RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SERGIO BRESSAN

Proprietà di media del campo elettromagnetico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 144-162

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__144_0>

PROPRIETÀ DI MEDIA DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO

SERGIO BRESSAN *)

Introduzione.

Sono ben note talune proprietà di media valide nella meccanica dei sistemi continui.

Poichè le equazioni generali del campo elettromagnetico si possono porre, in uno spaziotempo pseudoeuclideo, in forma analoga a quella della meccanica dei continui, viene spontanea l'idea di stabilire per esse delle analoghe proprietà di media. Tale è lo scopo del presente lavoro.

Esso non esaurisce naturalmente tutte le proprietà di media che possibilmente possono stabilirsi, tuttavia, già da quelle più avanti espresse, si può dedurre qualche interessante proprietà del campo elettromagnetico; tra l'altro, ad esempio, una speciale forma del principio di equipartizione dell'energia.

§ 1. Preliminari matematici.

In uno spazio quadridimensionale S_4 di metrica pseudoeuclidea:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_0^2 \tag{1}$$

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato nazionale per la matematica del C. N. R. .

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico — Università — Padova.

considero assegnato un tensore doppio rappresentato dalle 16 componenti $X^{\alpha\beta}$ rispetto al prescelto sistema di riferimento. Inoltre considero assegnato un vettore Y^{α} e suppongo valga ovunque la [1]):

$$\sum_{0}^{3}{}_{\beta}\, X^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = Y^{\alpha} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3). \tag{2}$$

Sia C_4 una regione dell'S_4 racchiusa dalla ipersuperficie Σ_3 e così costruita: nello spazio S_3 di coordinate $x_1\, x_2\, x_3$ considero la regione C_3 racchiusa dalla superficie σ. Fissati i valori x_0^1 e x_0^2 ($x_0^1 < x_0^2$), identifico C_4 coll'ipercilindro dello spazio pseudoeuclideo tetradimensionale già considerato, luogo del punto E proiettantesi ortogonalmente su S_3 in C_3 e avente coordinata x_0 soddisfacente a:

$$x_0^1 \leq x_0 \leq x_0^2 .$$

Ritengo assegnato su Σ_3 il vettore:

$$\lambda^{\alpha} = \sum_{0}^{3}{}_{\beta}\, X^{\alpha\beta}\, \nu_{\beta} \qquad (\text{su } \Sigma_3) \tag{3}$$

dove ν_{β} sono le componenti del versore della normale a Σ_3 pensato rivolto verso C_4 [2]).

---

[1]) Convengo che, salvo contrario avviso, gli indici greci, soggetti a sommatoria o no, varino da 0 a 3 e quelli latini da 1 a tre; inoltre in tale lavoro non saranno sottointese sommatorie (nemmeno quando un indice compare una volta in alto e una in basso).

[2]) Considero regioni C_4 di tipo cilindrico in quanto ciò è sufficiente per le applicazioni successive. Però i risultati dei §§ 1, 2, 3 rimangono validi anche per una classe più estesa di regioni dell'S_4. Basta infatti che nei punti del contorno Σ_3 dotati di piano tangente, tale piano formi coll'asse delle x_0 un angolo diverso da $\frac{\pi}{4}$. Infatti, se ciò non fosse, perderebbe significato la definizione di vettore della normale interna a Σ_3 data più avanti. Si osservi però che i risultati rimangono ancora validi se, a formare coll'asse x_0 un angolo di $\frac{\pi}{4}$, sono i piani tangenti a Σ_3 nei punti costituenti curve semplici appartenenti a detta superficie. Infatti essi si possono trascurare in quanto il contributo di dette curve, per il calcolo di un integrale esteso a Σ_3, è nullo.

Il fatto che la metrica sia pseudoeuclidea non comporta in questo caso delle difficoltà nel definire il suddetto versore. Infatti il contorno Σ_3 di C_4 consta delle due basi Σ^1 e Σ^2 appartenenti agli iperpiani $x_0 = x_0^1$ e $x_0 = x_0^2$ rispettivamente, e della superficie laterale Σ_1. Quest'ultima è il luogo del punto $E(P, x_0)$ con P su σ e $x_0^1 \leq x_0 \leq x_0^2$. L'equazione $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ rappresenti σ in S_3. Allora tale equazione assieme alla $x_0^1 \leq x_0 \leq x_0^2$ rappresenta Σ_1. Chiamo $g(x_0, x_1, x_2, x_3)$ la funzione definita su Σ_3 nel modo seguente:

$$g(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) & \text{su } \Sigma_1 \\ x_0 - x_0^1 & \text{su } \Sigma^1 \\ x_0^2 - x_0 & \text{su } \Sigma^2 \end{cases}$$

Allora le componenti del versore della normale interna a Σ_3 possono essere definite da:

$$\nu_\alpha = \frac{g'_\alpha}{\sqrt{\sum_1^3{}_i (g'_i)^2 - (g'_0)^2}}$$

Sulle basi risulta: $\nu_i = 0$ e $\nu_0 = 1$ su Σ^1, $\nu_0 = -1$ su Σ^2. Nel generico punto $E(P, x_0)$ di Σ_1, invece, si ha: $\nu_0 = 0$ e ν_i sono le componenti n_i del versore $\mathbf{n}$ normale a σ in P e orientato verso C_3.

Pongo inoltre:

$$b^{(\alpha)}_{\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3} = -\frac{1}{C_4}\left[\int_{C_4} x_0^{\eta_0} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3}\, Y^\alpha\, dC + \int_{\Sigma_3} x_0^{\eta_0} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3}\, \lambda^\alpha\, d\Sigma\right]$$
$$(\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

dove $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ sono interi positivi o nulli.

