Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Ettore Bentsik

Su possibili moti semplici di un satellite artificiale soggetto a forze newtoniane

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 177-189

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__177_0>

SU POSSIBILI MOTI SEMPLICI DI UN SATELLITE ARTIFICIALE SOGGETTO A FORZE NEWTONIANE

ETTORE BENTSIK *)

Sia $\mathcal{C}$ un corpo rigido il cui baricentro G si muova di moto circolare uniforme attorno ad un punto Q e sia $\mathcal{C}$ soggetto a forze di tipo newtoniano di centro Q.

In questo lavoro si determinano le rotazioni uniformi e, nel caso giroscopico, le precessioni regolari del corpo nel suo moto relativo al baricentro nell'ipotesi che la distanza R del baricentro G dal punto Q sia molto grande rispetto alle dimensioni di $\mathcal{C}$, ma non tanto grande da ritenere del tutto trascurabile la forma del corpo.

Tale ipotesi è quella abituale nello studio di molte questioni di Meccanica Celeste e in particolare del moto dei satelliti artificiali. È interessante osservare che gli unici moti di precessione regolare possibili per il solido costituiscono una particolare classe di moti alla Poinsot, nonostante la sollecitazione esterna non abbia in generale momento nullo rispetto al baricentro. Anzi si trova che ogni movimento in cui l'asse giroscopico è inizialmente ortogonale alla congiungente il baricentro del corpo con il centro di attrazione non può differire da un moto alla Poinsot ed è pertanto una precessione regolare come nel caso generale dei moti alla Poinsot di un giroscopio.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito della attività dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico — Università — Padova.

1. Equazioni generali.

Sia $\mathcal{C}$ un corpo rigido qualunque e si supponga che il suo baricentro G si muova di moto circolare uniforme in un piano π attorno ad un punto Q. Si supponga che $\mathcal{C}$ sia soggetto a forze di tipo newtoniano emananti dal centro Q.

Si assuma come sistema di riferimento fisso una terna trirettangola levogira con l'origne in Q, assi x, y, appartenenti al piano π e asse z perpendicolare a detto piano; si consideri inoltre una terna solidale coincidente con una terna centrale d'inerzia di $\mathcal{C}$.

Si indichi con $\mathbf{c}$ il versore di GQ, con R la distanza di G da Q, con $\mathbf{u}$ il versore dell'asse z, con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ i versori della terna solidale, con $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{u}\,\nu$ ($\nu = \text{cost.}$) la velocità angolare nel moto rotatorio di G intorno a Q e con $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare del corpo $\mathcal{C}$ nel suo moto relativo al baricentro.

Si denotino con c_i, u_i le componenti di $\mathbf{c}$ e $\mathbf{u}$ rispetto agli assi solidali.

Si pensi, com'è abituale, di sviluppare il potenziale U delle forze newtoniane in serie di potenze di $\dfrac{1}{R}$. Se R è sufficientemente grande, arrestando lo sviluppo al primo termine della serie, si ha, a meno di una inessenziale costante,

$$U = -\frac{3g}{2R}\left(Ac_1^2 + Bc_2^2 + Cc_3^2\right) \tag{1}$$

con g costante positiva [1]). Tale approssimazione è già sufficiente per spiegare certi fenomeni della Meccanica Celeste e in particolare certi aspetti del moto dei satelliti artificiali.

Risulta chiaramente che il risultante e il momento risultante rispetto a G di tali forze sono dati da:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \operatorname{grad}_c U \\ \mathbf{M}_G &= -\,GQ \wedge \operatorname{grad}_c U, \end{aligned} \tag{2}$$

ove il gradiente va fatto rispetto alle variabili c_1, c_2, c_3.

[1]) E. Leimanis, « *The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point* » - Springer - Verlag, Berlin. Heidelberg. New-York 1965 - pagg. 256 - 262.

