ($\forall\, a \in N$) con r indipendente da a soddisfacente alla $r^q \equiv 1$ (mod. p).

Da tempo era noto che nella dimostrazione di questo Teorema vi era una affermazione non corretta che poneva in dubbio la validità del risultato (cfr. nota [2])).

In questa nota si rettifica la parte lacunosa della dimostrazione data da K. Iwasawa, convalidando la caratterizzazione precedente.

Si avverte che si parlerà solamente di gruppi finiti.

Le notazioni saranno quelle usuali: in particolare, se G è un gruppo, con $\langle a, b, \ldots \rangle$ si indicherà il sottogruppo generato dalla parte $\{a, b, \ldots\}$ di G.

1. — Richiamiamo alcune proprietà dei p-gruppi modulari non Hamiltoniani ed alcuni risultati di cui faremo frequente uso nel seguito; per brevità omettiamo le dimostrazioni (per maggiori dettagli si rimanda al lavoro [2] o alla monografia [3]).

Sia G un p-gruppo modulare non-Hamiltoniano e sia p^μ l'ordine massimo dei suoi elementi: $\mu = \mu(G)$ è un invariante di G. Allora

1.1 — la totalità degli elementi di G che hanno ordine minore o uguale a p^α, con $1 \leq \alpha \leq \mu$, formano un sottogruppo caratteristico Ω_α di G ed $\Omega_\alpha/\Omega_{\alpha-1}$ è un p-gruppo abeliano elementare;

1.2 — se u e v sono elementi di G, sussiste l'identità: $(uv)^{p^{\mu-1}} = u^{p^{\mu-1}} v^{p^{\mu-1}}$, $\mu = \mu(G)$;

1.3 — ogni sottogruppo ed ogni quoziente di G è un p-gruppo modulare non-Hamiltoniano;

1.4 si consideri la catena di G

$$G = \Omega_\mu \supset \Omega_{\mu-1} \supset \ldots \supset \Omega_\alpha \supset \ldots \Omega_1 \supset 1$$

e sia $[\Omega_\alpha : \Omega_{\alpha-1}] = p^{\omega_\alpha}$ per $\alpha = 1, 2, \ldots, \mu$. Poichè $\Omega_\mu/\Omega_{\mu-1}$ è un p-gruppo abeliano elementare, si possono scegliere ω_μ elementi $a_1, a_2, \ldots, a_{\omega_\mu}$ di G in modo che essi, modulo $\Omega_{\mu-1}$, costituiscano una base per $\Omega_\mu/\Omega_{\mu-1}$.

Ora il sistema $a_1^p, a_2^p, \ldots, a_{\omega_\mu}^p$ può essere completato in guisa che $a_1^p, \ldots, a_{\omega_\mu}^p, a_{\omega_\mu+1}, \ldots, a_{\omega_{\mu-1}}$ (mod $\Omega_{\mu-2}$) sia una base di $\Omega_{\mu-1}/\Omega_{\mu-2}$, e così via. Poichè G è quasi-Hamiltoniano (cioè i sottogruppi di G sono a due a due permutabili), ogni elemento di G può essere scritto in un solo modo come prodotto di potenze di questi $a_1, \ldots$ presi nell'ordine. In altre parole gli elementi $a_1, \ldots$ formano una *base* di G.

LEMMA 1 (K. Iwasawa [2]). *Sia G un p-gruppo modulare non Hamiltoniano. Se il derivato G' di G ha ordine p, si ha*

$$G = G_1 \times G_2$$

con $G_1 = \langle a_1, a_2 \rangle$, $a_1^{p^m} = a_2^{p^n} = 1$, $a_2 a_1 a_2^{-1} = a_1^{1+p^{m-1}}$; *$G_2$ è abeliano e* $G_2^{p^{m-1}} = 1$.