Pongo:

$$\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = n.$$

Moltiplico la (2) per $x_0^{\eta_0} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3}\, dC$, integro in C_4 e sommo membro a membro colla (3) moltiplicata per $x_0^{\eta_0} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3}\, d\Sigma$ e integrata su Σ_3. Con facili passaggi, per la formula di Green, si ottiene:

$$(4) \qquad \eta_0 \int\limits_{C_4} X^{\alpha 0} x_0^{\eta_0 - 1} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3} dC + \eta_1 \int\limits_{C_4} X^{\alpha 1} x_0^{\eta_0} x_1^{\eta_1 - 1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3} dC +$$

$$+ \eta_2 \int\limits_{C_4} X^{\alpha 2} x_0^{\eta_0} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2 - 1} x_3^{\eta_3} dC + \eta_3 \int\limits_{C_4} X^{\alpha 3} x_0^{\eta_0} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3 - 1} = C_4 \, b^{(\alpha)}_{\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3}$$

$$(\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

da cui, per il teorema della media, si ha:

$$(5) \qquad \overline{\eta_0 X^{\alpha 0} x_0^{\eta_0 - 1} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3}} + \overline{\eta_1 X^{\alpha 1} x_0^{\eta_0} x_1^{\eta_1 - 1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3}} +$$

$$+ \overline{\eta_2 X^{\alpha 2} x_0^{\eta_0} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2 - 1} x_0^{\eta_3}} + \overline{\eta_3 X^{\alpha 3} x_0^{\eta_0} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3 - 1}} = b^{(\alpha)}_{\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3}$$

$$(\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

dove il soprassegno indica il valor medio in C_4.

Perchè le (5) siano valide basta che le $X^{\alpha\beta}$ siano uniformi, finite e continue in C_4 insieme alle loro derivate parziali prime. Ma è facile vedere come esse si mantengano valide anche quando le $X^{\alpha\beta}$ presentano delle discontinuità di prima specie attraverso ipersuperfici Σ di C_4 (a cui possono corrispondere discontinuità di prima specie delle λ^α attraverso superfici (contorno di Σ) di Σ_3. Basta infatti, in tal caso, modificare le $b^{(\alpha)}_{\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3}$ aggiungendo al secondo membro i termini della discontinuità.

§ 2. Determinazione di infiniti valori medi.

Si constata che per $n > 1$ le (5) non sono sufficienti a determinare tutti i valori medi incogniti. Infatti gli $\overline{X^{\alpha\beta} x_0^{\eta'_0} x_1^{\eta'_1} x_2^{\eta'_2} x_3^{\eta'_3}}$ con $\eta'_0 + \eta'_1 + \eta'_2 + \eta'_3 = n - 1$ sono: $8 \sum_0^{n-1}{}_p (n-p)(n-p+1)$ mentre le quantità note $b^{(\alpha)}_{\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3}$, con $\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = n$, eventualmente non distinte (precisamente le quintuple di valori possibili per gli indici $\alpha, \eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3$) sono: $2 \cdot \sum_0^{n}{}_p (n-p+1)(n-p+2)$. Facendo la differenza fra i numeri trovati si vede appunto che il numero delle incognite è pari al numero delle equazioni solo per $n = 1$, mentre è positiva per $n > 1$. Per $n = 1$ i valori medi figuranti nelle

(5) sono quelli delle $X^{\alpha\beta}$ in C_4. Questi sono tutti determinabili mediante la formula:

$$(6) \qquad \overline{X^{\alpha\beta}} = -\frac{1}{C_4}\left[\int_{C_4} x_\beta\, Y^\alpha\, dC + \int_{\Sigma_3} x_\beta\, \lambda^\alpha\, d\Sigma\right] \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3).$$

Per n qualsiasi si può sempre determinare un certo numero di valori medi. Fra le (5) si trovano infatti le seguenti relazioni:

$$(7) \qquad \overline{X^{\alpha\beta}\, x_\beta^{n-1}} = \frac{1}{n}\, b^{(\alpha)}_{\beta,n} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$$

dove $b^{(\alpha)}_{\beta,n}$ è ciò che diventa $b^{(\alpha)}_{\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3}$ appunto per $\eta_\beta = n$ ($\eta_\gamma = 0$ per $\gamma \neq \beta$).

Se $X^{\alpha\beta}$ è simmetrico, dei numeri $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ se ne suppongano nulli due, uno uguale all'unità e l'ultimo uguale a $n-1$. Allora dalle (5), tenendo conto delle (7), si ottengono (oltre le stesse (7) anche le:

$$(8) \qquad \overline{X^{\gamma\gamma}\, x_\beta\, x_\gamma^{n-2}} = \frac{1}{n-1}\left[b^{(\gamma)}_{\beta,\gamma,n} - \frac{1}{n}\, b^{(\gamma)}_{\gamma,n}\right] \qquad (\gamma, \beta = 0, 1, 2, 3\,;\; n \geq 2)$$

con evidente significato dei simboli.

Nell'ipotesi che $X^{\alpha\beta}$ sia emisimmetrico si trovano, fra le (5), le:

$$(9) \qquad \overline{X^{\alpha\beta}\, x_\alpha^m\, x_\beta^{n-m-1}} = \frac{1}{n-m}\, b^{(\alpha)}_{\beta,n,m} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$$

col solito significato del simbolo $b^{(\alpha)}_{\beta,n,m}$ e dove m è un intero positivo o nullo colla sola condizione $0 \leq m \leq n$. Confrontando le (9) colle (7) si vede che l'emisimmetria non è essenziale solo per $m = 0$.

Dalle (9) si ricava un'indicazione sul valore massimo in C_4 del tensore fondamentale $X^{\alpha\beta}$. Si ha infatti:

$$(10) \qquad |X^{\alpha\beta}|_{\max} \geq \frac{C_4}{(n-m)\displaystyle\int_{C_4} |x^m\, x^{n-m-1}|\, dC}\, b^{(\alpha)}_{\beta,n,m}$$

$$(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3\,;\; n \geq 1\,;\; m < n).$$

Se il tensore non è emisimmetrico le formule analoghe a partire dalle (7) si possono ottenere dalle (10) ponendo in esse $m = 0$.

§ 3. Applicazione dei precedenti risultati al caso dei tensori elettromagnetici.