Nel moto relativo al baricentro, tenuto conto che le forze di trascinamento hanno momento nullo rispetto a G, il teorema del momento della quantità di moto assume la forma [2]:

$$\sigma\,\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \sigma\,\boldsymbol{\omega} = \frac{3g}{R}\,\mathbf{c} \wedge \sigma\,\mathbf{c} \tag{3}$$

ove con σ si è indicata la omografia d'inerzia

$$\sigma \equiv \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Alle (3) vanno associate le equazioni cinematiche

$$\dot{\mathbf{c}} + (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\nu}) \wedge \mathbf{c} = 0 \tag{5}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\nu} = 0 \tag{6}$$

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{c} = 0. \tag{8}$$

Si può notare la esistenza di un integrale primo. Basta a tal fine moltiplicare scalarmente la (3) per $\boldsymbol{\omega}$ e tener conto di (5) e poi, ancora, di (3). Si deduce:

$$\boldsymbol{\omega} \times \sigma\boldsymbol{\omega} + \frac{3g}{R}\,\mathbf{c} \times \sigma\mathbf{c} - 2\,\boldsymbol{\nu} \times \sigma\boldsymbol{\omega} = \text{cost.} \tag{9}$$

che si riduce al noto integrale dell'energia se G è fisso ($\boldsymbol{\nu} \equiv 0$).

---

[2]) il punto sta ad indicare la derivazione rispetto al tempo con riferimento agli assi solidali.

2. Moti rotatori uniformi.

Si cerchino moti per i quali sia $\omega = \text{cost.}$; in tal caso ω è costante anche nel corpo e $\sigma\omega$ lo è pure; si ha pertanto

$$\sigma\omega \times \omega = \text{cost.}, \tag{10}$$

e la (3) assume la forma

$$\omega \wedge \sigma\omega = \frac{3g}{R} \mathbf{c} \wedge \sigma \mathbf{c}. \tag{11}$$

Supposti diversi tra loro i tre momenti principali $A, B, C,$ dalla (11), proiettando sugli assi mobili, si trae:

$$\begin{cases} rq = \dfrac{3g}{R} c_3 c_2 \\ pr = \dfrac{3g}{R} c_1 c_3 \\ qp = \dfrac{3g}{R} c_2 c_1 . \end{cases} \tag{12}$$

Poichè i tre coseni direttori c_1, c_2, c_3 non possono annullarsi contemporaneamente, si supponga $c_3 \neq 0$; in tal caso dalle (12) si ha:

$$\begin{cases} c_2 = \dfrac{R}{3g} \dfrac{qr}{c_3} \\ c_1 = \dfrac{R}{3g} \dfrac{pr}{c_3} . \end{cases} \tag{13}$$

Tenendo conto della (7) si vede subito che deve essere $c_3 = \text{cost.}$ e quindi sarà pure $c_1 = \text{cost.}$, $c_2 = \text{cost.}$.

Dalla (6) proiettando sugli assi si ha:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \quad ru_2 - qu_3 \\ \dot{u}_2 = -ru_1 + pu_3 \\ \dot{u}_3 = \quad qu_1 - pu_2 \end{cases} \tag{14}$$

con

$$u_1 c_1 + u_2 c_2 + u_3 c_3 = 0. \tag{15}$$

Per la (15) si può scrivere:

$$u_3 = - \frac{u_1 c_1 + u_2 c_2}{c_3} \tag{16}$$

sostituendo il valore trovato per u_3 nelle (14,1) (14,2) e tenendo conto della (14,3) e, ancora, della (16), si ha

$$\begin{aligned} u_2 &= K_1 u_1 \\ u_3 &= K_2 u_1 \end{aligned} \tag{17}$$

con K_1 e K_2 costanti.

Dovendo essere $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$, si conclude che devono essere costanti u_1, u_2, u_3.

Dalla (6) si ha quindi

$$\omega \wedge \nu = 0 \tag{18}$$

e cioè

$$p = Ku_1 , \qquad q = Ku_2 , \qquad r = Ku_3 , \tag{19}$$

con K costante.

Tenendo conto della (5) e del fatto che $\dot{c} = 0$, si trae

$$\omega = \nu. \tag{20}$$

Inoltre, per la (8), dovrà anche essere

$$c_1 p + c_2 q + c_3 r = 0 \tag{21}$$

e quindi (vedi (12))

$$r = 0, \tag{22}$$

$$c_1 = c_2 = 0 \; ; \; c_3 = \pm 1 \tag{23}$$

e inoltre

$$pq = 0. \tag{24}$$

Supposto $p \neq 0$ si ha

$$q = r = 0, \quad c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = \pm 1, \quad u_2 = u_3 = 0, \quad u_1 = \pm 1$$

si possono quindi avere moti rotatori uniformi con velocità angolare $\omega = \nu$ attorno ad un asse principale d'inerzia, essendo il vettore $\mathbf{c}$ diretto secondo un altro asse principale.

In realtà si ha un moto rotatorio uniforme in cui il corpo è visto sempre dalla stessa parte dal centro di attrazione.

