

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCO CHERSI

**Sul prolungamento d'una misura definita
su un prodotto infinito**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 39 (1967), p. 136-143

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__136_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SUL PROLUNGAMENTO D'UNA MISURA DEFINITA SU UN PRODOTTO INFINITO

FRANCO CHERSI *)

SUMMARY - Let T be an infinite, non countable index set; for each $t \in T$ let (X_t, \mathcal{A}_t) be a measurable space. Let $\Omega = \prod_{t \in T} X_t$ and \mathcal{A} be the product σ -algebra of the \mathcal{A}_t 's; let μ be a finite, non negative measure on \mathcal{A} .

Let us call «tube» a subset of Ω of the form $F = \bigcap_{t \in T} p_t^{-1}(A_t)$, with $A_t \in \mathcal{A}_t$ and no other condition; let \mathcal{F} be the class of all tubes. Then μ induces a unique finitely additive, non negative function on the algebra generated by \mathcal{F}^σ , which coincides with the outer measure μ^* on \mathcal{F}^σ .

Introduzione.

In [2] A. Meyer ha ottenuto il seguente risultato.

Siano: T un insieme d'indici di qualunque cardinalità, (X, \mathcal{B}) uno spazio misurabile (cioè \mathcal{B} sia una σ -algebra di parti di X), P una probabilità sullo spazio misurabile prodotto (X^T, \mathcal{B}^T) . Sia \mathcal{K} una sottoclasse compatta di \mathcal{B} : cioè, se una famiglia numerabile d'insiemi di \mathcal{K} ha intersezione vuota, essa contiene una sottofamiglia finita avente l'intersezione vuota. In queste ipotesi esiste un prolungamento \bar{P} di P tale che siano misurabili tutti gli insiemi della forma $\bigcap_{t \in T} p_t^{-1}(K_t)$, con $K_t \in \mathcal{K}$, e che su questi \bar{P} coincida con la misura esterna indotta da P .

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato nazionale per la Matematica del C.N.R..

Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica, Università, Pisa.

Nella presente nota si esamina ciò che si può ottenere senza l'ipotesi della compattezza.

Precisamente: per ogni $t \in T$ sia (X_t, \mathcal{A}_t) uno spazio misurabile, e sia \mathcal{A} la σ -algebra prodotto delle \mathcal{A}_t in Ω , prodotto degli X_t ; sia μ una misura ≥ 0 , finita, su \mathcal{A} . Allora è definibile in modo unico una funzione ≥ 0 che coincida con la misura esterna μ^* sulla classe degli insiemi $\bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(A_t)$, $A_t \in \mathcal{A}_t$, e delle loro unioni numerabili, e che sia additiva sull'anello generato da tale classe.

Resta aperto il problema del prolungamento σ -additivo ad un σ -anello; forse i metodi usati nella presente nota potranno essere utili anche in questo senso.

Ringrazio il Prof. G. Letta, il cui aiuto mi ha permesso di migliorare sostanzialmente lo scritto primitivo; in particolare, a lui è dovuto l'importante lemma 2.

————— . —————

Sia T un insieme d'indici, di cardinalità qualunque (ciò che segue ha interesse qualora T sia non numerabile). Per ogni $t \in T$ sia (X_t, \mathcal{A}_t) uno spazio misurabile e sia (Ω, \mathcal{A}) lo spazio misurabile prodotto della famiglia $(X_t, \mathcal{A}_t)_{t \in T}$.

Per ogni $t \in T$ denoteremo con pr_t la proiezione canonica di Ω su X_t , e per ogni parte S di T indicheremo con pr_S la proiezione canonica di Ω sul prodotto parziale $\Omega_S = \prod_{t \in S} X_t$.

Chiameremo S -cilindro di Ω ogni parte di Ω della forma

$$pr_S^{-1}(B), \text{ con } B \subset \Omega_S.$$

Denoteremo con \mathcal{C}_S l'insieme di tutti gli S -cilindri di Ω ; \mathcal{C}_S è stabile per l'unione e per l'intersezione di qualsiasi cardinalità, perchè tale è l'insieme di tutte le parti di Ω_S .

Per ogni parte E di Ω , sia $C_S(E)$ il minimo S -cilindro di Ω contenente E , ossia l'intersezione di tutti gli S -cilindri che contengono E (c'è sempre almeno un tale S -cilindro: Ω stesso).