LEMMA 2 (K. Iwasawa). *Siano G un p-gruppo, t ed a due elementi di G. Se* $tat^{-1} = a^{1+p^s} z^k$ *con z elemento del centro di ordine p ed $s < \mu - 1$ ($\mu = \mu(G)$) numero naturale che è almeno 2 per $p = 2$, si ha*

$$t^{p^{\mu-1-s}} a t^{-p^{\mu-1-s}} = a^{1+p^{\mu-1}}.$$

In particolare se $a^{p^{\mu-1}} = 1$, *a e $t^{p^{\mu-1-s}}$ sono permutabili.*

OSSERVAZIONE. Il Lemma 2 non figura esplicitamente nel lavoro [2], ma K. Iwasawa utilizza spesso questa proprietà dei p gruppi. Esso si dimostra facilmente osservando che $t^{p^{\mu-1-s}} a t^{-p^{\mu-1-s}} = a^{(1+p^s)p^{\mu-1-s}}$ e che, essendo $s < \mu - 1$ e $s \geq 2$ per $p = 2$, risulta $1 + p^{\mu-1} \equiv (1 + p^s)^{p^{\mu-1-s}} \pmod{p^\mu}$.

2. Dimostrazione del Teorema.

A) La condizione è necessaria.

Procediamo per induzione sull'ordine del gruppo G. Per la 1.2 l'applicazione $g \in G \to g^{p^{\mu-1}}$ ($\mu = \mu(G)$) è un endomorfismo di G; denotiamo con $\mho$ l'immagine di questo endomorfismo. È evidente che $\mho$ è un sottogruppo normale di G e quindi, per una proprietà dei p-gruppi, in $\mho$ vi è un sottogruppo $Z \lhd G$ di ordine p. G/Z è per la 1.3 un p-gruppo modulare non-Hamiltoniano ed ha ordine minore di G. Dunque, per l'ipotesi induttiva, G/Z contiene un sottogruppo normale abeliano N/Z con le proprietà di cui all'enunciato del Teorema. Segue che esiste un elemento $t \in G$ tale che $G = \langle N, t \rangle$ e $tat^{-1} = a^{1+p^s} z^k$ per ogni $a \in N$, ove s è un numero naturale maggiore o uguale a 2 se $p = 2$, z è un generatore di Z e $k = k_a$ è un numero naturale che dipende da a. Si possono presentare due eventualità:

(I) N è abeliano [2]).

$z \in \mathfrak{Z}$ è la $p^{\mu-1}$ esima potenza di un elemento c di G. Distinguiamo i casi seguenti:

α) si può scegliere c in modo che appartenga ad N.

c, avendo ordine p^{μ}, è un elemento di una *base* di G e pertanto $\langle c \rangle$ ha complemento T in $\mathcal{L}(G)$. Essendo $T/T \cap N \simeq TN/N \simeq G/N$ ciclico, si ha $T = \langle t_1, T \cap N \rangle$. Poichè $c \in N$, è anche $\langle t_1, N \rangle = G$; inoltre si può supporre $t \equiv t_1$ (mod. N). Segue, essendo N abeliano, che t e t_1 inducono su N mediante trasformazione lo stesso automorfismo e quindi, poichè $Z \cap T = 1$, si ha $tat^{-1} = a^{1+p^s}$ per ogni $a \in T \cap N$.

Se $tct^{-1} = c^{1+p^s}$, da $N = (T \cap N) \cup \langle c \rangle$ abeliano segue che t trasforma ogni elemento di N nella sua $1 + p^s$-esima potenza ed il Teorema è provato. Supponiamo ora $tct^{-1} = c^{1+p^s} z^k = c^{1+p^s+kp^{\mu-1}}$, $k \not\equiv 0$ (mod. p). Dovrà aversi $(T \cap N)^{p^{\mu-1}} = 1$; altrimenti, indicato con $\underline{a} \in T \cap N$ un elemento di ordine p^{μ} e considerato un complemento [3]) di $\langle c \rangle$ in $\mathcal{L}(G)$ contenente $c\underline{a}$, (applicando il precedente ragionamento) risulterebbe $t(c\underline{a})t^{-1} = (c\underline{a})^{1+p^s}$ e quindi $tct^{-1} = c^{1+p^s}$.