Osservazione. Le considerazioni ora svolte valgono anche se il corpo è un giroscopio. Infatti, supposto $A = B$, nell'ipotesi che sia $c_3 \neq 0$, rimangono inalterate le condizioni trovate tranne la (12,3) e quindi la (24) che perdono ogni significato; le (14), (19), (23) permettono però di ritenere valide anche per un giroscopio le conclusioni tratte per un corpo qualsiasi sotto l'ipotesi $c_3 \neq 0$, tenendo tuttavia presente che nel corpo l'asse di rotazione è disposto secondo uno qualunque degli infiniti assi centrali trasversali.

Merita infine una particolare attenzione, in questo caso, l'eventualità che sia $c_3 = 0$.

In tale ipotesi la (12,3) non va più considerata e si ha:

$$(25) \qquad \begin{cases} pr = 0 \\ qr = 0, \end{cases}$$

mentre dalla (5), proiettando, si ha

$$(26) \qquad \begin{cases} \dot{c}_1 = (r - \nu u_3)\, c_2 \\ \dot{c}_2 = -(r - \nu u_3)\, c_1 \\ c_2\, p - c_1\, q - \nu\,(c_2\, u_1 - c_1\, u_2) = 0. \end{cases}$$

Sarà inoltre

$$(27) \qquad c_1^2 + c_2^2 = 1$$

$$(28) \qquad c_1\, u_1 + c_2\, u_2 = 0.$$

Dalle (25) segue che dovrà essere $r = 0$ oppure $p = q = 0$.

Qualora sia $p = q = 0$ dalle (26,3), (28), tenuto conto della (27), si trae:

$$u_1 = u_2 = 0,\ u_3 = \pm 1 \tag{29}$$

e quindi

$$\omega \wedge \nu = 0. \tag{30}$$

Inoltre c_1 e c_2 potranno essere dedotti dalle (6).

In tal caso si hanno moti rotatori intorno all'asse giroscopico disposto parallelamente a ν ma (a differenza di prima) con velocità angolare di modulo arbitrario e pertanto il solido non presenta, come prima, sempre la medesima faccia al centro di attrazione.

Si supponga ora $r = 0$. Da (28), (27) si ha

$$c_2 = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}},\quad c_1 = -\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \tag{31}$$

e, da queste, sostituendo in (26,3)

$$u_1 p + u_2 q - \nu (u_1^2 + u_2^2) = 0. \tag{32}$$

Ma da (26,1), (26,2) si ha $u_1 p + u_2 q = \text{cost.}$; da (32) si ha quindi $u_1^2 + u_2^2 = \text{cost.}$, da cui si trae $u_3 = \text{cost.}$ e ancora $u_1 = \text{cost.}$, $u_2 = \text{cost.}$. Dalle (14,1), (14,2) si deduce che deve essere $u_3 = 0$.

Sono quindi possibili per un giroscopio moti rotatori uniformi con velocità angolare ν attorno ad un asse centrale trasversale essendo il vettore $\mathbf{c}$ diretto secondo un altro asse trasversale e con l'asse giroscopico perpendicolare ad entrambi.

3. Precessioni regolari per un giroscopio.

Si vogliono ora cercare tutte le possibili precessioni regolari di $\mathcal{C}$ nel caso in cui questo sia un giroscopio. Detti ε e γ due versori rispettivamente solidale al corpo $\mathcal{C}$ e l'altro fisso nello spazio, sarà :

$$\omega = \varphi\gamma + \psi\varepsilon \quad \text{con} \quad \varphi \text{ e } \psi \text{ costanti,} \tag{33}$$

$$\gamma \times \varepsilon = \text{cost.} \tag{34}$$

$$\dot{\gamma} + \omega \wedge \gamma = 0 \tag{35}$$

$$A = B. \tag{36}$$

Dalla (33), moltiplicando scalarmente ambo i membri per $\mathbf{k}$, si ha

$$r = \varphi\gamma \times \mathbf{k} + \psi\varepsilon \times \mathbf{k} \tag{37}$$

mentre la terza equazione di Eulero dà $r = r_0 = \text{cost.}$

Tenuto conto che ε è un vettore solidale e che dalla (37) segue $\gamma \times \mathbf{k} = \text{cost.}$, si ha che l'asse di figura deve necessariamente coincidere con l'asse giroscopico; si potrà quindi porre

$$\omega = \varphi\gamma + \psi\mathbf{k} \tag{38}$$

con γ_3 evidentemente costante.

