

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ADALBERTO ORSATTI

Una caratterizzazione dei gruppi abeliani compatti o localmente compatti nella topologia naturale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 39 (1967), p. 219-225

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__219_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UNA CARATTERIZZAZIONE
DEI GRUPPI ABELIANI COMPATTI
O LOCALMENTE COMPATTI
NELLA TOPOLOGIA NATURALE

ADALBERTO ORSATTI *)

INTRODUZIONE. Lo scopo di questa nota è di determinare la struttura di un gruppo abeliano G supposto compatto o localmente compatto nella topologia naturale; cioè nella topologia, compatibile con la struttura di gruppo, ottenuta prendendo i sottogruppi nG ($n = 1, 2, \dots$) come base di interni dello zero in G , [1], [3].

Seguendo le definizioni di [4], diremo che G è compatto se ogni ricoprimento aperto di G possiede un sottoricoprimento finito, localmente compatto se lo zero (e quindi ogni elemento di G) ha un intorno compatto in G .

Non si postula che G , in quanto spazio topologico, sia di Hausdorff, ma si prova che ci si può ricondurre a questo caso senza introdurre restrizioni essenziali. Si dimostra infatti che se G è localmente compatto (in particolare compatto) nella topologia naturale, l'intersezione G_∞ degli nG è divisibile e coincide pertanto con il sottogruppo divisibile massimale di G ; d'altra parte si verifica che, per quanto riguarda il nostro problema, è lecito supporre G ridotto.

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

Si ottiene la seguente proposizione: G è ridotto e compatto se e solo se è il prodotto diretto (= somma diretta completa) di una famiglia di gruppi G_p^* , uno per ogni numero primo p , ed ogni G_p^* è un modulo finitamente generato sopra l'anello degli interi p -adici.

La caratterizzazione dei gruppi localmente compatti (cfr. teorema 2) segue dal risultato precedente e dal fatto che G è localmente compatto se e solo se esiste un intero positivo n tale che il gruppo nG sia compatto nella propria topologia naturale.

1. Con la parola gruppo intendiamo gruppo abeliano; la notazione è quella additiva. Seguiremo la terminologia di [2] e [4] rispettivamente per le questioni di carattere algebrico e topologico.

Sia G un gruppo. Denoteremo con $T(G)$ il sottogruppo di torsione di G e con $T_p(G)$ la componente p -primaria di $T(G)$ relativa al primo p . Siano P l'insieme dei numeri primi ed N quello degli interi positivi. Poniamo:

$$p^\infty G = \bigcap_n p^n G, \quad G_\infty = \bigcap_n nG \quad (n \in N).$$

Risulta:

$$G_\infty = \bigcap_p p^\infty G, \quad p \in P.$$

Il gruppo G , dotato della topologia naturale, risulta di Hausdorff se e solo se $G_\infty = 0$.

Indicheremo con \widehat{G} il completamento naturale di G , cioè il completamento del gruppo G/G_∞ rispetto alla struttura uniforme di Hausdorff indotta dalla topologia naturale. G è completo se e solo se $G \cong \widehat{G}$; un gruppo completo è di Hausdorff. Ricordiamo che ogni omomorfismo di gruppi è una applicazione uniformemente continua rispetto alla topologia naturale.

Nel seguito dicendo che un gruppo è completo o compatto o di Hausdorff ecc., senza specificare in quale topologia, intenderemo riferirci alla topologia naturale del gruppo considerato.

Se $\{G_\alpha\}$ è una famiglia indicata di gruppi, indicheremo con $\prod_a G_\alpha$ il prodotto diretto (= somma diretta completa) dei G_α .

2. Dimostriamo alcuni lemmi che ci saranno utili in seguito.

LEMMA 1. *Sia G un gruppo munito della topologia naturale e sia n un intero positivo. La topologia naturale di nG coincide con la topologia relativa della quale nG è dotato in quanto sottogruppo di G .*

DIM. Si ha, per ogni $m \in N$,

$$(mG) \cap (nG) \supseteq m(nG); \quad m(nG) = (mnG) \cap (nG).$$

LEMMA 2. *Un gruppo G è localmente compatto se e solo se esiste un intero positivo n tale che il gruppo nG sia compatto nella propria topologia naturale.*

Di conseguenza un gruppo libero da torsione è localmente compatto se e solo se è compatto.

DIM. Se G è localmente compatto, sia V un intorno dello zero compatto in G . Esiste un $n \in N$ tale che $nG \subseteq V$. Poichè nG è chiuso in G , esso è chiuso in V ed è quindi un sottospazio compatto di G ; per il lemma precedente nG è compatto nella propria topologia naturale. Viceversa, se per un certo $n \in N$ nG è compatto nella topologia naturale, lo zero di G ha un intorno compatto in G ; allora G è localmente compatto.

