

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

SANTUZZA BALDASSARRI GHEZZO

**Sulle localizzazioni di ideali e moduli di tipo finito
privi di torsione. (Proprietà del chiuso di un
fascio algebrico coerente e liscio)**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 39 (1967), p. 205-218

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__205_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLE LOCALIZZAZIONI DI IDEALI E MODULI DI TIPO FINITO PRIVI DI TORSIONE. (PROPRIETÀ DEL CHIUSO DI UN FASCIO ALGEBRICO COERENTE E LISCIO).

SANTUZZA BALDASSARRI GHEZZO *)

Sommario.

Sia V una varietà affine (irriducibile) su un corpo K commutativo algebricamente chiuso, ed $A = A[V]$ il suo anello delle coordinate, il quale è isomorfo all'anello delle sezioni globali del fascio $\mathcal{A}_V$ degli anelli locali di V . Sia inoltre M un A -modulo di tipo finito, il quale può sempre pensarsi come modulo delle sezioni globali d'un fascio $\mathcal{M}$ algebrico coerente su V .

È noto che, detto A_x l'anello locale in un punto (x) di V , se l' A_x -modulo $M_x \simeq M \otimes_A A_x$ è libero di rango r , esiste un aperto U di V contenente (x) , tale che per ogni $(x') \in U$ siano liberi di rango r gli $A_{x'}$ -moduli $M_{x'}$, e sia $(\mathcal{M}/U) \simeq (\mathcal{A}_V^r/U)$.

Inoltre ([1], [7] e [10]) il fascio $\mathcal{M}$ su V è certo libero fuori di un chiuso di cdm 1 in V , mentre se V è normale ed $\mathcal{M}$ privo di torsione, allora $\mathcal{M}$ è localmente libero fuori di un chiuso di cdm > 1 in V .

Nella presente nota dimostro che se I è un ideale d'un dominio d'integrità noetheriano A e $H(I)$ è l'intersezione di tutti gli ideali primi p di A nei quali I possiede localizzazione non libera, $I_p \sim A_p$, allora accanto alla nota equivalenza:

$$I \subseteq p \iff I_p \not\subseteq A_p$$

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

vale la :

$$H(I) \subseteq p \iff I_p \sim A_p.$$

Da ciò segue anche che se un fascio d'ideali su di una varietà V affine, ha fibra libera in un punto, l'ideale associato ha localizzazioni libere (sui propri anelli locali) in tutti i chiusi propri irriducibili (sottovarietà) della varietà V , passanti per quel punto.

Dimostro poi (n. 13) che: *per ogni ideale I , d'un dominio noetheriano A , l'ideale $H(I)$ non ha divisori primi minimali principali.*

Cioè anche che: *se $\mathcal{I}$ è un fascio d'ideali sulla varietà affine V , e $\chi(\mathcal{I})$ è il chiuso fuori del quale $\mathcal{I}$ è libero, $\chi(\mathcal{I})$ non ha componenti irriducibili di cdm 1 le quali non siano intersezione non completa di V con forme di K^n .*

Inoltre per ogni A -modulo M , detto $H(M)$ l'ideale intersezione degli ideali primi p di A in cui M_p non è libero su A_p , dimostro (n. 10) che per qualsiasi sequenza esatta di A -moduli del tipo

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

vale la relazione

$$H(M') \cap H(M'') \subseteq H(M).$$

Dopo di che posso infine dimostrare (n. 14) che: *per ogni modulo M di tipo finito, privo di torsione, sopra un dominio noetheriano A , l'ideale $H(M)$ non ha divisori primi minimali principali*, e quindi anche che: *un fascio algebrico coerente e liscio $\mathcal{M}$ di rango $r \geq 1$ sopra una K -varietà algebrica affine non può avere nel suo chiuso $\chi(\mathcal{M})$ componenti irriducibili di cdm. 1, le quali non siano intersezione non completa di V con forme dell'ambiente.*

1. Indicheremo qui sempre con K un corpo commutativo algebricamente chiuso e con K^n lo spazio affine n -dimensionale, dotato della topologia di Zariski, per la quale i chiusi sono tutti e soli gli insiemi algebrici $V(E)$ di K^n costituiti dalle totalità degli zeri delle famiglie E di polinomi di $K[X]$.

