ADALBERTO ORSATTI

Una caratterizzazione dei gruppi abeliani compatti o localmente compatti nella topologia naturale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 219-225

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__219_0>

UNA CARATTERIZZAZIONE DEI GRUPPI ABELIANI COMPATTI O LOCALMENTE COMPATTI NELLA TOPOLOGIA NATURALE

ADALBERTO ORSATTI *)

INTRODUZIONE. Lo scopo di questa nota è di determinare la struttura di un gruppo abeliano G supposto compatto o localmente compatto nella topologia naturale; cioè nella topologia, compatibile con la struttura di gruppo, ottenuta prendendo i sottogruppi nG $(n = 1, 2, ...)$ come base di intorni dello zero in G, [1], [3].

Seguendo le definizioni di [4], diremo che G è compatto se ogni ricoprimento aperto di G possiede un sottoricoprimento finito, localmente compatto se lo zero (e quindi ogni elemento di G) ha un intorno compatto in G.

Non si postula che G, in quanto spazio topologico, sia di Hausdorff, ma si prova che ci si può ricondurre a questo caso senza introdurre restrizioni essenziali. Si dimostra infatti che se G è localmente compatto (in particolare compatto) nella topologia naturale, l'intersezione G_∞ degli nG è divisibile e coincide pertanto con il sottogruppo divisibile massimale di G; d'altra parte si verifica che, per quanto riguarda il nostro problema, è lecito supporre G ridotto.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

Si ottiene la seguente proposizione: G è ridotto e compatto se e solo se è il prodotto diretto (= somma diretta completa) di una famiglia di gruppi G_p^*, uno per ogni numero primo p, ed ogni G_p^* è un modulo finitamente generato sopra l'anello degli interi p-adici.

La caratterizzazione dei gruppi localmente compatti (cfr. teorema 2) segue dal risultato precedente e dal fatto che G è localmente compatto se e solo se esiste un intero positivo n tale che il gruppo nG sia compatto nella propria topologia naturale.

1. Con la parola gruppo intendiamo gruppo abeliano; la notazione è quella additiva. Seguiremo la terminologia di [2] e [4] rispettivamente per le questioni di carattere algebrico e topologico.

Sia G un gruppo. Denoteremo con $T(G)$ il sottogruppo di torsione di G e con $T_p(G)$ la componente p-primaria di $T(G)$ relativa al primo p. Siano P l'insieme dei numeri primi ed N quello degli interi positivi. Poniamo:

$$p^\infty G = \bigcap_n p^n G, \quad G_\infty = \bigcap_n nG \qquad (n \in N).$$

Risulta:

$$G_\infty = \bigcap_p p^\infty G, \quad p \in P.$$

Il gruppo G, dotato della topologia naturale, risulta di Hausdorff se e solo se $G_\infty = 0$.

Indicheremo con $\widehat{G}$ il completamento naturale di G, cioè il completamento del gruppo G/G_∞ rispetto alla struttura uniforme di Hausdorff indotta dalla topologia naturale. G è completo se e solo se $G \cong \widehat{G}$; un gruppo completo è di Hausdorff. Ricordiamo che ogni omomorfismo di gruppi è una applicazione uniformemente continua rispetto alla topologia naturale.

Nel seguito dicendo che un gruppo è completo o compatto o di Hausdorff ecc., senza specificare in quale topologia, intenderemo riferirci alla topologia naturale del gruppo considerato.

Se $\{G_\alpha\}$ è una famiglia indiciata di gruppi, indicheremo con $\prod_\alpha G_\alpha$ il prodotto diretto (= somma diretta completa) dei G_α.

2. Dimostriamo alcuni lemmi che ci saranno utili in seguito.

LEMMA 1. *Sia G un gruppo munito della topologia naturale e sia n un intero positivo. La topologia naturale di nG coincide con la topologia relativa della quale nG è dotato in quanto sottogruppo di G.*

DIM. Si ha, per ogni $m \in N$,

$$(mG) \cap (nG) \supseteq m(nG) \,; \;\; m(nG) = (mnG) \cap (nG).$$

LEMMA 2. *Un gruppo G è localmente compatto se e solo se esiste un intero positivo n tale che il gruppo nG sia compatto nella propria topologia naturale.*

Di conseguenza un gruppo libero da torsione è localmente compatto se e solo se è compatto.

DIM. Se G è localmente compatto, sia V un intorno dello zero compatto in G. Esiste un $n \in N$ tale che $nG \subseteq V$. Poichè nG è chiuso in G, esso è chiuso in V ed è quindi un sottospazio compatto di G; per il lemma precedente nG è compatto nella propria topologia naturale. Viceversa, se per un certo $n \in N$ nG è compatto nella topologia naturale, lo zero di G ha un intorno compatto in G; allora G è localmente compatto.