Se S, U sono parti di T con $S \subset U$, ogni S -cilindro è anche un U -cilindro, e quindi per ogni $E \subset \Omega$ si ha

$$(1) \quad C_U(E) \subset C_S(E).$$

Per ogni famiglia $(E_i)_{i \in I}$ di parti di Ω valgono inoltre le relazioni

$$(2) \quad C_S(\bigcup_{i \in I} E_i) = \bigcup_{i \in I} C_S(E_i)$$

(perchè C_S è stabile per l'unione di qualsiasi cardinalità), e

$$(3) \quad C_S(\bigcap_{i \in I} E_i) \subset \bigcap_{i \in I} C_S(E_i).$$

Nella (3) non si può, in generale, mettere il segno d'eguaglianza. Esempio: siano $t \in (T - S)$, A_1, A_2 parti non vuote di X_t con $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $E_i = pr_t^{-1}(A_i)$ ($i = 1, 2$); allora risulta: $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $C_S(E_1 \cap E_2) = \emptyset$, ma $C_S(E_i) = \Omega$ ($i = 1, 2$).

Diremo « tubo » ogni parte di Ω della forma

$$(4) \quad \prod_{t \in T} A_t = \bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(A_t),$$

con $A_t \in \mathcal{A}_t$ per ogni $t \in T$ (il nome « tubo » è suggerito dal caso $\Omega = X^T$, in cui la scrittura (4) rappresenta l'insieme delle funzioni $\omega: T \rightarrow X$ che soddisfano le condizioni $\omega(t) \in A_t$ per $t \in T$).

Sia \mathcal{F} l'insieme di tutti i tubi, \mathcal{F}^σ l'insieme delle unioni numerabili di elementi di \mathcal{F} . Evidentemente \mathcal{F} è stabile per l'intersezione numerabile, contiene Ω e l'insieme vuoto; \mathcal{F}^σ è stabile per l'unione numerabile e l'intersezione finita; in particolare \mathcal{F}^σ è un reticolo.

Osserviamo che \mathcal{F} contiene la classe dei rettangoli, e che è contenuto in \mathcal{A} se, e solo se, T è numerabile (a meno di casi banali).

Per ogni tubo non vuoto $E = \bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(A_t)$, $A_t \in \mathcal{A}_t$, e per ogni parte S di T risulta

$$(5) \quad C_S(E) = \bigcap_{t \in S} pr_t^{-1}(A_t)$$

e quindi, se S è numerabile, $C_S(E) \in \mathcal{A}$.

LEMMA 1. Se E, F sono tubi ed è $E \cap F \neq \emptyset$, per ogni parte S di T risulta

$$(6) \quad C_S(E \cap F) = C_S(E) \cap C_S(F).$$

Se invece E, F sono tubi con $E \cap F = \emptyset$, esiste un $t \in T$ tale che sia

$$(7) \quad C_t(E) \cap C_t(F) = \emptyset.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $E = \bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(A_t)$, $F = \bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(B_t)$, con $A_t, B_t \in \mathcal{A}_t$. Allora si ha

$$E \cap F = \bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(A_t \cap B_t);$$

quindi nel primo caso

$$\begin{aligned} C_S(E \cap F) &= \bigcap_{t \in S} pr_t^{-1}(A_t \cap B_t) = \\ &= \left(\bigcap_{t \in S} pr_t^{-1}(A_t) \right) \cap \left(\bigcap_{t \in S} pr_t^{-1}(B_t) \right) = C_S(E) \cap C_S(F). \end{aligned}$$

Nel secondo caso, se uno almeno di E ed F è vuoto, la (7) è vera per ogni t . Se ambedue sono non vuoti, esiste però un t per cui sia $A_t \cap B_t = \emptyset$, ed è

$$C_t(E) \cap C_t(F) = pr_t^{-1}(A_t) \cap pr_t^{-1}(B_t) = pr_t^{-1}(A_t \cap B_t).$$

LEMMA 2. Se E, F appartengono ad \mathcal{F}^σ , esiste una parte numerabile S_0 di T tale che, per ogni parte S di T contenente S_0 , valga l'eguaglianza (6).