Indicheremo inoltre con $D(E)$ gli aperti complementari dei $V(E)$, e con $I(H)$ l'ideale appartenente ad un insieme algebrico H di K^n , cioè l'ideale (radicale) di tutti i polinomi nulli in ogni punto di H .

$I(H)$ sarà primo se e solo se H è irriducibile, (e quindi qui assolutamente irriducibile, poichè K è algebricamente chiuso).

2. Sia V un qualunque sottospazio non vuoto di K^n .

Si dice fascio degli anelli locali di V , il fascio $\mathcal{A}_V$, determinato dal prefascio (canonico) ottenuto associando ad ogni porzione aperta U di V , l'anello delle applicazioni regolari $U \rightarrow K$, e ad ogni coppia di aperti U e U' , con $U' \subseteq U$, l'omomorfismo canonico $\varphi_{U'}^U$ di restrizione, operante sulle applicazioni $f: U \rightarrow K$ con $\varphi_{U'}^U(f) = f|U'$.

Ogni fibra $\mathcal{A}_{V, x_0}$ di $\mathcal{A}_V$ è un anello locale, il cui ideale massimale è costituito con i germi rappresentati da applicazioni regolari nulle nel punto (x_0) , cioè il cui numeratore appartiene all'ideale del punto (x_0) .

Inoltre il nucleo dell'omomorfismo canonico ε_{x_0} dell'anello $A[x_0]$, delle frazioni regolari in (x_0) , sulla fibra $\mathcal{A}_{V, x_0}$, che associa ad ogni frazione regolare in (x_0) il germe da essa rappresentato, è l'ideale di $A[x_0]$, formato con gli elementi esprimibili come prodotto di un elemento di $I(V)$, per un elemento di $A[x_0]$. Ideale che si indica con $I(V) \cdot A[x_0]$.

3. Sia, d'ora in poi, V un chiuso irriducibile di K^n e quindi $I(V)$ primo in $K[X]$, allora $I(V) \cdot A[x_0]$ è primo in $A[x_0]$.

Inoltre se $A[V] = K[X]/I(V)$, che indicheremo soltanto con A , è l'anello delle coordinate del chiuso V ; e se p è l'ideale (primo) di A appartenente ad (x_0) , la fibra $\mathcal{A}_{V, x_0}$ di $\mathcal{A}_V$ s'identifica canonicamente con l'anello $S^{-1}A$ delle frazioni di elementi di A con denominatore nella parte moltiplicativa $S = A - p$, anello che indicheremo anche con $A_p \simeq A[x_0]/(I(V) \cdot A[x_0])$, o anche con A_{x_0} .

Dunque ogni germe di $\mathcal{A}_{V, x_0}$ può esser rappresentato in uno ed un sol modo con una frazione, elemento di A_p , ed essendo V irriducibile, $\mathcal{A}_{V, x_0}$ è un dominio d'integrità (per ogni x_0).

4. L'anello $\Gamma(V, \mathcal{A}_V)$ delle sezioni globali di $\mathcal{A}_V$, cioè delle applicazioni di V in K ovunque regolari su V , può identificarsi con l'anello $A = A[V]$ delle coordinate di V .

Inoltre le sezioni di $\mathcal{A}_V$ su un aperto U , $f \in \Gamma(U, \mathcal{A}_V)$, si possono identificare (in modo naturale) con le applicazioni regolari

$f: U \rightarrow K$, tenendo però essenzialmente distinto, per ogni $(x) \in U$, il valore f_x della sezione f nel punto (x) , (elemento della fibra $\mathcal{A}_{V, x}$ di $\mathcal{A}_V$ nel punto (x)), dal valore $f(x)$ della applicazione regolare f nel punto (x) , (elemento di K).

5. Se V è ancora un insieme chiuso irriducibile di K^n con la topologia relativa rispetto a quella di K^n , indicheremo con V anche la varietà affine, sottovarietà chiusa di K^n , definita dallo spazio anellato $(V, \mathcal{A}_V)$; e, in generale, diremo varietà algebrica affine ogni spazio anellato $(X, \mathcal{A}_X)$, isomorfo ad una sottovarietà chiusa di K^n .

Sia dunque V una varietà affine (irriducibile) su K .

L'anello $\Gamma(V, \mathcal{A}_V) \simeq A[V]$, che indicheremo come in 4) con A , risulta evidentemente un dominio d'integrità noetheriano (in quanto immagine omomorfa d'un anello di polinomi in un n^0 finito d'indeterminate sopra un corpo).