---

[2]) Sino a questo punto abbiamo seguito la dimostrazione originale. Adesso K. Iwasawa suddivide il caso (I) nei due sottocasi: α) $\langle t \rangle \cap Z = 1$, β) $\langle t \rangle \supset Z$; ed afferma che nel caso α) esiste una base $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ di N tale che $Z \subseteq \langle a_1 \rangle$ ed $N \cap \langle t \rangle \subseteq \langle a_2 \rangle$, mentre nel caso β) una base $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ di N tale che $\langle a_1 \rangle \supseteq \langle t \rangle \cap N$.

Ora la scelta di basi siffatte non sempre è possibile, come si prova con semplici esempi. Si consideri infatti il gruppo G con le seguenti relazioni generatrici: $G = \langle b, t \rangle \times \langle c \rangle$, con $c^{p^2} = 1$, $\langle b \rangle \cap \langle t \rangle = 1$, $b^{p^5} = t^{p^4} = 1$, $tbt^{-1} = b^{1+p^4}$.

G è un p-gruppo modulare non-Hamiltoniano e, ove si assuma $Z = \langle b^{p^4} \rangle$ ed $N = \langle b, c^p, t^p c \rangle$, si ha $\langle N, t \rangle = G$ e $tat^{-1} = a^{1+p^4}$ per ogni $a \in N$. Ora $\langle t \rangle \cap Z = 1$ (dunque si è nel caso α)), ma $N \cap \langle t \rangle = \langle t^{p^2} \rangle$ non è contenuto nel sottogruppo generato da alcun elemento di una base di N. In modo analogo si può dare un controesempio all'affermazione di K. Iwasawa nel caso β).

[3]) Poichè c ed $\underline{a}$ hanno entrambi ordine p^{μ}, da $\langle c \rangle \cap \langle \underline{a} \rangle = 1$ e dalla 1.2 segue $(c\underline{a})^{p^{\mu-1}} \neq 1$ e $\langle c\underline{a} \rangle \cap \langle c \rangle = 1$: $c\underline{a}$ e c (o una sua potenza) non possono quindi essere congrui modulo $\Omega_{\mu-1}$ e, per il procedimento indicato in 1.4 per costruire una *base* di G, esiste una *base* di G che li contiene entrambi.

Allora, se $s \geq \mu - 1$, G è abeliano o ha il derivato di ordine p: il Lemma 1 assicura la validità del Teorema. Se invece $s < \mu - 1$, posto ${}^*t = t^x$ con $x = 1 - kp^{\mu-1-s}$, dal Lemma 2 segue facilmente che ${}^*t\, c\, {}^*t^{-1} = c^{1+p^s}$ e che ${}^*t\, a\, {}^*t^{-1} = a^{1+p^s}$ per ogni $a \in T \cap N$, sicchè ${}^*t\, a\, {}^*t^{-1} = a^{1+p^s}$ per ogni $a \in N$.

β) non è possibile scegliere c in modo che appartenga ad N.

Dovrà aversi $\langle c, N \rangle = G$; in effetti, se così non fosse, considerato un opportuno generatore t_1 di $\langle t \rangle$, si avrebbe $c \equiv t_1^{p^h}$ (mod. N), $h \neq 0$, cioè $c = bt_1^h$ con $b \in N$. Allora $c\, t_1^{-p^h} = b$ e, per la 1.2, $b^{p^{\mu-1}} = (c\, t^{-p^h})^{p^{\mu-1}} = c^{p^{\mu-1}}\, t_1^{-p^h+\mu-1} = c^{p^{\mu-1}}$; sicchè $b \in N$ avrebbe ordine p^μ e $b^{p^{\mu-1}} = z$: assurdo.