Considero il sistema di coordinate $x_1\, x_2\, x_3$ solidali allo spazio inerziale S_3 e la coordinata $x_0 = ct$ in modo che nell'ambito della relatività ristretta la metrica cronotopica abbia l'espressione:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_0^2 \,.$$

Siano D_i e H_i le componenti dei vettori spaziali induzione elettrica D e campo magnetico H, e siano B_i ed E_i quelle dei vettori spaziali induzione magnetica B e campo elettrico E. Pongo:

$$\begin{array}{llll} f^{0i} = D_i & f^{12} = H_3 & F^{0i} = E_i & F^{12} = B_3 \\ & f^{23} = H_1 & & F^{23} = B_1 \\ f^{\alpha\beta} + f^{\beta\alpha} = 0 & f^{31} = H_2 & F^{\alpha\beta} + F^{\beta\alpha} = 0 & F^{31} = B_2 \,. \end{array}$$

Indico inoltre con j^α la distribuzione elettrica totale. Se non c'è conduzione, j^0 è la densità elettrica ϱ e j^i sono le componenti della densità di corrente elettrica $\dfrac{1}{c}\,\varrho \mathbf{v}$.

Introduco il tensore $^*F^{\alpha\beta}$ coniugato del tensore $F^{\alpha\beta}$. Quindi:

$$^*F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,F_{\gamma\delta}$$

e le sue componenti sono legate a B ed E dalle:

$$\begin{array}{ll} ^*F^{0i} = B_i & ^*F^{12} = -\,E_3 \\ & ^*F^{23} = -\,E_1 \\ ^*F^{\alpha\beta} + {}^*F^{\beta\alpha} = 0 & ^*F^{31} = -\,E_2 \,. \end{array}$$

Le equazioni di Maxwell si possono allora scrivere:

$$(11)\qquad \sum_0^3{}_\beta f^{\alpha\beta}{}_{/\beta} = j^\alpha$$

$$(\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

$$(12)\qquad \sum_0^3{}_\beta {}^*F^{\alpha\beta}{}_{/\beta} = 0.$$

Considero nel cronotopo l'ipercilindro C_4 racchiuso dalla ipersuperficie Σ_3 e così costruito: nello spazio S_3 considero la regione C_3 di superficie σ. Fissati gli istanti t^1 e t^2 (con $t^1 \leq t^2$), identifico la regione C_4 coll'ipercilindro luogo del punto E proiettantesi ortogonalmente su S_3 in C_3 e avente coordinata x_0 soddisfacente a: $ct^1 \leq x_0 \leq ct^2$.

Ritengo assegnati su Σ_3 i vettori:

$$(13)\qquad \lambda^\alpha = \sum_0^3{}_\beta f^{\alpha\beta} \nu_\beta$$

$$(\text{su } \Sigma_3)$$

$$(14)\qquad \Lambda^\alpha = \sum_0^3{}_\beta {}^*F^{\alpha\beta} \nu_\beta$$

dove ν_β sono le componenti del versore della normale a Σ_3 pensato rivolto verso C_4.

Le (11), (12) e (13), (14) si ottengono dalle (2) e (3) ponendo una volta $X^{\alpha\beta} = f^{\alpha\beta}$ e $Y^\alpha = j^\alpha$, e un'altra $X^{\alpha\beta} = {}^*F^{\alpha\beta}$ e $Y^\alpha = 0$. Le (4) allora diventano:

$$(15)\qquad \eta_0 \int_{C_4} f^{\alpha 0}\, x_0^{\eta_0 - 1} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3}\, dC + \eta_1 \int_{C_4} f^{\alpha 1}\, x_0^{\eta_0} x_1^{\eta_1 - 1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3}\, dC +$$

$$+ \eta_2 \int_{C_4} f^{\alpha 2}\, x_0^{\eta_0} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2 - 1} x_3^{\eta_3}\, dC + \eta_3 \int_{C_4} f^{\alpha 3}\, x_0^{\eta_0} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3 - 1}\, dC =$$

$$= - \int_{C_4} x_0^{\eta_0} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3} j^\alpha\, dC - \int_{\Sigma_3} x_0^{\eta_0} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3} \lambda^\alpha\, d\Sigma$$

$$(16)\quad \eta_0 \int\limits_{C_4} {}^*F^{\alpha 0}\, x_0^{\eta_0 - 1}\, x_1^{\eta_1}\, x_2^{\eta_2}\, x_3^{\eta_3}\, dC + \eta_1 \int\limits_{C_4} {}^*F^{\alpha 1}\, x_0^{\eta_0}\, x_1^{\eta_1 - 1}\, x_2^{\eta_2}\, x_3^{\eta_3}\, dC +$$

$$+ \eta_2 \int\limits_{C_4} {}^*F^{\alpha 2}\, x_0^{\eta_0}\, x_1^{\eta_1}\, x_2^{\eta_2 - 1}\, x_3^{\eta_3}\, dC + \eta_3 \int\limits_{C_4} {}^*F^{\alpha 3}\, x_0^{\eta_0}\, x_1^{\eta_1}\, x_2^{\eta_2}\, x_3^{\eta_3 - 1}\, dC =$$

$$= - \int\limits_{\Sigma_3} x_0^{\eta_0}\, x_1^{\eta_1}\, x_2^{\eta_2}\, x_3^{\eta_3}\, \Lambda^\alpha\, d\Sigma \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

e le (5) danno:

$$(17)\quad \overline{\eta_0 f^{\alpha 0}\, x_0^{\eta_0 - 1}\, x_1^{\eta_1}\, x_2^{\eta_2}\, x_3^{\eta_3}} + \overline{\eta_1 f^{\alpha 1}\, x_0^{\eta_0}\, x_1^{\eta_1 - 1}\, x_2^{\eta_2}\, x_3^{\eta_3}} +$$

$$+ \overline{\eta_2 f^{\alpha 2}\, x_0^{\eta_0}\, x_1^{\eta_1}\, x_2^{\eta_2 - 1}\, x_3^{\eta_3}} + \overline{\eta_3 f^{\alpha 3}\, x_0^{\eta_0}\, x_1^{\eta_1}\, x_2^{\eta_2}\, x_3^{\eta_3 - 1}} = b^{(\alpha)}_{\eta_0 \eta_1 \eta_2 \eta_3}$$