Ricordiamo qui che se $\mathcal{M}$ è un fascio algebrico coerente su V , $\Gamma(V, \mathcal{M})$ (o $\Gamma(\mathcal{M})$), è un A -modulo di tipo finito, e $\Gamma(\)$ è funtore covariante esatto sulla categoria dei fasci algebrici coerenti su varietà affini V , e omomorfismi algebrici, con valori nella categoria degli A -moduli di tipo finito.

Inoltre per ogni A -modulo di tipo finito M , se si considera su V il fascio costante M a fibra isomorfa ad M , tenuto conto che $\mathcal{A}_V$ è in modo naturale fascio di A -moduli, resta individuato ([10] n° 48) un fascio di $\mathcal{A}_V$ -moduli, cioè, algebrico coerente su V :

$$\mathcal{A}_V \otimes_A M$$

che si indica con $\mathcal{Q}(M)$.

Poichè l'essere di tipo finito, per un A -modulo equivale ad ammettere una suriezione del tipo $A^q \rightarrow M \rightarrow 0$, e l'operatore tensoriale è esatto a destra (anzi qui A_x è addirittura piatto), la fibra di $\mathcal{Q}(M)$ nel punto $(x) \in V$ è un A_x -modulo di tipo finito (su A_x (n° 3)) che s'identifica con:

$$M_x \simeq M \otimes_A A_x.$$

L'operatore $\mathcal{Q}(\)$ risulta funtore covariante esatto sulla categoria degli A -moduli di tipo finito ed A -omomorfismi (se $\mathcal{Q}(\varphi) = i_{\mathcal{A}_V} \otimes \varphi$)

con valori nella categoria dei fasci algebrici coerenti su varietà affini e degli omomorfismi algebrici.

(Ricordiamo che A deve essere una K -algebra di tipo finito, priva di nullipotent, affinché la si possa pensare come K -algebra delle sezioni globali del fascio degli anelli locali di qualche varietà affine).

Infine per i funtori $\Gamma(\)$ e $\mathcal{O}(\)$, così definiti valgono gli isomorfismi (canonici) $\Gamma(\mathcal{O}(M)) \simeq M$ e $\mathcal{O}(\Gamma(\mathcal{M})) \simeq \mathcal{M}$.

6. Diciamo che un fascio di $\mathcal{A}_V$ -moduli $\mathcal{M}$ è liscio o privo di torsione, se l' $\mathcal{A}_{V,x}$ -modulo $\mathcal{M}_x$, fibra di $\mathcal{M}$ nel punto (x) , e quindi l' A_x -modulo $M_x \simeq M \otimes_A A_x$ (con $M = \Gamma(\mathcal{M})$ ed $A = \Gamma(\mathcal{A}_V)$) è privo di torsione per ogni $(x) \in V$, o (il che sopra le varietà V , in quanto hanno il chiuso irriducibile, è lo stesso), se $\mathcal{M}_x$ è privo di germi f_x appartenenti a sezioni $f \in \Gamma(U, \mathcal{M})$, con U aperto contenente (x) , tali che in qualche punto $(x_0) \in U$ sia $f_{x_0} = 0$.

In caso contrario, l'insieme dei germi suddetti costituisce un sottofascio di $\mathcal{M}$: il sottofascio di torsione $t(\mathcal{M})$.

È noto che se $\mathcal{M}$ è algebrico, coerente e privo di torsione, sulla varietà V esso è isomorfo ad un sottofascio di un $\mathcal{A}_V^q$, anzi [3] se $\mathcal{M}$ ha rango r , esso ammette una iniezione:

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{i} \mathcal{A}_V^r \quad (\text{con } \text{supp.}(\mathcal{A}_V^r/i(\mathcal{M})) \neq V),$$

e viceversa.

Ogni fascio algebrico coerente e liscio su di una varietà affine, il quale sia di rango 1, è dunque un fascio d'ideali.

(L'esistenza della i si può dedurre, del resto, dalla analoga ([6] pg. 131) per i moduli di tipo finito, privi di torsione, tramite il funtore $\mathcal{O}$ del n° 5).