Pertanto un conveniente generatore di $\langle c \rangle$ opererà su N come t: si potrà supporre c stesso. Anzi, in ciò che segue, si identificherà c con t: si supporrà cioè t di ordine p^μ e $t^{p^{\mu-1}} = z$, sicchè per ogni $a \in N$ si ha $t\, a\, t^{-1} = a^{1+p^s}\, t^{kp^{\mu-1}}$.

Sia $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ una base di N tale che $Z \subseteq \langle a_1 \rangle$ (una base siffatta esiste poichè in un p-gruppo abeliano un elemento di ordine p appartiene ad un fattore diretto ciclico [1]).

Per ciascuno degli a_i, $i = 1, 2, \dots, r$, si ha $t\, a_i\, t^{-1} = a_i^{1+p^s}$ oppure $t\, a_i\, t^{-1} = a_i^{1+p^s}\, t^{k_i p^{\mu-1}}$, $k_i \not\equiv 0 \pmod p$. Proviamo che è lecito assumere $t\, a_i\, t^{-1} = a_i^{1+p^s}$ per $i \geq 3$. Gli elementi $a_2, \dots, a_r$ si possono supporre ordinati in modo che

1) esista un ν tale che sia $t\, a_i\, t^{-1} = a_i^{1+p^s}$ se, e solo se, $i = \nu + 1, \dots, r$;

2) se $\nu > 1$, l'ordine di a_2 sia minore o uguale all'ordine di ogni a_i con $2 \leq i \leq \nu$.

Se $\nu \leq 2$ l'asserto è ovviamente vero; supposto $\nu \geq 2$, si osservi che per ogni i, $2 < i \leq \nu$, $\{a_2, a_2^q\, a_i\}$ è una base di $\langle a_2, a_i \rangle$.

Poichè $t\,(a_2^q\, a_i)\, t^{-1} = (a_2^q\, a_i)^{1+p^s}\, t^{(k_2 q + k_i)\, p^{\mu-1}}$ e l'equazione congruenziale $k_2\, x + k_i \equiv 0$ (mod p) ammette soluzione, è possibile determinare $q = q_i$ in modo che $t\, (a_2^{q_i}\, a_i)\, t^{-1} = (a_2^{q_i}\, a_i)^{1+p^s}$.

Allora $\{a_1, a_2, a_2^{q_3}\, a_3, \dots, a_2^{q_\nu}\, a_\nu, a_{\nu+1}, \dots, a_r\}$ è una base di N che soddisfa alle condizioni volute.

Ciò premesso, consideriamo dapprima la seguente eventualità:

β_1) $\quad t a_2 t^{-1} = a_2^{1+p^s} t^{k_2 p^{\mu-1}}$, $k_2 \not\equiv 0 \pmod p$, $a_2^{p^{\mu-1}} \neq 1$ ed $a_i^{p^{\mu-1}} = 1$ per $i \geq 3$

e proviamo che in questo caso o vale il Teorema oppure è possibile scegliere N in modo che sia anche $ta_2 t^{-1} = a_2^{1+p^s}$.

Esaminiamo separatamente il caso $s \geq \mu - 1$ ed il caso $s < \mu + 1$.

(i) $s \geq \mu - 1$.

Se $ta_1 t^{-1} = a_1^{1+p^s} t^{k_1 p^{\mu-1}}$, $k_1 \not\equiv 0 \pmod p$, si moltiplichi a_2 per $a_1^{\bar{q}}$, con $k_1 \bar{q} + k_2 \equiv 0 \pmod p$, e si sostituisca la base $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ di N con $\{a_1, a_1^{\bar{q}} a_2, a_3, \dots, a_r\}$. Se invece si ha $ta_1 t^{-1} = a_1^{1+p^s} = a_1$ (si tenga presente che $s \geq \mu - 1$ ed $a_1^{p^{\mu-1}} = 1$), il derivato di G è $\langle t^{p^{\mu-1}} \rangle$ oppure $\langle a_2^{p^{\mu-1}} t^{k_2 p^{\mu-1}} \rangle$ (secondo che sia $s > \mu - 1$ o $s = \mu - 1$) ed il Lemma 1 assicura la validità del Teorema.