DIMOSTRAZIONE. Siano $E = \bigcup_{i \in I} E_i$, $F = \bigcup_{j \in J} F_j$, con I, J insiemi numerabili d'indici ed E_i, F_j elementi di \mathcal{F} . Poniamo

$$L = I \times J, L_0 = \{(i, j) \in L : E_i \cap F_j = \emptyset\}.$$

Qualunque sia la parte S di T , dall'eguaglianza (2) e dal lemma 1 derivano le seguenti:

$$(8) \quad C_S(E) \cap C_S(F) = \left(\bigcup_{i \in I} C_S(E_i) \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} C_S(F_j) \right) = \bigcup_{(i, j) \in L} (C_S(E_i) \cap C_S(F_j))$$

$$\begin{aligned} (9) \quad C_S(E \cap F) &= C_S\left(\bigcup_{(i, j) \in L - L_0} (E_i \cap F_j)\right) = \\ &= \bigcup_{(i, j) \in L - L_0} C_S(E_i \cap F_j) = \bigcup_{(i, j) \in L - L_0} (C_S(E_i) \cap C_S(F_j)). \end{aligned}$$

Per ogni $(i, j) \in L_0$ si ha $E_i \cap F_j = \emptyset$, quindi (lemma 1) esiste un $t = t(i, j)$ tale che sia

$$(10) \quad C_t(E_i) \cap C_t(F_j) = \emptyset,$$

(grazie all'assioma della scelta, supponiamo che $t(i, j)$ sia una funzione univoca).

Poniamo $S_0 = \{t(i, j) : (i, j) \in L_0\}$; S_0 è numerabile. Se S è una parte di T contenente S_0 , dalle relazioni (1) e (10) segue

$$C_S(E_i) \cap C_S(F_j) = \emptyset \text{ per ogni } (i, j) \in L_0;$$

quindi dalle eguaglianze (8) e (9) segue la (6).

Ricordiamo che, per ogni $A \in \mathcal{A}$, esiste una parte numerabile S di T tale che A sia un S -cilindro (vedi per es. [1], 38.2).

Sia ora μ una misura ≥ 0 (non necessariamente finita) su \mathcal{A} , μ^* la misura esterna indotta da μ sull'insieme $\mathcal{P}(\Omega)$ di tutte le parti di Ω . Allora per ogni $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ esiste un $A \in \mathcal{A}$ tale che sia

$$(11) \quad E \subset A, \quad \mu^*(E) = \mu(A).$$

Se $\mu^*(E) = +\infty$, la (11) è ovvia; altrimenti, per ogni intero positivo n esiste un $A_n \in \mathcal{A}$ tale che sia $E \subset A_n$ e

$$\mu^*(E) \leq \mu(A_n) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{n}:$$

basta allora prendere $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

LEMMA 3. Per ogni $E \in \mathcal{F}^\sigma$ e per ogni parte numerabile S di T , risulta $C_S(E) \in \mathcal{A}$.

Inoltre, se μ è una misura ≥ 0 su \mathcal{A} e μ^* è la misura esterna indotta da essa su $\mathcal{P}(\Omega)$, per ogni $E \in \mathcal{F}^\sigma$ esiste una parte numerabile S_1 di T tale che, per ogni parte numerabile S di T contenente S_1 , sia

$$(12) \quad \mu^*(E) = \mu(C_S(E)).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $E_i \in \mathcal{F}$ ed S è numerabile, è vera la relazione $C_S(E_i) \in \mathcal{A}$; allora essa è vera anche per ogni $E \in \mathcal{F}^\sigma$, grazie alla (2).

Sia $E \in \mathcal{F}^\sigma$ e sia $A \in \mathcal{A}$ tale che si abbia $E \subset A$, $\mu^*(E) = \mu(A)$. Esiste una parte numerabile S_1 di T tale che A sia un S_1 -cilindro; allora, per ogni S numerabile $S \supset S_1$, si ha

$$E \subset C_S(E) \subset C_{S_1}(E) \subset A, \text{ e quindi } \mu^*(E) = \mu(C_S(E)).$$

TEOREMA 1. Se μ è una misura ≥ 0 su \mathcal{A} e μ^* è la misura esterna indotta da essa su $\mathcal{P}(\Omega)$, allora la restrizione di μ^* ad \mathcal{F}^σ è modulare, ossia per ogni coppia E, F di elementi di \mathcal{F}^σ risulta

$$(13) \quad \mu^*(E \cup F) + \mu^*(E \cap F) = \mu^*(E) + \mu^*(F).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia S_0 una parte numerabile di T verificante la condizione detta nel lemma 2.