7. Diciamo che un fascio algebrico coerente $\mathcal{M}$, sulla varietà V affine, è localmente libero se l' A_x -modulo M_x è libero di tipo finito su A_x , per ogni (x) di V .

D'altra parte è noto ([7] e [10]) che, se per un $(x) \in V$ l' A_x -modulo M_x è libero, esiste un aperto connesso U di V contenente (x) ed un intero $r \geq 0$, tali che $\mathcal{M}/U$ sia isomorfo ad $\mathcal{A}_V^r/U$; e in tal caso sono

anche liberi gli A_x -moduli $M_{x'}$ per ogni $(x') \in U$; ed il rango r di M_x su A_x è costante al variare di (x) in U .

Perciò si può dire che un fascio algebrico coerente è localmente libero su V , se per ogni $(x) \in V$, esiste un aperto U di V contenente (x) tale che $\mathcal{M}/U$ sia isomorfo ad un $(\mathcal{A}_V/U)$ -fascio della forma $\mathcal{A}_V^r/U$, ed è noto ([10]) che ciò accade se e solo se $\Gamma(V, \mathcal{M})$ è un A -modulo proiettivo.

Inoltre ([7] e [10]) per ogni fascio algebrico $\mathcal{M}$ su V , l'insieme degli $(x) \in V$ tali che M_x sia libero su A_x , è un aperto W non vuoto di V , e su W , per quanto detto prima, il rango r di M_x su A_x sarà localmente costante, ed il fascio $\mathcal{M}$ localmente libero. Il chiuso X complementare di W in V (come è detto al n° 5), V è pensata sempre come sottovarietà chiusa di K^n si dice il *chiuso del fascio* $\mathcal{M}$, e si indica con $\chi(\mathcal{M})$.

Anzi risulta [1] che ogni fascio algebrico coerente $\mathcal{M}$ è addirittura libero fuori di un chiuso proprio X , cioè sarà su tutto $V - X$, $\mathcal{M}/(V - X) \simeq \mathcal{A}_V/V - X$, e il chiuso X avrà generalmente codimensione 1 in V .

Mario Baldassarri ha dimostrato inoltre [1] che, se si aggiunge alle ipotesi precedenti la condizione che V sia normale, ed $\mathcal{M}$ liscio, esso risulta localmente libero fuori di un chiuso X di V di $\text{cdm} > 1$ su V .

8. OSSERVAZIONE. L'ipotesi della normalità di V è in [1] usata per escludere l'esistenza su V di luoghi singolari di $\text{cdm} = 1$. Mentre l'esempio riportato in [2] nella osservazione di pag. 280 mostra come $M = I = (\bar{x}, \bar{y})$ su $A = K[x, y]/(x^3 - y^2)$, abbia nel punto singolare $(x) = (0, 0)$, localizzazione non libera, (anzi non proiettiva).

Osserviamo che in tale esempio il punto $(0, 0)$ della varietà lo si ottiene sia come sottovarietà dell'ideale $(\bar{x})$, cioè su K^2 come $V_1(x, x^3 - y^2)$, ma è in sostanza una componente irriducibile dell'insieme algebrico appartenente all'ideale $(\bar{x}, \bar{y})$ di A , il quale non è principale, cioè è una componente di $V_1(x, y, x^3 - y^2)$.

In altre parole il chiuso irriducibile costituito dal punto 0 , è intersezione completa di $V(x^3 - y^2)$ con $V(x)$, ma si presenta anche come intersezione non completa di $V(x^3 - y^2)$ con $V(y - mx)$.

Ebbene, vogliamo dimostrare come solo su chiusi siffatti di co-dimensione 1, di una varietà affine, un fascio algebrico coerente e liscio può essere non libero, e mai su chiusi di cdm 1 che si ottengono solo come intersezione completa della varietà con divisori irriducibili dello spazio.

9. Sia ancora V una varietà affine sul corpo K , e quindi il chiuso di V (n^0 5)) abbia l'anello delle coordinate $A \simeq \Gamma(V, \mathcal{A}_V)$ d'integrità e noetheriano.

Sia $\mathcal{M}$ un fascio algebrico coerente di rango r su V , e quindi $M = \Gamma(V, \mathcal{M})$ sia un A -modulo di tipo finito e rango r . Consideriamo l'insieme dei chiusi irriducibili di V sui quali M_p non è libero su A_p , cioè l'insieme, che indichiamo con $\mathbf{H}(M)$, degli ideali primi p di A per cui $M_p \simeq M \otimes_A A_p \sim A_p^r$.