Per le posizioni fatte ω si potrà scrivere nella forma

$$\omega = \varphi\gamma_1\mathbf{i} + \varphi\gamma_2\mathbf{j} + (\varphi\gamma_3 + \psi)\mathbf{k}. \tag{39}$$

D'altra parte si ha

$$\frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \varphi\dot{\gamma} \tag{40}$$

e, per la (35),

$$\dot{\omega} = \varphi\gamma \wedge \psi\mathbf{k}, \tag{41}$$

da cui si trae, tenendo conto anche di (39),

$$\begin{cases} \dot{p} = \psi q \\ \dot{q} = -\psi p \end{cases} . \tag{42}$$

Le (42) permettono di calcolare p e q in funzione del tempo. Le equazioni di Eulero

$$(43)\qquad \begin{cases} A\dot{p} - (A - C)\,qr = -\dfrac{3g}{R}(A - C)\,c_2\,c_3 \\ A\dot{q} - (C - A)\,pr = -\dfrac{3g}{R}(C - A)\,c_1\,c_3 \\ C\dot{r} = 0, \end{cases}$$

assumono in questo caso la forma

$$(44)\qquad \begin{cases} c_1\,c_3 = Sq \\ c_2\,c_3 = Sp \end{cases}$$

ove si è posto

$$(45)\qquad S = \frac{3g}{R}\left(\frac{\psi A}{C - A} + r_0\right) = \text{cost.}$$

È noto che condizione necessaria e sufficiente affinchè un moto rigido sia un moto di precessione è che le componenti della velocità angolare rispetto ad assi solidali verifichino la uguaglianza [3]:

$$(46)\qquad p\dot{q} - q\dot{p} + r_0(p^2 + q^2) - \lambda(p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}} = 0$$

dove λ è una costante.

Dalle (5), proiettando sugli assi, si ha

$$(47)\qquad \begin{cases} \dot{c}_1 + c_3\,q - \nu c_3\,u_2 - r_0\,c_2 + \nu u_3\,c_2 = 0 \\ \dot{c}_2 - c_3\,p + \nu c_3\,u_1 + r_0\,c_1 - \nu u_3\,c_1 = 0 \\ c_2\,p - \nu c_2\,u_1 - c_1\,q + \nu c_1\,u_2 = 0. \end{cases}$$

---

[3]) G. GRIOLI, « *Qualche teorema di cinematica dei moti rigidi* », Rend. Acc. Naz. dei Lincei, serie VIII vol. XXXIV, fasc. 6, (1963).

Tenuto conto della (42), dalla (46), dovendo essere $p^2 + q^2 = \text{cost.}$, si ricava

(48) $$r_0 - \psi - \lambda (p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

e per le (42) (48), moltiplicando la (43, 1) per q, la (43, 2) per p e sottraendo membro a membro si ha:

(49) $$(p^2 + q^2)[C r_0 - \lambda A (p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}] + (A - C) \frac{3g}{R} c_3 (c_1 p + c_2 q) = 0.$$

Da questa segue che

(50) $$c_3 (c_1 p + c_2 q) = \text{cost.}$$

Dalle (44) segue

(51) $$S p q = \text{cost}$$

che implica, se si vuol escludere che il moto sia rotatorio uniforme,

(52) $$S = 0, \qquad \psi = \frac{A - c}{A} r_0$$

e quindi

(53) $$c_3 c_1 = 0; \quad c_3 c_2 = 0.$$

Qualora sia $c_3 \neq 0$ dalle (53) si ha

(54) $$c_1 = c_2 = 0.$$

In tal caso sarà, per le (5), (8), (38)

(55) $$\mathbf{c} = \pm \mathbf{k}$$

(56) $$\varphi \boldsymbol{\gamma} \wedge \mathbf{k} = \boldsymbol{\nu} \wedge \mathbf{k}.$$

Da (56) si deduce la costanza dell'angolo fra $\boldsymbol{\nu}$ e $\mathbf{k}$ e ciò implica che $\boldsymbol{\nu}$ sia parallelo all'asse di precessione e conseguentemente

(57) $$\boldsymbol{\nu} = \varphi \boldsymbol{\gamma}$$

(58) $$\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{k} = 0.$$

Le (38), (57), (58) implicano $r_0 = \psi$ il che è da escludere per la (52). Escluso che si possano avere precessioni regolari proprie per $c_3 \neq 0$, si supponga che sia

$$c_3 = 0. \tag{59}$$

Si nota (vedi (43)) che in tal caso si ha un moto alla Poinsot. Si esprima ω nella forma

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{K}_G}{A} + \frac{A - c}{A} r_0 \mathbf{k}, \tag{60}$$

ove con $\mathbf{K}_G$ si è indicato il momento della quantità di moto del sistema rispetto al baricentro che, nel caso in esame, è costante.