$$(18)\quad \overline{\eta_0\, {}^*F^{\alpha 0}\, x_0^{\eta_0 - 1}\, x_1^{\eta_1}\, x_2^{\eta_2}\, x_3^{\eta_3}} + \overline{\eta_1\, {}^*F^{\alpha 1}\, x_0^{\eta_0}\, x_1^{\eta_1 - 1}\, x_2^{\eta_2}\, x_3^{\eta_3}} +$$

$$+ \overline{\eta_2\, {}^*F^{\alpha 2}\, x_0^{\eta_0}\, x_1^{\eta_1}\, x_2^{\eta_2 - 1}\, x_3^{\eta_3}} + \overline{\eta_3\, {}^*F^{\alpha 3}\, x_0^{\eta_0}\, x_1^{\eta_1}\, x_2^{\eta_2}\, x_3^{\eta_3 - 1}} = {}^*b^{(\alpha)}_{\eta_0 \eta_1 \eta_2 \eta_3}$$

$$(\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

con evidente significato dei simboli.

Per l'emisimmetria dei tensori $f^{\alpha\beta}$ e ${}^*F^{\alpha\beta}$ sono determinabili i seguenti valori medi che si ottengono dalla (9) colle solite sostituzioni. Si ha rispettivamente:

$$(19)\quad \overline{f^{\alpha\beta}\, x_\alpha^m\, x_\beta^{n-m-1}} = \frac{1}{n-m}\, b^{(\alpha)}_{\beta, n, m,}$$

$$(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$$

$$(20)\quad \overline{{}^*F^{\alpha\beta}\, x_\alpha^m\, x_\beta^{n-m-1}} = \frac{1}{n-m}\, {}^*b^{(\alpha)}_{\beta, n, m}\,.$$

Le limitazioni per i massimi moduli dei tensori $f^{\alpha\beta}$ e ${}^*F^{\alpha\beta}$ in C_4 si ottengono dalla (10):

$$(21)\quad |f^{\alpha\beta}|_{\max} \geq \frac{C_4}{(n-m)\displaystyle\int\limits_{C_4} |\, x_\alpha^m\, x_\beta^{n-m-1}\,|\, dC} \cdot |\, b^{(\alpha)}_{\beta, n, m}\,|$$

$$(22)\quad |\,{}^*F^{\alpha\beta}\,|_{\max} \geq \frac{C_4}{(n-m)\displaystyle\int\limits_{C_4} |\, x_\alpha^m\, x_\beta^{n-m-1}\,|\, dC} \cdot |\,{}^*b^{(\alpha)}_{\beta, n, m}\,|\,.$$

§ 4. Sul significato fisico dei precedenti risultati.

Nel caso considerato al paragrafo precedente, il contorno Σ_3 di C_4 consta delle due basi Σ^1 e Σ^2 appartenenti agli iperpiani $x_0 = ct^1$ e $x_0 = ct^2$ rispettivamente, e della superficie laterale Σ_1. Quest'ultima è il luogo del punto $E(P, x_0)$ con P su σ e $ct^1 \leq x_0 \leq ct^2$.

Inoltre (vedi § 1) si ha che sulle basi è $\nu_i = 0$; inoltre $\nu_0 = 1$ su Σ^1 e $\nu_0 = -1$ su Σ^2.

Nel generico punto $E(P, x_0)$ di Σ_1 $\nu_0 = 0$ e ν_i sono le componenti n_i del versore $\mathbf{n}$ normale a σ in P e orientato verso C_3.

Con queste ipotesi, dalle (13) e (14) si ottengono per λ^α e Λ^α le seguenti espressioni:

$$
(23)\quad
\begin{aligned}
\lambda^0 &= \sum_0^3{}_\alpha f^{0\alpha}\nu_\alpha = \sum_{1=\alpha}^3 D_\alpha \nu_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{su } \Sigma^1 \text{ e } \Sigma^2 \\ \mathbf{D}\times\mathbf{n} & \text{su } \Sigma_1 \end{cases} \\
\lambda^i &= \sum_0^3{}_\beta f^{i\beta}\nu_\beta = -D_i\nu_0 + (\mathbf{n}\wedge\mathbf{H})_i = \begin{cases} \mp D_i & \text{su } \Sigma^1 \text{ e } \Sigma^2 \\ & \text{rispettivamente} \\ (\mathbf{n}\wedge\mathbf{H})_i & \text{su } \Sigma_1 . \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
(24)\quad
\begin{aligned}
\Lambda^0 &= \sum_0^3{}_\alpha {}^*F^{0\alpha}\nu_\alpha = \sum_1^3{}_\alpha B_\alpha \nu_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{su } \Sigma^1 \text{ e } \Sigma^2 \\ \mathbf{B}\times\mathbf{n} & \text{su } \Sigma_1 \end{cases} \\
\Lambda^i &= \sum_0^3{}_\beta F^{i\beta}\nu_\beta = -B_i\nu_0 + (\mathbf{E}\wedge\mathbf{n})_i = \begin{cases} \mp B_i & \text{su } \Sigma^1 \text{ e } \Sigma^2 \\ & \text{rispettivamente} \\ (\mathbf{E}\wedge\mathbf{n})_i & \text{su } \Sigma_1 . \end{cases}
\end{aligned}
$$

Sostituendo i risultati così ottenuti nelle (19) e (20) rispettivamente, ricavo per le componenti di D e H le:

$$
(25)\quad
\begin{aligned}
&\overline{D_i\, x_0^m\, x_i^{n-m-1}} = -\frac{1}{(n-m)\,C_4}\left[\int_{C_4} x_0^m\, x_i^{n-m}\,\varrho\, dC + \int_{\Sigma_l} x_0^m\, x_i^{n-m}\,(\mathbf{D}\times\mathbf{n})\, d\Sigma\right] \\
&\overline{H_i\, x_{i+1}^m\, x_{i+2}^{n-m-1}} = -\frac{1}{(n-m)\,C_4}\left[\int_{C_4} x_{i+1}^m\, x_{i+2}^{n-m}\, j^{i+1}\, dC +\right.
\end{aligned}
$$

$$+\int_{\Sigma^2} x_{i+1}^m\, x_{i+2}^{n-m}\, D_{i+1}\, d\Sigma - \int_{\Sigma^1} x_{i+1}^m\, x_{i+2}^{n-m}\, D_{i+1}\, d\Sigma +$$

$$+\int_{\Sigma_l} x_{i+1}^m\, x_{i+2}^{n-m}\, (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H})_{i+1}\, d\Sigma \Bigg|$$

e per le componenti di B ed E le:

$$\overline{B_i\, x_0^m\, x_i^{n-m-1}} = -\frac{1}{(n-m)\, C_4}\int_{\Sigma_l} x_0^m\, x_i^{n-m}\, (\mathbf{B} \times \mathbf{n})\, d\Sigma$$