Abbiamo detto in 7), che esiste almeno un punto $(x) \in V$ tale che, se p è l'ideale appartenente ad (x) , M_p sia libero su A_p , e che se e soltanto se M è proiettivo, M_p è libero per tutti gli ideali p dei punti di V (v. del resto anche [5] teor. 2 pag. 141).

Dunque in generale l'insieme $\mathbf{H}(M)$ degli ideali p per cui $M_p \sim A_p^r$ non è vuoto; indichiamo con $H(M)$ l'ideale intersezione di tutti gli ideali di questo insieme, cioè $H(M) = \bigcap_a p_a$, con $p_a \in \mathbf{H}(M)$.

10. Dimostriamo intanto che, per ogni modulo sopra un anello A , vale il seguente:

LEMMA 1: Se M è un A -modulo per il quale esiste una sequenza esatta del tipo:

$$a) \quad 0 \rightarrow Nc(\varphi) \rightarrow M \xrightarrow{\varphi} A^q \rightarrow 0,$$

risulta $\mathbf{H}(M) = \mathbf{H}(Nc(\varphi))$.

Infatti, essendo A^q proiettivo, la sequenza $a)$ è spezzante, ed $M \simeq A^q \oplus Nc(\varphi)$, pertanto, ponendo $Nc(\varphi) = M'$, da

$$0 \rightarrow M \rightarrow A^q \oplus M' \rightarrow 0,$$

si ha:

$$0 \rightarrow M \otimes_A A_p \rightarrow (A^q \oplus M') \otimes_A A_p \rightarrow 0$$

e quindi:

$$0 \rightarrow M_p \rightarrow A_p^q \oplus M'_p \rightarrow 0,$$

da cui si vede che M''_p è libero se e solo se lo è M_p , donde l'asserto.

Si può allora dimostrare la seguente:

PROPOSIZIONE 1). *Per ogni sequenza esatta di A -moduli, del tipo:*

$$1) \quad 0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0,$$

risulta:

$$2) \quad H(M') \cap H(M'') \subseteq H(M).$$

In altri termini: *per gli insiemi algebrici appartenenti agli ideali $H(\quad)$, vale la reazione:*

$$2') \quad V(H(M')) \cup V(H(M'')) \supseteq V(H(M)).$$

Infatti, localizzando negli ideali primi p , dalla 1) si ottengono sequenze esatte (per la piatezza di A_p) del tipo:

$$0 \rightarrow M'_p \rightarrow M_p \rightarrow M''_p \rightarrow 0.$$

Siano $\mathbf{H}(M')$, $\mathbf{H}(M)$ ed $\mathbf{H}(M'')$ gli insiemi degli ideali in cui non sono liberi rispettivamente M'_p , M_p ed M''_p , allora $H(M') \cap H(M'')$ sarà l'intersezione degli ideali appartenenti all'insieme $\mathbf{H}(M') \cup \mathbf{H}(M'')$, e $H(M)$ l'intersezione degli ideali appartenenti ad $\mathbf{H}(M)$.

Ora se M''_p è libero, per il lemma 1), si ha che, per l'ideale p , l'appartenenza ad $\mathbf{H}(M')$ ed $\mathbf{H}(M)$ si verifica o no simultaneamente, quindi in tal caso:

$$p \in \mathbf{H}(M) \implies p \in \mathbf{H}(M') \cup \mathbf{H}(M'');$$

se invece M''_p non è libero, $p \in \mathbf{H}(M'')$ e quindi $p \in \mathbf{H}(M') \cup \mathbf{H}(M'')$, anche se $p \notin \mathbf{H}(M)$.

Ne segue perciò l'affermazione 2) voluta.

11. Sia ora A un dominio d'integrità noetheriano, ed I un ideale di A , che possiamo considerare come sottomodulo di A , cioè come un A -modulo di tipo finito.

Consideriamo l'ideale $H(I)$, intersezione di tutti gli ideali primi di A , nei quali I ha localizzazione non libera. Analogamente al n° precedente, indicheremo con $\mathbf{H}(I)$ l'insieme di siffatti ideali.