Per la (38) si avrà quindi, tenuto conto di (52),

$$\mathbf{K}_G = A \varphi \boldsymbol{\gamma}. \tag{61}$$

Va notato che la condizione $c_3 = 0$ implica la ortogonalità dei vettori $\mathbf{c}$ e $\mathbf{k}$ e cioè

$$\mathbf{c} \times \mathbf{k} = 0, \tag{62}$$

da cui derivando rispetto al tempo si ha

$$\dot{\mathbf{c}} \times \mathbf{k} = 0. \tag{63}$$

Dalla (5) si deduce quindi

$$(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\nu}) \wedge \mathbf{c} \times \mathbf{k} = 0 \tag{64}$$

o, anche, tenuto conto di (60),

$$\left(\frac{\mathbf{K}_G}{A} - \boldsymbol{\nu}\right) \times \mathbf{c} \wedge \mathbf{k} = 0 \tag{65}$$

da cui

$$\frac{\mathbf{K}_G}{A} - \boldsymbol{\nu} = \lambda \mathbf{c} + \mu \mathbf{k} \tag{66}$$

con λ e μ funzioni per ora arbitrarie del tempo.

D'altra parte la costanza del vettore $\dfrac{\mathbf{K}_G}{A} - \mathbf{\nu}$ e l'ortogonalità di $\mathbf{c}$ e $\mathbf{k}$ comporta che si abbia

$$\lambda^2 + \mu^2 = \text{cost.} \tag{67}$$

Moltiplicando scalarmente ambo i membri della (66) per $\mathbf{k}$ una prima volta e per $\mathbf{\nu}$ una seconda si ha, ricordando la (8)

$$\frac{C}{A} r_0 - \mathbf{\nu} \times \mathbf{k} = \mu \tag{68}$$

$$\frac{\mathbf{K}_G}{A} \times \mathbf{\nu} - \nu^2 = \mu\, \mathbf{k} \times \mathbf{\nu}. \tag{69}$$

Eliminando il prodotto $\mathbf{\nu} \times \mathbf{k}$ fra le (68), (69) si trae

$$\frac{\mathbf{K}_G}{A} \times \mathbf{\nu} - \mathbf{\nu}^2 = \mu \frac{C}{A} r_0 - \mu^2 \tag{70}$$

da cui si deduce $\mu = \text{cost.}$ e, per la (67), $\lambda = \text{cost.}$

Ma se μ è costante, dalla (68) si ha che

$$\mathbf{\nu} \times \mathbf{k} = \text{cost.} \tag{71}$$

e quindi che l'asse di precessione è parallelo a $\mathbf{\nu}$.

Si potrà quindi porre

$$\frac{\mathbf{K}_G}{A} = \varrho\, \mathbf{\nu} \tag{72}$$

con ϱ costante, da cui si trae

$$\begin{cases} p = \varrho \nu\, u_1\,, \\ q = \varrho \nu\, u_2 \\ r_0 = \varrho \nu \dfrac{A}{C} u_3\,. \end{cases} \tag{73}$$

Inoltre dalla (48,3) si deduce che deve essere $\varrho = 1$ e quindi

74) $$\begin{cases} p = \nu\, u_1 \\ q = \nu\, u_2 \\ r_0 = \nu\, \dfrac{A}{C}\, u_3 \end{cases}$$

con

75) $$\nu^2 = p_0^2 + q_0^2 + \frac{C^2}{A^2}\, r_0^2 \quad \text{e} \quad \varphi = \nu.$$

Si può dunque concludere che sono possibili nel caso in esame precessioni regolari aventi per asse di figura l'asse giroscopico, asse di precessione coincidente con l'asse attorno a cui ruota G.

L'angolo di precessione è dato dalla (74,3) e dipende chiaramente dall'atto di moto iniziale.

In realtà trattasi di precessioni regolari per le quali la velocità angolare iniziale può essere qualunque come nel caso dei moti alla Poinsot di un giroscopio non soggetto a coppie, con la differenza, tuttavia, che la posizione iniziale del solido deve essere tale che l'asse giroscopico appartenga al piano per G ortogonale alla congiungente G con il centro di attrazione.

Ciò risulta immediatamente dall'osservazione delle (74), (75).

Manoscritto pervenuto in redazione il 31-5-1967