Ricordiamo che un gruppo G dicesi *limitato* se esiste un $n \in N$ tale che $ng = 0$ per ogni $g \in G$.

LEMMA 3. *Sia G un gruppo. Se, per ogni primo p , $T_p(G)$ è somma diretta di un gruppo divisibile e di uno limitato, G_∞ è divisibile.*

DIM. Possiamo supporre $T(G)$ ridotto, dal momento che il suo sottogruppo divisibile massimale è un addendo diretto di G ed è contenuto in G_∞ .

Sia p un primo arbitrario. $T_p(G)$ è un addendo diretto di G poichè è puro in G ed è limitato ([2], Teorema 24.5.). Esiste pertanto un sottogruppo H di G tale da aversi $G = T_p(G) \oplus H$; evidentemente $H \supseteq G_\infty$. Sia $g \in G_\infty$: esiste un elemento $x \in H$ tale che $px = g$ ed è chiaro che x ha q -altezza infinita in G per ogni primo $q \neq p$. Sia $n \in N$: esiste un elemento $y \in H$ tale che $p^{n+1}y = g = px$, da cui $p(p^n y - x) = 0$. Poichè H non contiene elementi di periodo p , si ha $p^n y = x$. Allora anche la p -altezza di x è infinita, per cui

$x \in G_\infty$. Risulta pertanto $pG_\infty = G_\infty$. Per l'arbitrarietà del primo p , G_∞ è divisibile.

LEMMA 4. *Sia G un gruppo localmente compatto nella topologia naturale e sia p un primo arbitrario. Allora $T_p(G)$ è somma diretta di un gruppo divisibile e di uno limitato il quale risulta finito se G è compatto; inoltre G_∞ è divisibile.*

DIM. Supponiamo G compatto. G/pG è finito: infatti le classi modulo pG formano una partizione ed un ricoprimento aperto di G . Poniamo $T = T_p(G)$. T/pT è finito poichè, essendo T puro in G , T/pT è isomorfo ad un sottogruppo di G/pG . Sia B un sottogruppo basilico di T . Poichè B è puro in T , B/pB è finito; d'altra parte B è una somma diretta di p -gruppi ciclici; quindi B è finito. Allora B è un addendo diretto di T ed un complementare di B in T , in quanto isomorfo a T/B , è divisibile.

Supponiamo G localmente compatto. Esiste, per il lemma 2, un intero positivo n tale che nG sia compatto nella topologia naturale. Dalla struttura di $T_p(nG) = nT_p(G)$ segue che $T_p(G)$ è somma diretta di un gruppo divisibile e di uno limitato.

Infine, per il lemma 3, G_∞ è divisibile.

Una verifica immediata porge il seguente

LEMMA 5. *Se il gruppo G è la somma diretta di una famiglia finita di gruppi, la topologia naturale di G coincide con la topologia prodotto delle topologie naturali degli addendi.*

OSSERVAZIONE. Sia G un gruppo localmente compatto. Si ha $G = G_\infty \oplus R$ dove G_∞ è divisibile ed R è un gruppo ridotto. Per il lemma precedente ed il teorema di Tychonoff ([4], Teorema 5.13), G è compatto se e solo se R è compatto poichè su G_∞ la topologia naturale è quella banale. Segue dal lemma 2 che G è localmente compatto se e solo se R è localmente compatto. Possiamo pertanto limitarci a considerare gruppi ridotti.

LEMMA 6. *Un gruppo G ridotto e localmente compatto nella topologia naturale è completo.*

DIM. Per il lemma 4 $G_\infty = 0$, cioè G è di Hausdorff. Possiamo pertanto identificare G con un sottogruppo puro e denso di \widehat{G} , [1]. Sia n un intero positivo tale che nG risulti compatto; nG è completo nella topologia naturale ([4], Teorema 5.32). Poichè G è puro in \widehat{G} e per il lemma 1, nG è un sottospazio completo dello spazio uniforme di Hausdorff \widehat{G} , quindi ([4], Teorema 6.22) nG è chiuso in \widehat{G} . Allora $nG = n\widehat{G}$: infatti ([1], pag. 692) $n\widehat{G}$ è la chiusura di nG in \widehat{G} . Abbiamo dunque le inclusioni $n\widehat{G} \subseteq G \subseteq \widehat{G}$. Da queste conseguenze $G = \widehat{G}$ poichè \widehat{G}/G è divisibile e $\widehat{G}/n\widehat{G}$ è limitato.