Poichè A è noetheriano, $H(I)$ ammette una rappresentazione normale come intersezione di un numero finito di ideali primari: $H(I) = \cap Q_i$ (nessun Q_i contiene l'intersezione dei rimanenti Q_j (rappresentazione ridotta), ed i divisori primi delle varie componenti primarie Q_i , cioè gli ideali primi associati a $H(I)$, sono tutti distinti).

Osserviamo subito che quì per la definizione di $H(I)$, si ha una rappresentazione normale che dà $H(I)$ come intersezione di ideali primi, tutti appartenenti all'insieme $\mathbf{H}(I)$.

D'altra parte ricordando che per la localizzazione di I in un ideale primo p di A , si ha:

$$I_p = IA_p,$$

e cioè che I_p può considerarsi l'ideale esteso di I nell'anello locale A_p , risulta come è noto, che se $I \subseteq p$ è $IA_p \subseteq pA_p$ e perciò IA_p non contiene elementi invertibili, dunque $IA_p \neq A_p$, anzi si ha l'equivalenza:

$$(1.11) \quad I \subseteq p \iff I_p \neq A_p,$$

poichè se $I \not\subseteq p$, esiste un elemento $f \in I$ che non appartiene a p , e quindi ha immagine invertibile in A_p , per cui $f/f = 1 \in IA_p$ e dunque $IA_p = A_p$.

La (1.11) permette quì di affermare che vale la relazione:

$$I \subseteq H(I).$$

Infatti per ogni ideale $p \in \mathbf{H}(I)$, è certo $I_p \neq A_p$, e quindi risulta $I \subseteq p$.

Ne segue che il chiuso d'un fascio d'ideali $\mathcal{J}$ è contenuto nel chiuso degli zeri dell'ideale $\Gamma(\mathcal{J})$.

12. Si può ora dimostrare la seguente:

PROPOSIZIONE 2). *Se $H(I)$ è l'intersezione di tutti gli ideali primi del dominio noetheriano A , nei quali un ideale I di A possiede loca-*

lizzazione non libera, nessun ideale primo p' di A tale che $I_{p'} \simeq A_{p'}$ può contenere $H(I)$.

Si potrà quindi affermare che vale l'equivalenza :

$$(1.12) \quad H(I) \subseteq p \iff I_p \simeq A_p.$$

Infatti se in p è $I_p \simeq A_p$ allora $H(I) \subseteq p$ per la definizione di $H(I)$. Viceversa, sia p' un ideale primo di A che contenga $H(I)$; in tal caso è noto ([8], (2.5)) che p' contiene necessariamente qualche divisore primo minimale p di $H(I)$, il quale, come, osservato in 11), appartiene all'insieme $\mathbf{H}(I)$, cioè si ha $I_p \simeq A_p$.

Vogliamo far vedere che deve essere anche $I_{p'} \simeq A_{p'}$.

Infatti poichè essendo $p \subseteq p'$, esiste il monomorfismo d'anelli dato dall'inclusione :

$$0 \rightarrow A_{p'} \rightarrow A_p,$$

A_p risulta $A_{p'}$ -modulo (oltre che A -modulo), e quindi si ha :

$$A_p \otimes_{A_{p'}} I_{p'} \simeq A_p \otimes_{A_{p'}} (A_{p'} \otimes_A I) \simeq (A_p \otimes_{A_{p'}} A_{p'}) \otimes_A I \simeq A_p \otimes_A I \simeq I_p.$$

Allora se fosse $I_{p'} \simeq A_{p'}$ seguirebbe

$$A_p \otimes_{A_{p'}} I_{p'} \simeq A_p \otimes_{A_{p'}} A_{p'},$$

e quindi risulterebbe anche

$$I_p \simeq A_p,$$

in contraddizione col fatto che $p \in \mathbf{H}(I)$.

Ciò completa la dimostrazione della proposizione 2), anzi della (1.12).

Ne segue anche che se $p \subseteq p'$ sono ideali di A , ed è :

$$I_{p'} \simeq A_{p'}$$

è anche :

$$I_p \simeq A_p.$$

Infatti $I_{p'} \simeq A_{p'} \implies H(I) \not\subseteq p'$, quindi esiste un elemento di $H(I)$ che non sta in p' è quindi neanche in p . Perciò $H(I) \not\subseteq p$ e quindi $I_p \simeq A_p$.