(26)
$$\overline{E_i\, x_{i+1}^m\, x_{i+2}^{n-m-1}} = \frac{1}{(n-m)\, C_4}\int_{\Sigma^2} x_{i+1}^m\, x_{i+2}^{n-m}\, B_{i+1}\, d\Sigma -$$

$$-\int_{\Sigma^1} x_{i+1}^m\, x_{i+2}^{n-m}\, B_{i+1}\, d\Sigma + \int_{\Sigma_l} x_{i+1}^m\, x_{i+2}^{n-m}\, (\mathbf{E} \wedge \mathbf{n})_{i+1}\, d\Sigma\,.$$

Le (25) e le (26) permettono di scrivere immediatamente i limiti inferiori per i massimi in C_4 dei moduli di E_i, H_i, D_i, B_i.

I soli elementi elettromagnetici da cui dipende il limite inferiore per $|D_i|_{\max}$ sono la distribuzione elettrica in C_4 e i valori su Σ_1 della componente normale di $\mathbf{D}$; quelli da cui dipende il limite inferiore per $|H_i|_{\max}$ sono la distribuzione di corrente elettrica in C_4, i valori di D_{i+1} sulle basi e il valore di $(\mathbf{n} \wedge \mathbf{H})_{i+1}$ su Σ_1.

Si ottiene infatti:

$$|D_i|_{\max} \geq -\frac{1}{(n-m)\int_{C_4} |x_0^m\, x_i^{n-m-1}|\, dC} \cdot \Bigg| \int_{C_4} x_0^m\, x_i^{n-m}\, \varrho\, dC +$$

(27)
$$+\int_{\Sigma_l} x_0^m\, x_i^{n-m}\, \mathbf{D} \times \mathbf{n}\, d\Sigma \Bigg|$$

$$|H_i|_{\max} \geq -\frac{1}{(n-m)\int_{C_4} |x_{i+1}^m\, x_{i+2}^{n-m-1}|\, dC} \cdot \Bigg| \int_{C_4} x_{i+1}^m\, x_{i+2}^{n-m} j^{i+1} dC +$$

$$+\int_{\Sigma^2} x_{i+1}^m x_{i+2}^{n-m} D_{i+1}\, d\Sigma - \int_{\Sigma^1} x_{i+1}^m x_{i+2}^{n-m} D_{i+1}\, d\Sigma +$$

$$+\int_{\Sigma_l} x_{i+1}^m x_{i+2}^{n-m} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H})_{i+1}\, d\Sigma \Bigg| .$$

Il limite inferiore per $|B_i|_{\max}$ dipende, invece, dai soli valori della componente normale di $\mathbf{B}$ su Σ_1; quello per $|E_i|_{\max}$ dipende dai valori di B_{i+1} sulle basi e dal valore di $(\mathbf{E} \wedge \mathbf{n})$ sulla superficie laterale. Si ha:

$$|B_i|_{\max} \geq - \frac{1}{(n-m)\int_{C_4} |x_0^m x_i^{n-m-1}|\, dC} \cdot \left| \int_{\Sigma_l} x_0^m x_i^{n-m}\, \mathbf{B} \times \mathbf{n}\, d\Sigma \right|$$

$$(28) \qquad |E_i|_{\max} \geq \frac{1}{(n-m)\int_{C_4} |x_{i+1}^m x_{i+2}^{n-m-1}|\, dC} \cdot \Bigg| \int_{\Sigma^2} x_{i+1}^m x_{i+2}^{n-m} B_{i+1}\, d\Sigma -$$

$$- \int_{\Sigma^1} x_{i+1}^m x_{i+2}^{n-m} B_{i+1}\, d\Sigma + \int_{\Sigma_l} x_{i+1}^m x_{i+2}^{n-m} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{n})_{i+1}\, d\Sigma \Bigg| .$$

§ 5. Valori medi in regioni puramente spaziali.

Poichè C_4 è cilindrico, gli integrali estesi a C_4 e a Σ_1 si possono esprimere mediante integrali fra x_0^1 e x_0^2 di integrali (dipendenti da x_0) estesi al campo C_3 e rispettivamente al suo contorno. Dividendo ambo i membri per $x_0^2 - x_0^1$ e facendo poi tendere x_0^1 e x_0^2 ad un comune valore x_0 (con $x_0^1 \leq x_0 \leq x_0^2$) e indicando il valor medio in C_3 con due soprassegni, dalle (25) e (26) (dividendo poi ambo i membri per il comune fattore x_0^m) si ottengono rispettivamente le:

$$(29) \qquad \overline{\overline{D_i x_i^{n-m-1}}} = - \frac{1}{(n-m)\, C_3} \left[\int_{C_3} x_i^{n-m} \varrho\, dC + \int_{\sigma} x_i^{n-m} (\mathbf{D} \times \mathbf{n})\, d\sigma \right]$$

$$\overline{\overline{H_i\, x_{i+1}^m\, x_{i+2}^{n-m-1}}} = -\frac{1}{(n-m)\, C_3}\left[\int_{C_3} x_{i+1}^m\, x_{i+2}^{n-m} j^{i+1}\, dC + \right. \tag{29}$$

$$\left. + \frac{1}{c}\int_{C_3} x_{i+1}^m\, x_{i+2}^{n-m}\, \frac{\partial D_{i+1}}{\partial t}\, dC + \int_\sigma x_{i+1}^m\, x_{i+2}^{n-m}\, (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H})_{i+1}\, d\sigma\right]$$