In virtù del lemma 3, esiste una parte numerabile S di T contenente S_0 e tale che siano verificate le quattro relazioni:

$$(14) \quad \begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu(C_S(E)), & \mu^*(F) &= \mu(C_S(F)) \\ \mu^*(E \cup F) &= \mu(C_S(E \cup F)), & \mu^*(E \cap F) &= \mu(C_S(E \cap F)). \end{aligned}$$

Essendo

$$C_S(E \cup F) = C_S(E) \cup C_S(F),$$

$$C_S(E \cap F) = C_S(E) \cap C_S(F),$$

ed essendo μ modulare, dalle (14) segue la tesi.

COROLLARIO. Detta λ la restrizione di μ^* ad \mathcal{F}^σ , λ è σ -additiva.

DIMOSTRAZIONE. λ è σ -subadditiva (perchè tale è μ^*), ed è additiva (come si vede facendo $E \cap F = \emptyset$ nella (13)); da queste due proprietà deriva facilmente la tesi.

Ricordiamo ora che \mathcal{F}^σ è un reticolo e che l'insieme vuoto vi appartiene. Se μ è una misura finita ≥ 0 su \mathcal{A} , λ ha, in particolare,

le seguenti proprietà :

$$0 \leq \lambda < \infty, \quad \lambda(\emptyset) = 0;$$

λ è non decrescente e modulare.

Allora possiamo applicare il teorema (1.2) di [3] e dedurne il seguente risultato :

TEOREMA 2. *Esiste unico un prolungamento di λ all'anello di parti di Ω generato da \mathcal{F}^σ , che sia una funzione non negativa, finita ed additiva.*

OSSERVAZIONE 1. Diciamo $\mathcal{R}(\mathcal{F}^\sigma)$ l'anello suddetto; ogni suo elemento è unione finita di insiemi disgiunti della forma $F - G$, con $F, G \in \mathcal{F}^\sigma$ e $G \subset F$ (vedi [1], 5.2, 5.3 e [3], teor. (1.1)). Per ciascuno di questi il prolungamento è definito da $\lambda(F - G) = \lambda(F) - \lambda(G)$ ([3], teor. (1.2)). Inoltre $\mathcal{R}(\mathcal{F}^\sigma)$ è un'algebra, perchè $\Omega \in \mathcal{F}^\sigma$.

OSSERVAZIONE 2. a) La σ -additività di λ su \mathcal{F}^σ non basta per applicare il classico teorema di prolungamento ad un σ -anello, perchè \mathcal{F}^σ non è un anello e neppure un semi-anello.

b) λ coincide con μ su $\mathcal{F}^\sigma \cap \mathcal{A}$, ed in particolare su tutti i rettangoli.

c) In generale non possiamo pretendere che μ^* sia additiva sull'anello generato da \mathcal{F} . Infatti sia $F = \bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(A_t)$, con $A_t \in \mathcal{A}_t$ ed $A_t \neq X_t$ per un'infinità non numerabile di valori di t . Allora l'unico elemento di \mathcal{A} contenuto in F è il vuoto, e quindi l'unico elemento di \mathcal{A} contenente il complementare F' è tutto Ω : quindi $\mu^*(F') = \mu(\Omega)$ (questa eguaglianza vale anche se al posto di (\mathcal{A}, μ) si usa il suo completamento).

Supposto $\mu(\Omega) < \infty$, l'additività di μ^* su $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ implicherebbe $\mu^*(F) = 0$ per ogni F come quello descritto sopra; ma questo in generale non è vero, come risulta dal seguente esempio. Per ciascun $t \in T$ sia μ_t una misura su (X_t, \mathcal{A}_t) con $\mu_t(X_t) = 1$; sia μ la misura prodotto delle μ_t . Per ogni t sia $A_t \in \mathcal{A}_t$, $A_t \neq X_t$ ma $\mu_t(A_t) = 1$: allora risulta $\mu^* \left(\bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(A_t) \right) = 1$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] HALMOS P. R.: « *Measure Theory* ». Ed. Van Nostrand 1950 (ristampa 1964).
- [2] MEYER A.: « *Séparabilité d'un processus stochastique* » C. R. Acad. Sci. Paris, Tome 249 II (1959), pp. 2475-6.
- [3] PETTIS B. J.: « *On the extension of measures* ». Annals of Math. 54 (1951), p. 186-197.

Manoscritto pervenuto in redazione il 19 maggio 1967.