(ii) $s < \mu - 1$.

Sostitituiamo N con ${}^*N = \langle a_1, {}^*a_2, a_3, \dots, a_r \rangle$ dove ${}^*a_2 = a_2^{\alpha} t^{p^{\mu-1-s}}$ ed α è tale che $t^{\alpha k_2 p^{\mu-1}} = t^{p^{\mu-1}}$, cioè $\alpha k_2 \equiv 1$ (mod. p). Si ha $t {}^*a_2 t^{-1} = a_2^{\alpha} a_2^{\alpha p^s} t^{p^{\mu-1-s}} (t^{p^{\mu-1-s}})^{p^s}$, da cui, poichè per Lemma 2 $a_2^{p^s}$ e $t^{p^{\mu-1-s}}$ sono permutabili, $t {}^*a_2 t^{-1} = a_2^{\alpha} t^{p^{\mu-1-s}} a_2^{\alpha p^s} (t^{p^{\mu-1-s}})^{p^s}$ cioè ${}^*a_2^{-1} t {}^*a_2 t^{-1} = a_2^{\alpha p^s} (t^{p^{\mu-1-s}})^{p^s}$.

Il sottogruppo H generato da a_2^{α} e $t^{p^{\mu-1-s}}$ ha derivato di ordine p o 1 e quindi è nilpotente di classe 2 al più. Segue

$$(a_2^{\alpha} t^{p^{\mu-1-s}})^{p^s} = (t^{p^{\mu-1-s}} \circ a_2^{\alpha})^{\frac{1}{2} p^s (p^s - 1)} a_2^{\alpha p^s} (t^{p^{\mu-1-s}})^{p^s},$$

ove

$$(t^{p^{\mu-1-s}} \circ a_2^{\alpha}) = t^{p^{\mu-1-s}} a_2^{\alpha} t^{-p^{\mu-1-s}} a_2^{-\alpha},$$

e, poichè $(t^{p^{\mu-1-s}} \circ a_2^{\alpha})$ ha ordine al più p essendo generatore del derivato ed $s \geq 2$ per $p = 2$, $(a_2^{\alpha} t^{p^{\mu-1-s}})^{p^s} = a_2^{\alpha p^s} (t^{p^{\mu-1-s}})^{p^s}$. Dunque ${}^*a_2^{-1} t {}^*a_2 t^{-1} = {}^*a_2^{p^s}$, cioè $t {}^*a_2 t^{-1} = {}^*a_2^{1+p^s}$.

È immediato che $^*N$ è normale in G e che $G/^*N$ è ciclico; $^*N$ è abeliano poichè, essendo $a_i^{p^{\mu-1}}$ per $i \neq 2$, ciascuno degli a_i, $i \neq 2$, è permutabile con $t^{p^{\mu-1-s}}$. Inoltre si osservi che, avendo a_2 ordine p^μ, $\langle {}^*a_2 \rangle$ ha intersezione identica con $\langle a_1, a_3, \dots, a_r \rangle$ e quindi $\{a_1, {}^*a_2, \dots, a_r\}$ è una base di $^*N$.

Tenendo conto di quanto si è finora stabilito è chiaro che si può supporre, senza ledere la generalità, che gli elementi della base di N verifichino una delle due condizioni che seguono:

β_2) esiste un a_i, $i \geq 2$, tale che $a_i^{p^{\mu-1}} \neq 1$ e $ta_it^{-1} = a_i^{1+p^s}$

β_3) tutti gli a_i hanno ordine minore di p^μ e $ta_it^{-1} = a_i^{1+p^s}$ per $i \geq 3$.