$$\overline{\overline{B_i\, x_i^{n-m-1}}} = -\frac{1}{(n-m)\, C_3}\int_\sigma x_i^{n-m}\, \mathbf{B} \times \mathbf{n}\, d\sigma$$

$$\overline{\overline{E_i\, x_{i-1}^m\, x_{i+2}^{n-m-1}}} = \frac{1}{(n-m)\, C_3}\left[\frac{1}{2}\int_{C_3} x_{i+1}^m\, x_{i+2}^{n-m}\, \frac{\partial B_{i+1}}{\partial t}\, dC + \right. \tag{30}$$

$$\left. + \int_\sigma x_{i+1}^m\, x_{i+2}^{n-m}\, (\mathbf{E} \wedge \mathbf{n})_{i+1}\, d\sigma\right]$$

ove tutte le funzioni che eventualmente dipendono dal tempo (ϱ, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$, ...) si intendono calcolate per il valore considerato di x_0.

Con un procedimento analogo a quello del paragrafo precedente, dalle (29) e (30) si ottengono immediatamente dei limiti inferiori per i massimi in C_3 dei moduli di D_i, H_i, B_i ed E_i rispettivamente.

Precisamente si ha:

$$|D_i|\max \geq -\frac{1}{(n-m)\int_{C_3} |x_i^{n-m-1}|\, dC}\cdot\left|\int_{C_3} x_i^{n-m}\, \varrho\, dC + \right.$$

$$\left. + \int_\sigma x_i^{n-m}\, (\mathbf{D} \times \mathbf{n})\, d\sigma\right|$$

(31)

$$|H_i|_{\max} \geq -\frac{1}{(n-m)\int_{C_3} | x_{i+1}^m\, x_{i+2}^{n-m-1} j^{i+1} dC}\cdot\left|\int_{C_3} x_{i+1}^m\, x_{i+2}^{n-m} j^{i+1}\, dC + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c}\int_{C_3} x_{i+1}^m\, x_{i+2}^{n-m}\, \frac{\partial D_{i+1}}{\partial t}\, dC + \int_\sigma x_{i+1}^m\, x_{i+2}^{n-m}\, (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H})_{i+1}\, d\sigma\right|$$

$$| B_i |_{\max} \geq - \frac{1}{(n-m)\int\limits_{C_3} | x_i^{n-m-1} | \, dC} \cdot \left| \int\limits_{\sigma} x_i^{n-m} \mathbf{B} \times \mathbf{n} \, d\sigma \right|$$

(32)

$$| E_i |_{\max} \geq \frac{1}{(n-m)\int\limits_{C_3} | x_{i+1}^m x_{i-2}^{n-m-1} | \, dC} \cdot \left| \frac{1}{c} \int\limits_{C_3} x_{i+1}^m x_{i+2}^{n-m} \frac{\partial B_{i+1}}{\partial t} \, dC + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\sigma} x_{i+1}^m x_{i+2}^{n-m} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{n})_{i+1} \, d\sigma \right| .$$

Dunque nel considerato caso puramente spaziale, le limitazioni per i massimi moduli di D_i e B_i non presentano sostanziali novità rispetto al caso quadridimensionale, mentre la limitazione per i massimi moduli di H_i e E_i si esprimono anche mediante i valori della derivata temporale di D_{i+1} e B_{i+1}, rispettivamente, in tutto il campo C_3.

§ 6. Conseguenze di una particolare condizione al contorno. Formule fondamentali comprese fra le (15) e le (16).

Considero le (15) e (16) e ripeto il procedimento del paragrafo precedente. Esprimo, cioè gli integrali estesi a C_4 e Σ_3 mediante integrali fra x_0^1 e x_0^2 di integrali (dipendenti da x_0) estesi al campo C_3 e al suo contorno σ. Divido quindi ambo i membri delle (15) e (16) così trasformate per $x_0^2 - x_0^1$ e faccio tendere x_0^1 e x_0^2 a x_0 (con $x_0^1 \leq x_0 \leq x_0^2$). Eseguite delle facili semplificazioni si ottiene in definitiva :

$$\eta_1 \int\limits_{C_3} x_1^{\eta_1 - 1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3} f^{\alpha 1} \, dC + \eta_2 \int\limits_{C_3} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2 - 1} x_3^{\eta_3} f^{\alpha 2} \, dC +$$

(33)

$$+ \eta_3 \int\limits_{C_3} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3 - 1} f^{\alpha 3} \, dC = - \int\limits_{C_3} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3} j^{\alpha} \, dC +$$

$$+ \frac{1}{c} \int\limits_{C_3} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3} \frac{\partial f^{\alpha 0}}{\partial t} \, dC - \int\limits_{\sigma} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta} \sum_1^3{}_i f^{\alpha i} n_i \, d\sigma$$

$$(34)\qquad \eta_1 \int_{C_3} x_1^{\eta_1 - 1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3}\, {}^*F^{\alpha 1}\, dC + \eta_2 \int_{C_3} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2 - 1} x_3^{\eta_3}\, {}^*F^{\alpha 2}\, dC +$$

$$+ \eta_3 \int x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3 - 1}\, {}^*F^{\alpha 3} dC = \frac{1}{c} \int_{C_3} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3} \frac{\partial\, {}^*F^{\alpha 0}}{\partial t}\, dC - \int_\sigma x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3} \sum_{1}^{3}{}_i\, {}^*F^{\alpha i}\, n_i\, d\sigma$$

$$(\alpha = 0, 1, 2, 3).$$

Sia n un intero positivo. Pongo $\eta_i = n\ (\eta_r = 0$ per $r \neq i)$ nelle (33) e (34). Ottengo rispettivamente:

$$(35)\qquad n \int_{C_3} x_i^{n-1} f^{\alpha i}\, dC = - \int_{C_3} x_i^n j^\alpha\, dC + \frac{1}{c} \int_{C_3} x_i^n \frac{\partial f^{\alpha 0}}{\partial t}\, dC - \int_\sigma x_i^n \sum_{1}^{3}{}_r f^{\alpha r} n_r\, d\sigma$$