Ricordiamo che un gruppo G dicesi *limitato* se esiste un $n \in N$ tale che $ng = 0$ per ogni $g \in G$.

LEMMA 3. *Sia G un gruppo. Se, per ogni primo p, $T_p(G)$ è somma diretta di un gruppo divisibile e di uno limitato, G_∞ è divisibile.*

DIM. Possiamo supporre $T(G)$ ridotto, dal momento che il suo sottogruppo divisibile massimale è un addendo diretto di G ed è contenuto in G_∞.

Sia p un primo arbitrario. $T_p(G)$ è un addendo diretto di G poichè è puro in G ed è limitato ([2], Teorema 24.5.). Esiste pertanto un sottogruppo H di G tale da aversi $G = T_p(G) \oplus H$; evidentemente $H \supseteq G_\infty$. Sia $g \in G_\infty$: esiste un elemento $x \in H$ tale che $px = g$ ed è chiaro che x ha q-altezza infinita in G per ogni primo $q \neq p$. Sia $n \in N$: esiste un elemento $y \in H$ tale che $p^{n+1} y = g = px$, da cui $p(p^n y - x) = 0$. Poichè H non contiene elementi di periodo p, si ha $p^n y = x$. Allora anche la p-altezza di x è infinita, per cui

$x \in G_\infty$. Risulta pertanto $pG_\infty = G_\infty$. Per l'arbitrarietà del primo p, G_∞ è divisibile.

LEMMA 4. *Sia G un gruppo localmente compatto nella topologia naturale e sia p un primo arbitrario. Allora $T_p(G)$ è somma diretta di un gruppo divisibile e di uno limitato il quale risulta finito se G è compatto; inoltre G_∞ è divisibile.*

DIM. Supponiamo G compatto. G/pG è finito: infatti le classi modulo pG formano una partizione ed un ricoprimento aperto di G. Poniamo $T = T_p(G)$. T/pT è finito poichè, essendo T puro in G, T/pT è isomorfo ad un sottogruppo di G/pG. Sia B un sottogruppo basico di T. Poichè B è puro in T, B/pB è finito; d'altra parte B è una somma diretta di p-gruppi ciclici; quindi B è finito. Allora B è un addendo diretto di T ed un complementare di B in T, in quanto isomorfo a T/B, è divisibile.

Supponiamo G localmente compatto. Esiste, per il lemma 2, un intero positivo n tale che nG sia compatto nella topologia naturale. Dalla struttura di $T_p(nG) = nT_p(G)$ segue che $T_p(G)$ è somma diretta di un gruppo divisibile e di uno limitato.

Infine, per il lemma 3, G_∞ è divisibile.

Una verifica immediata porge il seguente

LEMMA 5. *Se il gruppo G è la somma diretta di una famiglia finita di gruppi, la topologia naturale di G coincide con la topologia prodotto delle topologie naturali degli addendi.*

OSSERVAZIONE. Sia G un gruppo localmente compatto. Si ha $G = G_\infty \oplus R$ dove G_∞ è divisibile ed R è un gruppo ridotto. Per il lemma precedente ed il teorema di Tychonoff ([4], Teorema 5.13), G è compatto se e solo se R è compatto poichè su G_∞ la topologia naturale è quella banale. Segue dal lemma 2 che G è localmente compatto se e solo se R è localmente compatto. Possiamo pertanto limitarci a considerare gruppi ridotti.

LEMMA 6. *Un gruppo G ridotto e localmente compatto nella topologia naturale è completo.*

DIM. Per il lemma 4 $G_\infty = 0$, cioè G è di Hausdorff. Possiamo pertanto identificare G con un sottogruppo puro e denso di $\widehat{G}$, [1]. Sia n un intero positivo tale che nG risulti compatto; nG è completo nella topologia naturale ([4], Teorema 5.32). Poichè G è puro in $\widehat{G}$ e per il lemma 1, nG è un sottospazio completo dello spazio uniforme di Hausdorff $\widehat{G}$, quindi ([4], Teorema 6.22) nG è chiuso in $\widehat{G}$. Allora $nG = n\widehat{G}$: infatti ([1], pag. 692) $n\widehat{G}$ è la chiusura di nG in $\widehat{G}$. Abbiamo dunque le inclusioni $n\widehat{G} \subseteq G \subseteq \widehat{G}$. Da queste consegue $G = \widehat{G}$ poichè $\widehat{G}/G$ è divisibile e $\widehat{G}/n\widehat{G}$ è limitato.