Condizione β_2)

Per l'ipotesi, esiste un a_i, $i \geq 2$, tale che $ta_it^{-1} = a_i^{1+p^s}$ ed $a_i^{p^{\mu-1}} \neq 1$. Ora $\langle t \rangle \supset Z$ e quindi $\langle t \rangle \cap \langle a_i \rangle = 1$. Segue, essendo $t^{p^{\mu-1}} \neq 1$ e $a_i^{p^{\mu-1}} \neq 1$, che $(ta_i)^{p^{\mu-1}} \neq 1$ e $\langle ta_i \rangle \cap \langle a_i \rangle = 1$. Pertanto esiste un complemento T di $\langle a_i \rangle$ in $\mathcal{L}(G)$ contenente ta_i; si ha $(N \cap T) \langle a_i \rangle = N$ e ta_i opera come t su $N \cap T$. Se ta_i non trasformasse ogni elemento di $N \cap T$ nella sua $1 + p^s$-esima potenza, ma per un certo $a \in N \cap T$ fosse $(ta_i)a(ta_i)^{-1} = tat^{-1} = a^{1+p^s}t^{kp^{\mu-1}}$ con $k \neq 0 \pmod p$, T conterrebbe $t^{p^{\mu-1}}$ e, poichè contiene $t^{p^{\mu-1}}a_i^{p^{\mu-1}}$, conterrebbe anche $a_i^{p^{\mu-1}}$: assurdo. Dunque $tat^{-1} = a^{1+p^s}$ per ogni $a \in N \cap T$ e, poichè $ta_it^{-1} = a_i^{1+p^s}$ ed $(N \cap T)\langle a_i \rangle = N$ è abeliano, si ha $tat^{-1} = a^{1+p^s}$ per ogni $a \in N$.

Condizione β_3)

Distinguiamo i casi:

(i) $s < \mu - 1$.

Se $ta_1t^{-1} = a_1^{1-p^s}t^{k_1p^{\mu-1}}$, $k_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$, e $ta_it^{-1} = a_i^{1+p^s}$ per $i \geq 2$, si sostituisca a_1 con $^*a_1 = a_1^\alpha t^{p^{\mu-1-s}}$ ove α è tale che $\alpha k_1 \equiv 1 \pmod{p}$. Applicando il Lemma 2 si prova che $^*a_1, a_2, \dots, a_r$ generano un sottogruppo normale abeliano $^*N$, con $G = \langle {}^*N, t \rangle$,

$$t\,{}^*a_1t^{-1} = {}^*a_1^{1+p^s} \text{ e } ta_it^{-1} = a_i^{1+p^s} \text{ per } i \geq 2.$$

Se $ta_2 t^{-1} = a_2^{1+p^s} t^{k_2 p^{\mu}\ 1}$, $k_2 \not\equiv 0 \pmod p$, si sostituisca a_2 con $^*a_2 = a_2^{\alpha} t^{p^{\mu-1-s}}$, α tale che $k_2 \alpha \equiv 1$ (mod. p), e: o il Teorema è provato oppure si è ricondotti al caso appena esaminato. Si osservi tuttavia che $a_1, {}^*a_2, \ldots, a_r$ non costituiscono più, in generale, una base del sottogruppo normale abeliano che essi generano, ma ciò nulla toglie alla validità del precedente ragionamento.

(ii) $s \geq \mu - 1$.

Se $s \geq \mu - 1$, G è un gruppo abeliano oppure ha il derivato coincidente con Z; il Teorema è conseguenza del Lemma 1.

(II) N non è abeliano.

K. Iwasawa ha dimostrato [2] che questo caso si riconduce al caso (I).

B) Rimandiamo al lavoro [2] per la verifica che le condizioni espresse dall'enunciato del Teorema sono anche sufficienti.

BIBLIOGRAFIA

[1] FUCHS L. - *Abelian groups* - Pergamon Press.

[2] IWASAWA K. - *Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen* - Journal of Univ. of Tokio 4-3 (1941) 171-199.

[3] SUZUKI M. - *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups* - Springer Verlag 1956.

Manoscritto pervenuto in redazione il 24 maggio 1967.