Cioè in particolare: *se un fascio $\mathcal{Q}(I)$ d'ideali su di una K -varietà V affine, ha fibra libera in un punto, I_p è libero su A_p in tutti i chiusi propri $V(p)$ irriducibili della varietà passanti per quel punto.*

Dunque il supporto del chiuso di $H(I)$ contiene tutti e soli i punti in cui $\mathcal{Q}(I)$ possiede fibra non libera, e quindi coincide col chiuso del fascio $\mathcal{Q}(I)$, (n. 7).

13. Premettiamo ora un'osservazione che ci sarà utile in quel che segue.

Sia ancora A un dominio noetheriano. È noto che una potenza di un ideale primo P di A , può non essere un ideale primario, però per un ideale primo P di A , P è l'unico divisore primo minimale di P^r (per ogni numero naturale r).

Ora se P è primo principale in A , cioè se $P = (f)$ con $f \neq 0$ e non invertibile, $P^r = (f^r)$ e P risulta anche divisore primo massimale di P^r (si verifica facilmente che nel nostro caso P contiene tutti i divisori di zero modulo P^r). Ne segue che P^r ha il solo divisore primo P e quindi è primario per P . ([8], Ch. I, n. 7).

Dimostriamo ora che vale il seguente:

TEOREMA 1) *Per ogni ideale I , d'un dominio d'integrità noetheriano A , l'ideale $H(I)$ non ha divisori primi minimali principali.*

Questo teorema, per quanto è ricordato ai nn. 5) e 7), e tenuto conto del fatto che in un dominio noetheriano ogni ideale primo principale proprio è minimale e quindi di altezza 1, afferma che:

Se V è una varietà affine sul corpo K , ed $\mathcal{I}$ un fascio d'ideali su V , se il chiuso $\chi(\mathcal{I})$ del fascio $\mathcal{I}$ contiene componenti irriducibili di codimensione 1, queste sono forme intersezione non completa di V con forme di K^n .

Dimostrazione del teorema 1): Consideriamo per l'ideale $H(I)$ la rappresentazione normale di cui abbiamo detto al n. 11).

Supponiamo che l'ideale $H(I)$ abbia un divisore primo minimale principale (proprio) P , allora P è minimale fra gli ideali primi che contengono $H(I)$ e per la costruzione stessa della rappresentazione normale di $H(I)$, $P \in H(I)$ quindi $I_P \sim A_P$.

Consideriamo ora una rappresentazione normale dell'ideale I ,

come intersezione finita di ideali primari, sia :

$$1) \quad I = \bigcap_i q_i .$$

Poichè P contiene I (n. 11), P contiene un divisore primo minimale p_i di I , e sarà anzi $P = p_i$, poichè essendo P principale primo nel dominio noetheriano A , esso è anche minimale in A . Dunque P è divisore primo minimale (ideale primo isolato) di I .

Sia $P = (f)$ con $f \neq 0$ e non invertibile ; e nella decomposizione 1) primaria normale di I , sia $q_{i_1} \subset P$ la componente primaria ad esso associata univocamente (in quanto P è divisore primo minimale di I). Vista l'osservazione precedente, sarà $q_{i_1} = (f^v)$, per un intero $v \neq 0$, e potremo intanto scrivere la decomposizione sopra considerata $I = \bigcap_i q_i$ nel seguente modo :

$$I = q_{i_1} \cap I', \text{ dove } I' = \bigcap_{i \neq i_1} q_i ,$$

e q_{i_1} non contiene I' , trattandosi di decomposizione ridotta.

È subito visto che esistono ideali primi associati a $H(I)$ che contengono P e non contengono I' (per es. P stesso, poichè se un ideale primo contiene I' , contiene qualche ideale primo p_j associato ad I' , ma P è divisore primo minimale di I , e la 1) è una rappresentazione normale di I).

Ora essendo A noetheriano esisterà in $\mathbf{H}(I)$ un ideale primo p massimale rispetto alle condizioni ; $f \equiv 0 (p)$ e $I' \not\subseteq p$.

Per un siffatto ideale p sarà intanto $I'_p = A_p$ (n. 11), e di conseguenza

$$I_p = IA_p = (q_{i_1} \cap I') A_p = q_{i_1} A_p ,$$

poichè

$$q_{i_1} I' \subseteq q_{i_1} \cap I' \subset q_{i_1}$$

e dunque

$$q_{i_1} I' A_p \subseteq (q_{i_1} \cap I') A_p \subseteq q_{i_1} A_p$$

dove $I' A_p = I'_p = A_p$.