3. Per ogni $p \in P$, indichiamo con \widehat{Z}_p l'anello degli interi p -adici. Sia G un gruppo ridotto e localmente compatto. Per il lemma 6, G è completo: si ha pertanto $G \cong \prod_p G_p^*$, $p \in P$, dove $G_p^* = G/p^\infty G$ e,

per ogni $p \in P$, G_p^* è uno \widehat{Z}_p -modulo completo nella topologia naturale che su G_p^* coincide con la topologia p -adica. (Questo risultato si ottiene ricordando che ogni gruppo completo è ridotto ed algebricamente compatto, [3], e tenendo presenti le osservazioni di pag. 86 di [2]; oppure applicando il lemma di immersione e la P.5 di [5]). Inoltre G , con la topologia naturale, risulta il prodotto topologico dei G_p^* ciascuno munito della propria topologia p -adica.

Poichè G è localmente compatto, ogni G_p^* è localmente compatto e tutti i G_p^* , eccettuato un numero finito di essi, sono compatti ([4], Teorema 5.19). In particolare G è compatto se e solo se tutti i G_p^* sono compatti.

Dobbiamo quindi determinare la struttura di uno \widehat{Z}_p -modulo compatto o localmente compatto nella topologia p -adica.

P.1. Uno \widehat{Z}_p -modulo M è ridotto e compatto nella topologia p -adica se e solo se è uno \widehat{Z}_p -modulo finitamente generato.

DIM. Se è finitamente generato, M è isomorfo alla somma diretta di un p -gruppo finito e di un numero finito di gruppi ciascuno isomorfo al gruppo additivo degli interi p -adici. Questi sono compatti, quindi M è compatto per il lemma 6 ed il teorema di Tychonoff; M è chiaramente ridotto.

Viceversa, sia M ridotto e compatto. $T(M) = T_p(M)$ è finito per il lemma 4; pertanto $M = T(M) \oplus F$, dove F è uno \widehat{Z}_p -modulo ridotto, libero da torsione e compatto F/pF è finito ed F è completo; allora F è uno \widehat{Z}_p -modulo libero di rango uguale alla dimensione di F/pF in quanto spazio vettoriale sul corpo con p elementi (cfr., ad es., [5] P.7). Quindi M è uno \widehat{Z}_p -modulo finitamente generato.

È ora immediato il seguente

TEOREMA 1. *Un gruppo G è ridotto e compatto nella topologia naturale se e solo se:*

$$1) \quad G \cong \prod_p G_p^*, \quad p \in P.$$

2) *Per ogni $p \in P$, G_p^* è uno \widehat{Z}_p -modulo finitamente generato.*

Dai lemmi 2 e 4 e dalla P.1 si ottiene la

P.2. *Uno \widehat{Z}_p modulo M è ridotto e localmente compatto nella topologia p -adica se e solo se $M = T \oplus F$, dove T è un p -gruppo limitato ed F è uno \widehat{Z}_p -modulo libero finitamente generato.*

Siamo ora in grado di descrivere la struttura dei gruppi localmente compatti.

TEOREMA 2. *Un gruppo G è ridotto e localmente compatto nella topologia naturale se e solo se:*

$$1) \quad G \cong \prod_p G_p^*, \quad p \in P.$$

2) *Per ogni $p \in P$, $G_p^* = T_p \oplus F_p$ dove T_p è un p -gruppo limitato ed F_p è uno \widehat{Z}_p -modulo libero finitamente generato.*

3) *Tutti i T_p sono finiti, eccettuato un numero finito di essi.*

DIM. Se G è ridotto e localmente compatto le condizioni enunciate sono soddisfatte per il lemma 6, il teorema 5.19 di [4], la P.1 e la P.2. Viceversa, se valgono queste condizioni, G è ovviamente ridotto ed è localmente compatto per il lemma 2 ed il teorema 1.

Concludiamo con un'altra caratterizzazione dei gruppi ridotti e compatti nella topologia naturale.

Ogni gruppo G è un gruppo topologico nella topologia avente come base di intorno dello zero i sottogruppi di indice finito. Questa topologia è contenuta in quella naturale e le due topologie coincidono se e solo se G/nG è finito per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Ciò premesso, per mezzo del teorema 1 e con ragionamenti già usati nella dimostrazione del lemma 4 e della P.1, si verifica facilmente la seguente

P.3. *Un gruppo G è ridotto e localmente compatto nella topologia naturale se e solo se G è completo e la topologia naturale coincide con la topologia dei sottogruppi di indice finito.*

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. L. S. CORNER, *Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring*, Proc. London Math. Soc. (3) 13 (1963) 687-710.
- [2] L. FUCHS, *Abelian groups*, Budapest 1958.
- [3] D. K. HARRISON, *Infinite abelian groups and homological methods*, Annals of Math. 69 (1959) 366-91.
- [4] J. KELLEY, *General topology*, (1955).
- [5] A. ORSATTI, *Un lemma di immersione per i gruppi abeliani senza elementi di altezza infinita*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova XXXVIII (1967) 1-13.

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 luglio 1967.