3. Per ogni $p \in P$, indichiamo con $\widehat{Z}_p$ l'anello degli interi p-adici. Sia G un gruppo ridotto e localmente compatto. Per il lemma 6, G è completo: si ha pertanto $G \cong \prod_p G_p^*$, $p \in P$, dove $G_p^* = G/p^\infty G$ e, per ogni $p \in P$, G_p^* è uno $\widehat{Z}_p$-modulo completo nella topologia naturale che su G_p^* coincide con la topologia p-adica. (Questo risultato si ottiene ricordando che ogni gruppo completo è ridotto ed algebricamente compatto, [3], e tenendo presenti le osservazioni di pag. 86 di [2]; oppure applicando il lemma di immersione e la P.5 di [5]). Inoltre G, con la topologia naturale, risulta il prodotto topologico dei G_p^* ciascuno munito della propria topologia p-adica.

Poichè G è localmente compatto, ogni G_p^* è localmente compatto e tutti i G_p^*, eccettuato un numero finito di essi, sono compatti ([4], Teorema 5.19). In particolare G è compatto se e solo se tutti i G_p^* sono compatti.

Dobbiamo quindi determinare la struttura di uno $\widehat{Z}_p$-modulo compatto o localmente compatto nella topologia p-adica.

P.1. *Uno $\widehat{Z}_p$-modulo M è ridotto e compatto nella topologia p-adica se e solo se è uno $\widehat{Z}_p$-modulo finitamente generato.*

DIM. Se è finitamente generato, M è isomorfo alla somma diretta di un p-gruppo finito e di un numero finito di gruppi ciascuno isomorfo al gruppo additivo degli interi p-adici. Questi sono compatti, quindi M è compatto per il lemma 6 ed il teorema di Tychonoff; M è chiaramente ridotto.

Viceversa, sia M ridotto e compatto. $T(M) = T_p(M)$ è finito per il lemma 4; pertanto $M = T(M) \oplus F$, dove F è uno $\widehat{Z}_p$-modulo ridotto, libero da torsione e compatto F/pF è finito ed F è completo; allora F è uno $\widehat{Z}_p$-modulo libero di rango uguale alla dimensione di F/pF in quanto spazio vettoriale sul corpo con p elementi (cfr., ad es., [5] P.7). Quindi M è uno $\widehat{Z}_p$-modulo finitamente generato.

È ora immediato il seguente

TEOREMA 1. *Un gruppo G è ridotto e compatto nella topologia naturale se e solo se:*

1) $$G \cong \prod_p G_p^*, \quad p \in P.$$

2) *Per ogni $p \in P$, G_p^* è uno $\widehat{Z}_p$-modulo finitamente generato.*

Dai lemmi 2 e 4 e dalla P.1 si ottiene la

P.2. *Uno $\widehat{Z}_p$ modulo M è ridotto e localmente compatto nella topologia p-adica se e solo se $M = T \oplus F$, dove T è un p-gruppo limitato ed F è uno $\widehat{Z}_p$-modulo libero finitamente generato.*

Siamo ora in grado di descrivere la struttura dei gruppi localmente compatti.

TEOREMA 2. *Un gruppo G è ridotto e localmente compatto nella topologia naturale se e solo se:*

1) $$G \cong \prod_p G_p^*, \quad p \in P.$$

2) *Per ogni $p \in P$, $G_p^* = T_p \oplus F_p$ dove T_p è un p-gruppo limitato ed F_p è uno $\widehat{Z}_p$-modulo libero finitamente generato.*

3) *Tutti i T_p sono finiti, eccettuato un numero finito di essi.*

DIM. Se G è ridotto e localmente compatto le condizioni enunciate sono soddisfatte per il lemma 6, il teorema 5.19 di [4], la P.1 e la P.2. Viceversa, se valgono queste condizioni, G è ovviamente ridotto ed è localmente compatto per il lemma 2 ed il teorema 1.

Concludiamo con un'altra caratterizzazione dei gruppi ridotti e compatti nella topologia naturale.

Ogni gruppo G è un gruppo topologico nella topologia avente come base di intorni dello zero i sottogruppi di indice finito. Questa topologia è contenuta in quella naturale e le due topologie coincidono se e solo se G/nG è finito per ogni $n \in N$.

Ciò premesso, per mezzo del teorema 1 e con ragionamenti già usati nella dimostrazione del lemma 4 e della P.1, si verifica facilmente la seguente

P.3. *Un gruppo G è ridotto e localmente compatto nella topologia naturale se e solo se G è completo e la topologia naturale coincide con la topologia dei sottogruppi di indice finito.*

BIBLIOGRAFIA

[1] A. L. S. Corner, *Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring*, Proc. London Math. Soc. (3) 13 (1963) 687-710.

[2] L. Fuchs, *Abelian groups*, Budapest 1958.

[3] D. K. Harrison, *Infinite abelian groups and homological methods*, Annals of Math. 69 (1959) 366-91.

[4] J. Kelley, *General topology*, (1955).

[5] A. Orsatti, *Un lemma di immersione per i gruppi abeliani senza elementi di altezza infinita*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova XXXVIII (1967) 1-13.

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 luglio 1967.