$$(36)\qquad n \int_{C_3} x_i^{n-1}\, {}^*F^{\alpha i}\, dC = \frac{1}{c} \int_{C_3} x_i^n \frac{\partial\, {}^*F^{\alpha 0}}{\partial t}\, dC - \int_\sigma x_i^n \sum_{1}^{3}{}_r\, {}^*F^{\alpha r}\, n_r\, d\sigma$$

$$(\alpha = 0, 1, 2, 3).$$

Per $\alpha = 0$ dalle (35) e (36) si ha (per esempio nell'ipotesi che non vi siano correnti di conduzione):

$$(37)\qquad n \int_{C_3} D_i x_i^{n-1}\, dC + \int_{C_3} x_i^n \varrho\, dC = - \int_\sigma x_i^n\, \mathbf{D} \times \mathbf{n}\, d\sigma$$

$$(38)\qquad n \int_{C_3} B_i x_i^{n-1} dC = - \int_\sigma x_i^n\, \mathbf{B} \times \mathbf{n}\, d\sigma\,.$$

La (37) [(38)] dice che, se è nulla la componente normale di $\mathbf{D}$ [$\mathbf{B}$] su una superficie chiusa e convessa σ, è identicamente nullo, in ogni sezione normale s a $x_r\ (r = 1, 2, 3)$ del volume racchiuso da σ, il seguente integrale:

$$\int_s (D_r + x_r\, \varrho)\, ds \qquad \left[\int_s B_r\, ds\right]$$ [3]

---

[3] La condizione che $\mathbf{B}$ abbia componente normale nulla su una superficie chiusa e convessa è richiesta in alcune realizzazioni della tecnica. Per esempio nella « propagazione guidata » le « cavità risonanti » devono essere costruite in modo da soddisfarla. Vedi: Jones, *Teoria dell'elettromagnetismo*. Toraldo di Francia. *Onde elettromagnetiche*.

cioè in ogni sezione normale all'asse x_r è nullo, in media, $D_r - x_r\,\varrho$ e la componente su x_r di **B**.

Per $\alpha = j\ (j = 1, 2, 3)$ le (35) e (36) danno rispettivamente:

$$(39)\quad n\int_{C_3} x_i^{n-1}\, f^{ji}\, dC = -\int_{C_3} x_i^n\, j^j\, dC - \int_\sigma x_i^n \sum_1^3{}_r f^{jr}\, n_r\, d\sigma + \frac{1}{c}\int_{C_3} x_i^n \frac{\partial f^{j0}}{\partial t} dC$$

$$(40)\qquad n\int_{C_3} x_i^{n-1}\, {}^*F^{ji}\, dC = \frac{1}{c}\int_{C_3} x_i^n\, \frac{\partial\, {}^*F^{j0}}{\partial t}\, dC - \int_\sigma x_i^n\, \Sigma_r\, {}^*F^{jr}\, n_r\, d\sigma.$$

Se nelle (39) e (40) si fa $j = i = 1$ si ha (nell'ipotesi che non vi siano correnti di conduzione):

$$(41)\qquad \frac{1}{c}\int_{C_3} x_1^n\, \varrho v_1\, dC + \int_\sigma x_1^n\, (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H})_1\, d\sigma + \frac{1}{c}\int_{C_3} x_1^n\, \frac{\partial D_1}{\partial t}\, dC = 0$$

$$(42)\qquad \frac{1}{c}\int_{C_3} x_1^n\, \frac{\partial B_1}{\partial t}\, dC - \int_\sigma x_1^n\, (\mathbf{n} \wedge \mathbf{E})_1\, d\sigma = 0$$

Nel caso $n = 0$ le (37) e le (38) danno le ben note relazioni:

$$(43)\qquad \int_{C_3} \varrho\, dC + \int_\sigma \mathbf{D} \times \mathbf{n}\, d\sigma = 0$$

$$(44)\qquad \int_\sigma \mathbf{B} \times \mathbf{n}\, d\sigma = 0.$$

Mentre le (41) e (42) diventano:

$$(45)\qquad \frac{1}{c}\int_{C_3} \varrho v_1\, dC + \int_\sigma (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H})_1\, d\sigma + \frac{1}{c}\int_\sigma \frac{\partial D_1}{\partial t}\, dC = 0$$

$$(46)\qquad \int_{C_3} \frac{\partial B_1}{\partial t}\, dC - \int_\sigma (\mathbf{n} \wedge \mathbf{E})_1\, d\sigma = 0.$$

Nel caso $n = 1$ le (37) e (38) diventano:

$$\int_{C_3} D_i \, dC + \int_{C_3} x_i \varrho \, dC = -\int_\sigma x_i (\mathbf{D} \times \mathbf{n}) \, d\sigma \tag{47}$$

$$\int_{C_3} B_i \, dC = -\int_\sigma x_i (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) \, d\sigma \tag{48}$$

e le (41) e (42) diventano:

$$\frac{1}{c}\int_{C_3} x_1 \varrho v_1 \, dC + \int_\sigma x_1 (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H})_1 \, d\sigma + \frac{1}{c}\int_{C_3} x_1 \frac{\partial D_1}{\partial t} \, dC = 0 \tag{49}$$

$$\frac{1}{c}\int_{C_3} x_1 \frac{\partial B_1}{\partial t} dC - \int_\sigma x_1 (\mathbf{n} \wedge \mathbf{E})_1 \, d\sigma = 0. \tag{50}$$

Tenendo conto delle analoghe delle (49) e (50) si può scrivere vettorialmente:

$$\frac{1}{c}\int_{C_3} OP \times \left(\varrho \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) dC + \int_\sigma OP \times \mathbf{n} \wedge \mathbf{H} \, d\sigma = 0 \tag{51}$$

$$\frac{1}{c}\int_{C_3} OP \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, dC - \int_\sigma OP \times \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} \, d\sigma = 0. \tag{52}$$

§ 7. Caso del tensore energetico del campo elettromagnetico nel microcosmo. Un aspetto del principio di equipartizione dell'energia elettromagnetica.