Ma inoltre è $q_{i_1} A_p \simeq A_p$ nell'isomorfismo $\varphi : f^v \rightarrow 1$.

In conclusione, nelle ipotesi poste, sarebbe $I_p \simeq A_p$ il che è in contraddizione col fatto che $p \in \mathbf{H}(I)$. Se ne deduce che l'ideale $H(I)$ non può avere divisori primi minimali principali.

14. Ricordando ora che ogni fascio algebrico coerente e liscio di rango 1, su una varietà affine è isomorfo ad un fascio $\mathcal{I}$ d'ideali, siamo in grado di dimostrare che:

Un fascio algebrico coerente e liscio $\mathcal{M}$ di rango $r \geq 1$ sopra una varietà V algebrica affine sul corpo K , non può avere nel suo chiuso $\chi(\mathcal{M})$ componenti irriducibili di codimensione 1 le quali non siano intersezione non completa di V con forme dell'ambiente.

Dimostriamo precisamente il seguente:

TEOREMA 2): *Per ogni modulo M di tipo finito, privo di torsione, sopra un dominio d'integrità noetheriano A , l'ideale $H(M)$ non ha divisori primi minimali principali.*

La dimostrazione può farsi per induzione sul rango r di M , poichè per il teorema 1) l'affermazione è vera se M ha rango 1, giacchè in tal caso esso può sempre pensarsi come un ideale di A .

Se $r > 1$, ammettiamo vero il teorema 2) per i moduli di rango $\leq r - 1$, e dimostriamo che di conseguenza esso è vero per $rg(M) = r$.

Sia quindi M di rango r , e consideriamo una iniezione (n^0 6)):

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{i} A^r;$$

componiamo i con la proiezione canonica r -sima:

$$A^r \xrightarrow{p} A \rightarrow 0,$$

cioè restringiamo la p ad $i(M)$; otterremo una sequenza esatta del tipo:

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow I \rightarrow 0$$

dove ora $rg(M') = r - 1$ e $rg(I) = 1$, per cui: $H(M')$ non ha divisori primi minimali principali per l'ipotesi induttiva e $H(I)$ nemmeno per il teorema 1) del n^0 precedente.

Ma per la proposizione 1) del n^0 10)

$$H(M') \cap H(I) \subseteq H(M)$$

e poichè $H(M')$ e $H(I)$ non hanno divisori primi minimali principali non può averne neanche $H(M)$, come volevasi dimostrare.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. BALDASSARRI, *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci*, Atti del Conv. Internaz. di Geom. Alg. di Torino del 1961.
- [2] S. BALDASSARRI GHEZZO, C. MARGAGLIO e T. MILLEVOI, *Considerazioni sulla conferenza tenuta da M BALDASSARRI a Torino nel 1961: « Osservaz. sulla struttura dei fasci lisci »* Rend. del Seminario Mat. della Univ. di Padova CEDAM, (1966).
- [3] S. BALDASSARRI GHEZZO, C. MARGAGLIO e T. MILLEVOI, *Introduzione ai metodi della geometria algebrica*. Cremonese Roma, (1967).
- [4] N. BOURBAKI, *Algèbre linéaire*. Paris. Hermann, (1962).
- [5] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*. Paris. Hermann, (1961).
- [6] H. CARTAN and S. EILENBERG, *Homological algebra*. Princeton Univ. Press, (1956).
- [7] P. CARTIER, *Questions de rationalité des diviseurs en géométrie algébrique*. Bull. Soc. Math. France. T. 86, (1958).
- [8] M. NAGATA, *Local rings*. Interscience Publishers, (1962).
- [9] D. G. NORTHCOTT, *Ideal theory*. Cambridge at the Univ. Press, (1953).
- [10] J. P. SERRE, *Faisceaux algébriques cohérents*. Annals. of Mathematics. Vol. 61, No. 2. U.S.A., (1955).
- [11] B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebra*. Springer-Verlag. Berlin, (1955).
- [12] O. ZARISKI and P. SAMUEL, *Commutative algebra*. D. van Nostrand Comp. Inc. (1958).

Manoscritto pervenuto in redazione il 6 Marzo 1967.