Nel microcosmo il campo elettromagnetico è rappresentato dal tensore emisimmetrico $F^{\alpha\beta}$ definito da:

$$F^{0i} = E_i \qquad F^{23} = H_1 \qquad F^{31} = H_2$$

$$F^{\alpha\beta} + F^{\beta\alpha} = 0 \qquad F^{12} = H_3$$

e dal vettore j^β definito da: $j^0 = \varrho$ e $j^i = \varrho \dfrac{v^i}{c}$.

Si consideri la consueta espressione del tensore energetico $E^{\alpha\beta}$:

$$E^{\alpha\beta} = -\sum_0^3{}_\gamma F^\alpha{}_\gamma F^{\gamma\beta} - \frac{1}{4}\sum_0^3{}_{\gamma\delta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta} g^{\alpha\beta}$$

dove $g^{\alpha\beta}$ è il tensore fondamentale che nel nostro caso vale:

$$g^{00} = -1 \qquad g^{rs} = \delta^{rs} \qquad g^{0i} = g^{i0} = 0 \qquad (i, r, s = 1, 2, 3).$$

Le componenti di $E^{\alpha\beta}$ sono legate a $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ dalle:

$$E^{00} = \frac{1}{2}(E^2 + H^2) = W \qquad E^{0i} = (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})_i$$

$$E^{ik} = \frac{1}{2}\{(E^2 + H^2)(-g^{ik}) - 2E_i E_k - 2H_i H_k)\}.$$

Considero inoltre il vettore K^α definito da:

$$K^\alpha = \sum_0^3{}_\beta F^\alpha{}_\beta j^\beta.$$

Si hanno per le componenti di K^α le seguenti espressioni:

$$K^0 = \frac{1}{c}\mathbf{E} \times \varrho\, \mathbf{v} = \frac{1}{c}\Pi$$

$$K^i = \varrho\, E_i + \frac{\varrho}{c}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{H})_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Sia data al solito la regione cilindrica C_4 di contorno Σ_3.

Considero valida in C_4 l'equazione:

$$(53) \qquad K^\alpha = -\sum_0^3{}_\beta E^{\alpha\beta}{}_{/\beta} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

e ritengo assegnato su Σ_3 il vettore λ^α dato da:

$$(54) \qquad \lambda^\alpha = \sum_0^3{}_\beta E^{\alpha\beta} \nu_\beta \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3).$$

Col solito procedimento ottengo le seguenti equazioni valide in una regione puramente spaziale C_3 di contorno σ:

$$
(55) \quad \eta_1 \int_{C_3} x_1^{\eta_1-1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3} E^{\alpha 1} dC + \eta_2 \int_{C_3} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2-1} x_3^{\eta_3} E^{\alpha 2} dC +
$$

$$
+ \eta_3 \int_{C_3} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3-1} E^{\alpha_3} dC - \int_{C_3} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3} K^\alpha dC -
$$

$$
- \frac{1}{c} \int_{C_3} x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3} \frac{\partial E^{\alpha 0}}{\partial t} dC + \sum_1^3{}_r \int_\sigma x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} x_3^{\eta_3} E^{\alpha r} n_r \, d\sigma = 0 \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3)
$$

dove al solito gli η_i sono interi positivi o nulli. Pongo $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = n$.

Ponendo nella (55) $n = 0$ si ottiene:

$$
(56) \quad - \int_{C_3} K^\alpha dC - \frac{1}{c} \int_{C_3} \frac{\partial E^{\alpha 0}}{\partial t} dC + \sum_1^3{}_i \int_\sigma E^{\alpha i} n_i \, d\sigma = 0 \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3)
$$

che nel caso $\alpha = 0$ rappresenta, com'è noto, il principio di conservazione dell'energia elettromagnetica.

Il caso $\alpha = i \; (i = 1, 2, 3)$ dà invece:

$$
(57) \quad - \int_{C_3} \left[E_i \varrho + \frac{\varrho}{c} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{H})_i \right] dC - \frac{1}{c} \int_{C_3} \frac{\partial (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})_i}{\partial t} dC -
$$

$$
- \sum_3^1{}_k \int_\sigma p^{ik} n_k \, d\sigma = 0
$$

dove $-p^{ik}$ è il tensore di Maxwell che ha la seguente espressione:

$$
- p^{ik} = \frac{1}{2} \{ (E^2 + H^2) g^{ik} - 2E^i E^k - 2H^i H^k \} \qquad (i, k = 1, 2, 3).
$$

Con $n = 1$ le (55) diventano:

$$\int_{C_3} E^{\alpha i}\, dC - \int_{C_3} x_i K^\alpha\, dC - \frac{1}{c}\int_{C_3} x_i \frac{\partial E^{\alpha 0}}{\partial t}\, dC + \sum_1^3{}_r \int_\sigma x_i E^{\alpha r} n_r\, d\sigma = 0. \tag{58}$$

$$(\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

Ponendo $\alpha = i\,(i = 1, 2, 3)$ nella (58), si ottiene:

$$-\int_{C_3} W\, dC - \int_{C_3} (E_k^2 + H_k^2)\, dC - \int_{C_3} x_k \left[F_k + \frac{\partial\,(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})_k}{\partial t}\right] dC - \tag{59}$$

$$- \int_\sigma x_k [E_k (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) + H_k (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) + W n_k]\, d\sigma = 0.$$

Dalla (59) si deduce che l'espressione:

$$A = -\frac{1}{C_3}\left[\int_{C_3} (E_k^2 + H_k^2)\, dC + \int_{C_3} x_k \left[F_k + \frac{\partial\,(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})_k}{\partial t}\right] dC + \right.$$

$$\left. + \int_\sigma x_k\, [E_k (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) + H_k (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) + W n_k]\, d\sigma\right]$$

esprime, per ogni determinazione di $k\,(k = 1, 2, 3)$, il valor medio in C_3 dell'energia elettromagnetica e *il suo valore non dipende pertanto da k.*

Ciò si può interpretare come una forma del principio di equipartizione dell'energia nel caso elettromagnetico.

Manoscrito pervenuto in redazione il 31 maggio 1967